УДК 519.248:[33+301]

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

Смирнова Е.Н., Хохлов Ю.С.
Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 10.01.2014, после переработки 20.01.2014.

Получена некоторая оценка для вероятности разорения страховой компании в многомерной модели коллективного риска.

Ключевые слова: многомерная модель коллективного риска, оценка вероятности разорения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 65–72.

Введение

В актуарной математике всегда уделялось большое значение оценкам вероятности разорения страховщика. Подобная задача всегда решается в рамках той или иной модели для динамики капитала страховой компании. Одной из наиболее популярных моделей является классическая модель коллективного риска Андерсена-Крамера. Для такой модели получено много интересных и практически полезных результатов для оценки вероятности разорения. При этом под моментом разорения понимается первый момент времени, когда капитал компании становится отрицательным (смотри, например, [1] и [2]). Но получить явные выражения для вероятности разорения, особенно для конечных промежутков времени, удается очень редко. Как правило рассматривают те или иные оценки для этой вероятности. Хороший обзор таких результатов для одномерной модели содержится в работе [3].

Такая модель позволяет описать деятельность страховой компании, которая занимается только одним направлением страхования. Но современные страховые компании, как правило, осуществляют страхование одновременно по нескольким видам страхования. При этом за разные виды страхования отвечают разные подразделения компании. Многомерная модель коллективного риска с зависимыми компонентами позволяет учесть зависимость между исками различных направлений страхования, которыми занимается страховая компания. Иски различных направлений страхования часто являются зависимыми, что оказывает влияние на процесс изменения резерва страховщика. Один из вариантов многомерной модели коллективного риска был предложен в работе [4] и он будет использоваться в нашей работе. Далее мы рассматриваем задачу о разорении страховой компании в рамках такой многомерной модели

1. Описание модели

В этом разделе, следуя работе [4], мы даем краткое описание многомерной модели коллективного риска. В ней процесс изменения резерва страховщика представляется в следующем виде:

$$\vec{U}(t) = (U_1(t), \dots, U_m(t)) = \vec{u} + \vec{c} \cdot t - \vec{S}(t), t \geqslant 0,$$

где $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m))$ – начальный капитал страховщика, распределенный между m направлениями страхования; $\vec{c} = (c_1, \dots, c_m)$ – вектор интенсивностей поступления премий по каждому направлению страховой деятельности; $\vec{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$ – суммарные страховые выплаты по каждому направлению, поступившие к моменту времени t.

Обозначим I – множество всех возможных значений многомерного индекса $i = (i_1, \dots, i_m), i \neq 0$, состоящего из нулей и единиц. Далее мы используем следующую интерпретацию: $i_k = 1$, если была выплата по контракту k-ого типа, и равно 0 в противном случае. Обозначим через I_k множество тех индексов i, для которых $i_k = 1$.

Пусть $N^{(i)}(t), t \geqslant 0$ есть число исков, поступивших к моменту времени t и имеющих структуру, соответствующую индексу i. Мы предполагаем, что это независимые однородные процессы Пуассона с параметрами $\lambda^{(i)} \geqslant 0$. Обозначим $\vec{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))$, где $N_k(t) = \sum_{i \in I_k} N^{(i)}$ есть число исков k-ого типа, поступивших к моменту времени t.
$N(t) = \sum_{i \in I} N^{(i)}(t)$ – общее число исков, поступивших к моменту времени t. Из сказанного выше следует, что это процесс Пуассона с параметром $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda^{(i)}$.
$(X_j^{(i)}), j \geqslant 1$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в R_+^m, описывающих величину выплат. Векторы независимы для различных j, но для фиксированного j их компоненты могут быть зависимы.
$(\varepsilon_j, j \geqslant 1)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в множестве индексов I, распределение которых задается по правилу $P(\varepsilon_j = i) = \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda}$.

При сформулированных выше условиях справедливо представление:

$$\vec{N}(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \varepsilon_j \ .$$

Нетрудно показать, что процесс суммарного иска по k-ому направлению страхования определяется по формуле:

$$S_k(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \sum_{i \in I_k} I(\varepsilon_j = i) \cdot X_{j,k}^{(i)} \ .$$

2. Асимптотическое распределение моментов разорения по различным направлениям страхования

Мы хотим рассмотреть совместное поведение всех подразделений страховой компании с точки зрения их эффективности. Для этих целей введем следующие величины. Пусть τ_k есть момент времени, когда резерв по k-ому направлению страхования впервые станет отрицательным. Это означает, что до этого момента выплаты $S_k(t)$ по k-ому направлению страхования до момента времени τ_k были меньше поступивших премий, т.е. $c_k \cdot t$, а в момент τ_k впервые сравнялись с ними или оказались больше. Как отмечалось выше, найти точное распределение этих величин (тем более в многомерном случае) удается очень редко. Поэтому будем искать их асимптотическое распределение в предположении, что разорение по каждому направлению наступает через достаточно большой промежуток времени, т.е. достаточно редко. Более точно, нас будет интересовать асимптотика вероятности

$$P\left(\tau_1 > t_1, \ldots, \tau_m > t_m\right)$$

при $\min(t_1, \ldots, t_m) \to \infty$. Всюду далее, без ограничения общности, мы предполагаем, что $t_1 < t_2, \ldots, t_m$.

Сначала мы найдем асимптотическое распределение процесса выплат $\vec{S}(\vec{t})$, который допускает следующее представление:

$$\vec{S}(\vec{t}) = (S_1(t_1), S_2(t_2), \ldots, S_m(t_m)) =$$

$$(S_1(t_1), S_2(t_1), \ldots, S_m(t_1)) + (0, S_2(t_2) - S_2(t_1), \ldots, S_m(t_2) - S_m(t_1)) +$$
$$\ldots + \left(0, 0, \ldots, 0, S_m(t_m) - S_m(t_{m-1})\right).$$

Обозначим

$$\vec{S}_{t_1} = \left(S_1(t_1), S_2(t_1), \ldots, S_m(t_1)\right),$$

$$\vec{S}_{t_1,t_2} = \left(0, S_2(t_2) - S_2(t_1), \ldots, S_m(t_2) - S_m(t_1)\right),$$

$$\vdots$$

$$\vec{S}_{t_{m-1},t_m} = \left(0, 0, \ldots, 0, S_m(t_m) - S_m(t_{m-1})\right),$$

и

$$X^*_{j,k} = \sum_{i \in I_k} I(\varepsilon_j = i) \cdot X^{(i)}_{j,k}.$$

Из сказанного выше следует, что

$$S_k(t_1) = \sum_{j=1}^{N(t_1)} X^*_{j,k}, t_1 \in R^1, k = \overline{1, m},$$

$$S_k(t_2) - S_k(t_1) = \sum_{j=N(t_1)+1}^{N(t_2)} X^*_{j,k}, t_1, t_2 \in R^1, k = \overline{2, m},$$

$$\vdots$$

$$S_m(t_m) - S_m(t_{m-1}) = \sum_{j=N(t_{m-1})+1}^{N(t_m)} X^*_{j,m}, t_m, t_{m-1} \in R^1.$$

$\vec{S}_{t_1}, \vec{S}_{t_1,t_2}, \ldots, \vec{S}_{t_{m-1},t_m}$ независимы, поскольку числа слагаемых на каждом из непересекающихся интервалов независимы в силу независимости приращений пуассоновских процессов и сами слагаемые в суммах по непересекающимся интервалам есть независимые одинаково распределенные случайные векторы.

Вычислим числовые характеристики случайного вектора $X_j^* = (X_{j,k}^*)$.

$$a = (a_1, \ldots, a_m)^T = E(X_j^*) = \sum_{i \in I} E\left(I(\varepsilon_j = i) \cdot X_j^{(i)}\right) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \cdot E(X_j^{(i)}),$$

$$\sigma_{p,q} = Cov(X_{j,p}^*, X_{j,q}^*) = E\left(X_{j,p}^* \cdot X_{j,q}^*\right) - E\left(X_{j,p}^*\right) \cdot E(X_{j,q}^*)\,.$$

$$E\left(X_{j,p}^* \cdot X_{j,q}^*\right) = \sum_{i \in I} \sum_{l \in I} E\left(I(\varepsilon_j = i) \cdot I(\varepsilon_j = l) \cdot X_{j,p}^{(i)} \cdot X_{j,q}^{(i)}\right) =$$

$$\sum_{i \in I} E\left(I(\varepsilon_j = i) \cdot X_{j,p}^{(i)} \cdot X_{j,q}^{(i)}\right) = \sum_{i \in I} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \cdot E\left(X_{j,p}^{(i)} \cdot X_{j,q}^{(i)}\right).$$

Окончательно получаем следующее выражение для ковариаций:

$$\sigma_{p,q} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \cdot E\left(X_{j,p}^{(i)} \cdot X_{j,q}^{(i)}\right) - \left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \cdot E(X_{j,p}^{(i)})\right) \cdot \left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} \cdot E(X_{j,q}^{(i)})\right).$$

Далее нам потребуется следующий хорошо известный результат (смотри, например, [2] в одномерном случае).

Теорема 1. *Пусть $\{X_j\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в R^m со средними $a = (a_1, \ldots, a_m)^T$ и матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{pq})$, N – независимая от них случайная величина с распределением Пуассона с параметром λ. Тогда нормированная сумма*

$$S_\lambda = \left(\sum_{j=1}^{N} X_j - \lambda \cdot a\right) / \sqrt{\lambda}$$

имеет асимптотически ($\lambda \to \infty$) многомерное нормальное распределение со средним 0 и матрицей ковариаций Σ.

Положим $t_j = s \cdot r_j$, т.е. $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)^T = (s \cdot r_1, s \cdot r_2, \ldots, s \cdot r_m)^T$, где $r_1 < r_2 < \ldots < r_m$.

Рассмотрим теперь многомерный случайный процесс $\vec{S}_{t_1}$. В силу теоремы 1 при фиксированном r_1 и $s \to \infty$ случайный вектор

$$\vec{S}_{t_1}^* = \frac{\vec{S}_{t_1} - M(X_j^*) \cdot \lambda \cdot s \cdot r_1}{\sqrt{\lambda \cdot s}}$$

имеет асимптотически многомерное нормальное распределение со средним 0 и ковариационной матрицей $r_1 \cdot \Sigma$.

Аналогично можно показать, что для любого $k = \overline{2, m}$ случайный вектор $\vec{S}_{t_{k-1},t_k}$ после соответствующей нормировки имеет асимптотически многомерное нормальное распределение со средним 0 и матрицей ковариаций $(r_k - r_{k-1}) \cdot \Sigma^{(k-1)}$, которая получается из матрицы Σ обнулением первых $(k-1)$ строк и столбцов. В силу указанного выше представления и независимости входящих в него слагаемых получаем следующий окончательный результат.

Теорема 2. *В принятых выше обозначениях при* $\min(t_1, \ldots, t_m) \to \infty$ *случайный вектор*

$$\vec{S}^*(\vec{t}) = \frac{\vec{S}(\vec{t}) - M(X_j^*) \circ r \cdot \lambda \cdot s}{\sqrt{\lambda \cdot s}} \ ,$$

где $a \circ b = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_m \cdot b_m)^T$, *имеет асимптотически многомерное нормальное распределение со средним 0 и матрицей ковариаций* Σ_0, *элементы которой имеют вид* $\sigma_{p,q} \cdot \min(r_p, r_q)$.

В силу того, что допредельное случайное поле $\vec{S}(\vec{t})$ имеет независимые и однородные приращения, то из доказанной сходимости одномерных распределений следует сходимость и всех конечномерных распределений. Более того, стандартными методами нетрудно доказать, что справедлив более сильный результат – так называемая функциональная предельная теорема (смотри, например, [5] или [6]).

Вернемся теперь к нашей исходной задаче. Легко видеть, что

$$P(\tau_1 > t_1, \ldots, \tau_m > t_m) =$$

$$P(U_1(v_1) > 0, \ldots, U_m(v_m) > 0 \ , 0 \le v_1 < t_1, \ldots, 0 \le v_m < t_m) =$$

$$P(S_1(v_1) < u_1 + c_1 \cdot v_1, \ldots, S_m(v_m) < u_m + c_m \cdot v_m \ , 0 \le v_1 < t_1, \ldots, 0 \le v_m < t_m) \ .$$

В одномерном случае применяется аналогичная «диффузионная» аппроксимация. При этом предельный процесс для выплат имеет вид $S(t) = \beta \cdot t + \delta \cdot W(t)$, где $W(t)$ есть стандартный винеровский процесс. Показано, что вероятность разорения в такой модели за конечный промежуток времени t аппроксимируется величиной

$$\Phi\left(\frac{t - u \cdot y_0}{\sqrt{u \cdot v_0}}\right) \cdot C \cdot e^{-R \cdot u} \ ,$$

при $u, t \to \infty$, когда величина $(t - u \cdot y_0)/\sqrt{u \cdot v_0}$ ограничена, где y_0, v_0, C, R – явно вычисляемые константы (смотри [7], с. 137–141).

Пусть A есть матрица, элементами которой являются квадратные корни из элементов матрицы ковариаций Σ_0. Тогда предельный процесс для процесса $A^{-1} \cdot \vec{S}(\vec{t})$ будет иметь независимые компоненты, каждая из которых будет винеровским процессом. Нужная нам вероятность есть вероятность пересечения независимых событий, которая легко вычисляется с применением одномерного результата. Для получения окончательного результата необходимо применить обратное линейное преобразование для переменных.

3. Оценка вероятности разорения

Остается без ответа последний вопрос: что мы будем понимать под вероятностью разорения в многомерной модели. Существуют разные подходы к этой задаче. Мы предлагаем следующее решение. Под моментом разорения будем понимать такой момент времени, когда впервые капитал хотя бы одного из подразделений страховой компании станет отрицательным. Это соответствует такому подходу, когда мы стремимся к тому, чтобы все подразделения компании работали рентабельно, а не существовали за счет успешного функционирования одного или нескольких отделов. Формально для вычисления вероятности разорения при таком подходе нужно взять решение, полученное в предыдущем разделе, и вычислить его для случая, когда $t_1 = t_2 = \ldots = t_m$.

Заключение

В настоящей работе на основе диффузионной аппроксимации для процесса выплат в многомерной модели коллективного риска найдена оценка вероятности разорения. Этот результат обобщает соответствующий одномерный результат на ситуации, когда страховая компания осуществляет одновременно страхование по нескольким видам деятельности.

Список литературы

[1] Asmussen S. Ruin probabilities. World Scientific, Singapore, 2000.

[2] Бауэрс и др. Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001.

[3] Калашников В.В., Константинидис Д.Г. Вероятность разорения // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, №4. С. 1055—1100.

[4] Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С. Многомерная модель коллективного риска // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2005. №3. С. 35–43.

[5] Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.

[6] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.

[7] Grandell J. Aspects of risk theory. New York: Springer-Verlag, 1991.

Библиографическая ссылка

Смирнова Е.Н., Хохлов Ю.С. Оценка вероятности разорения в многомерной модели коллективного риска // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 65–72.

Сведения об авторах

1. **Смирнова Екатерина Николаевна**
аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6, РУДН.

2. **Хохлов Юрий Степанович**
заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6, РУДН.

ESTIMATION OF RUIN PROBABILITY FOR MULTIVARIATE COLLECTIVE RISK MODEL

Smirnova Ekaterina Nikolayevna
Post-graduate student of the Department of Probability Theory
and Mathematical Statistics, Peoples' Friendship university of Russia
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str.

Khokhlov Yuriy Stepanovich
Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,
Peoples' Friendship university of Russia
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str.

Received 10.01.2014, revised 20.01.2014.

Estimation of ruin probability of insurance company for multivariate collective risk model is obtained.

Keywords: multivariate collective risk model, estimation of ruin probability.

Bibliographic citation

Smirnova E.N., Khokhlov Yu.S. Estimation of ruin probability for multivariate collective risk model. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 65–72. (in Russian)