УДК 519.21

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХКАНАЛЬНОЙ МНОГОПОТОКОВОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕУПОРЯДОЧИВАНИЕМ ЗАЯВОК И С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ФАЗОВОГО ТИПА

Данник Е.С., Матюшенко С.И.
Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 10.02.2014, после переработки 25.02.2014.

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания с несколькими пуассоновскими потоками заявок на входе и буфером переупорядочивания на выходе системы. Длительности обслуживания заявок случайны и имеют распределения фазового типа. Получено выражение для преобразования Лапласа–Стилтьеса функции распределения задержки переупорядочивания в рассматриваемой системе. Разработан алгоритм для расчета факториальных моментов числа заявок в буфере переупорядочивания.

Ключевые слова: система массового обслуживания, переупорядочивание заявок, распределение фазового типа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 113–119.

Введение

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания (СМО) с общим накопителем емкости $r,\ r<\infty$, на которую поступает s независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_l,\ l=\overline{1,s}$. Предполагается, что длительности обслуживания заявок различных типов на приборе j являются независимыми в совокупности с.в. с функцией распределения (ФР) фазового типа $B_j^l(t)$,

$$B_j^l(t)=1-\vec{\beta}_j^{l\,T}e^{M_j^l t}\vec{1},\quad t\geqslant 0\,,\quad \vec{\beta}_j^{l\,T}\vec{1}=1\,,$$

с неприводимым PH-представлением $\left(\vec{\beta}_j^l, M_j^l\right)$ порядка $m_j^l,\ l=\overline{1,s},\ j=1,2$ [1].

Будем считать, что заявка, поступающая в свободную СМО, направляется на первый прибор, а при наличии очереди действует дисциплина FCFS.

Предположим, что всем заявкам независимо от типа, при поступлении в систему присваивается порядковый номер. Будем требовать сохранения порядка между заявками на выходе из СМО, установленного при входе в нее. Заявки, завершившие обслуживание и нарушившие установленный порядок, будут накапливаться на выходе системы в буфере переупорядочивания (БП).

В соответствии с обозначениями Кендалла будем кодировать рассматриваемую СМО как $M_s/PH_s/2/\mathrm{r}/\mathrm{res}$, где res – сокращение от «resequence» – переупорядочивание.

Такая система уже рассматривалась авторами в [2]. В той работе функционирование системы описывалось однородным марковским процессом над пространством состояний без учета содержимого БП. В итоге был разработан рекуррентный матричный алгоритм для расчета стационарных вероятностей указанного процесса. Основная задача данной работы состоит в том, чтобы, опираясь на результаты [2], получить показатели, характеризующие стационарное состояние БП. Перейдем в решению этой задачи.

1. Преобразование Лапласа–Стилтьеса стационарной функции распределения задержки переупорядочивания заявок определенного типа

Получим выражения для определения преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) стационарной ФР задержки переупорядочивания заявок каждого типа в отдельности. Для этого обозначим через δ_l задержку переупорядочивания l-заявки в стационарном режиме работы СМО, а через $f_l(u)$ – ПЛС ФР $F_{\delta_l}(t)$ с.в. δ_l, $l=\overline{1,s}$. Далее, обозначим через $f_{l,j}(u)$ – ПЛС условной стационарной ФР задержки переупорядочивания при условии, что задержана l-заявка, обслуженная прибором j, $j=1,2$. Кроме этого, рассмотрим стационарные вероятности $\pi^{-}_{D,j}(l_1,j)$, $\pi^{-}_{D,j}(k,l_1,l_2,j_{3-j},i)$ макросостояний (l_1,j) и (k,l_1,l_2,j_{3-j},i) соответственно, $k=\overline{2,r+2}$, $l_j=\overline{1,s}$, $i=1,2$, $j_j=\overline{1,m_j^{l_j}}$, в момент $(t-0)$ окончания обслуживания заявок на приборе j, $j=1,2$, и введем векторы

$$\pi^{-T}_{D,j}(k,l_1,l_2,i)=\Big(\pi^{-}_{D,j}(k,l_1,l_2,1,i),\ldots,\pi^{-}_{D,j}\big(k,l_1,l_2,m_{3-j}^{l_{3-j}},i\big)\Big),$$
$$k=\overline{2,r+2},\quad l_i=\overline{1,s},\quad i=1,\,2.$$

Очевидно, что l-заявка, обслуженная прибором j, $j=1,2$ не будет задержана для переупорядочивания, если после ее ухода система останется пустой, либо если в момент $(t-0)$ окончания обслуживания заявки на приборе $(3-j)$ будет обслуживаться заявка любого типа, пришедшая в систему раньше данной l-заявки. Если же в момент $(t-0)$ на приборе $(3-j)$ будет обслуживаться заявка, пришедшая в систему раньше данной l-заявки, то данная l-заявка будет задержана до момента окончания обслуживания на приборе $(3-j)$.

Следовательно, на основании вышеизложенного и с учетом [1, с. 104] получаем

$$f_{l_j,j}(u)=\pi^{-}_{D,j}(l_j,j)+$$
$$+\sum_{k=2}^{r+2}\sum_{l_{3-j}=1}^{s}\left[\vec{\pi}^{-T}_{D,j}(k,l_1,l_2,j)\vec{1}+\vec{\pi}^{-T}_{D,j}(k,l_1,l_2,3-j)\big(uI-M_{3-j}^{l_{3-j}}\big)^{-1}\vec{\mu}_{3-j}^{l_{3-j}}\right],\qquad(1)$$
$$l_j=\overline{1,s},\quad j=1,\,2.$$

Для определения вероятностей $\pi^{-}_{D,j}(l_1,j)$, $\pi^{-}_{D,j}(k,l_1,l_2,j_{3-j},i)$ воспользуемся результатами [3], согласно которым

$$\pi^{-}_{D,j}(l_j,j)=\frac{1}{\lambda_{D,l_j}(j)}\vec{p}^{T}(l_j,j)\vec{\mu}_j^{l_j},\quad l_j=\overline{1,s},\quad j=1,\,2;$$
$$\pi^{-}_{D,j}(k,l_1,l_2,j)=\frac{1}{\lambda_{D,l_j}(j)}\vec{p}^{T}(k,l_1,l_2,j)\Big[u(2-j)\big(\vec{\mu}_1^{l_1}\otimes I\big)+u(j-1)\big(I\otimes\vec{\mu}_2^{l_2}\big)\Big],\qquad(2)$$
$$k=\overline{2,r+2},\quad l_j=\overline{1,s},\quad i=1,\,2,\quad j=1,\,2,$$

где $\lambda_{D,l_j}(j)$ – интенсивность выхода l_j-заявок, обслуженных прибором j, определяемая выражением

$$\lambda_{D,l_j}(j) = \vec{p}^T(l_j, j)\vec{\mu}_j^{l_j} +$$
$$+ \sum_{l_{3-j}=1}^{s} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=2}^{r+2} \vec{p}^T(k, l_1, l_2, i) \cdot \Big[u(2-j)\big(\vec{\mu}_1^{l_1} \otimes \vec{1}\big) + u(j-1)\big(\vec{1} \otimes \vec{\mu}_2^{l_2}\big)\Big], \qquad (3)$$
$$l_j = \overline{1, s}, \quad j = 1,\, 2.$$

Теперь соотношения (1) с учетом формул (2) можно записать в следующем виде:

$$f_{l_j,j}(u) = \lambda_{D,l_j}^{-1}\Big[\vec{p}^T(l_j, j)\vec{\mu}_j^{l_j} + \sum_{k=2}^{r+2} \sum_{l_{3-j}=1}^{s} \Big(u(2-j)\Big[\vec{p}^T(k, l_1, l_2, 1) \cdot \big(\vec{\mu}_1^{l_1} \otimes I\big) +$$
$$+ \vec{p}^T(k, l_1, l_2, 2)\big(\vec{\mu}_1^{l_1} \otimes (UI - M_2^{l_2})^{-1}\vec{\mu}_2^{l_2}\big)\Big] + \qquad (4)$$
$$+ u(j-1)\Big[\vec{p}^T(k, l_1, l_2, 2)\big(I \otimes \vec{\mu}_2^{l_2}\big) + \vec{p}^T(k, l_1, l_2, 1)\Big(\big(uI - M_1^{l_1}\big)^{-1}\vec{\mu}_1^{l_1} \otimes \vec{\mu}_2^{l_2}\Big)\Big]\Big)\Big],$$
$$l_j = \overline{1, s}, \quad j = 1,\, 2.$$

Далее заметим, что вероятность выхода l-заявок из прибора j равна $\lambda_{D,l}(j)/\lambda_{D,l}$, $j = 1, 2$, где $\lambda_{D,l}$ – интенсивность выходящего из системы потока l-заявок:

$$\lambda_{D,l} = \lambda_{D,l}(1) + \lambda_{D,l}(2), \quad l = \overline{1, s}.$$

Таким образом, подытоживая наши рассуждения, мы получаем, что справедлива

Теорема 1. *ПЛС стационарной ФР задержки переупорядочивания l-заявок в СМО $M_s/PH_s/2/r/res$ определяется выражением*

$$f_l(u) = -\lambda_{D,l}^{-1} \sum_{j=1}^{2} \lambda_{D,l}(j) f_{l,j}(u), \quad l = \overline{1, s},$$

где $f_{l,j}(u)$, $j = 1,\, 2$, вычисляются по формулам (4).

Обозначим через $\delta_{l\nu}$ начальный момент порядка ν, $\nu \geqslant 1$, задержки переупорядочивания l-заявки в исследуемой СМО. Тогда из теоремы 1 с учетом [1, с. 104] получаем очевидное

Следствие 1. *Начальный момент порядка ν задержки переупорядочивания l-заявки в СМО $M_s/PH_s/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением*

$$\delta_{l\nu} = \frac{(-1)^\nu \nu!}{\lambda_{D,l}} \sum_{k=2}^{r+2} \sum_{\gamma=1}^{s} \Big[\vec{p}^T(k, l, \gamma, 2)\big(\vec{\mu}_1^{l} \otimes \big[M_2^{\gamma}\big]^{-\nu}\vec{1}\big) + \vec{p}^T(k, \gamma, l, 1)\big(\big[M_1^{\gamma}\big]^{-\nu}\vec{1} \otimes \vec{\mu}_2^{l}\big)\Big],$$
$$l = \overline{1, s}, \quad \nu \geqslant 1.$$

2. Факториальные моменты числа заявок в буфере переупорядочивания

Определим факториальные моменты числа заявок в БП исследуемой СМО в стационарном режиме ее работы. Для этого положим

$$F_{l,j_i,i}(z) = \sum_{n\geqslant 0} p(l, j_j, i, n) z^n \,, \tag{5}$$

$$F_{k,l_1,l_2,j_1,j_2,i}(z) = \sum_{n\geqslant 0} p(k, l_1, l_2, j_1, j_2, i, n) z^n \tag{6}$$

и введем векторы $\vec{F}_{ki}(z)$, аналогичные по структуре векторам $\vec{p}_{ki}$ из работы [2], $k = \overline{1, r+2}$, $i = 1,\, 2$.

Далее, положим

$$\vec{v}_{ki\nu} = \vec{F}^{(\nu)}_{ki}(1), \quad k = \overline{1, r+2}, \quad i = 1,\, 2, \quad \nu \geqslant 0 \tag{7}$$

и введем матрицы

$$D_{ki} = \begin{cases} -\lambda \oplus M_i\,, & k = 1\,, \\ -\lambda \oplus M\,, & k = \overline{2, r+1}\,, \\ M\,, & k = r+2\,, \quad i = 1,\, 2\,; \end{cases} \tag{8}$$

$$E_{ki} = \begin{cases} \lambda \otimes I \otimes \vec{\beta}_2^T\,, & k = 1\,, \quad i = 2\,, \\ \lambda \otimes \vec{\beta}_1^T \otimes I\,, & k = 1\,, \quad i = 2\,, \\ \lambda \otimes I \otimes I\,, & k = \overline{2, r+2}\,, \quad i = 1,\, 2\,; \end{cases} \tag{9}$$

$$G_{ki} = \begin{cases} I \otimes \vec{\mu}_2 \vec{\beta}_2^T\,, & i = 1\,, \\ \vec{\mu}_1 \vec{\beta}_1^T \otimes I\,, & i = 2\,, \quad k = \overline{3, r+2}\,. \end{cases} \tag{10}$$

И, наконец, обозначим через v_ν стационарный факториальный момент ν-го порядка числа заявок в БП исследуемой СМО.

Теорема 2. *Факториальный момент ν-го порядка, $\nu = 1, 2, \ldots$, числа заявок в БП СМО $M_s/PH_s/2/r/res$ в стационарном режиме ее работы определяется по формуле*

$$v_\nu = \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{i=1}^{2} \vec{v}^{\,T}_{ki\nu} \vec{1}\,, \tag{11}$$

где $\vec{v}_{ki\nu}$ вычисляются в соответствии с алгоритмом, разработанным нами ранее в [4, теорема 1], а исходные данные алгоритма задаются выражениями (8)–(10).

Доказательство. Прежде всего докажем справедливость формулы (11).

Согласно определению факториального момента ν-го порядка v_ν определяется соотношением

$$v_\nu = \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}z^\nu} \sum_{n\geqslant 1} z^n p(n) \Big|_{z=1}\,, \tag{12}$$

где $p(n)$ – стационарная вероятность того, что в БП системы содержится ровно n заявок, $n \geqslant 1$.

Ясно, что

$$p(n) = \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{i=1}^{2} \vec{p}_{kin}^{\,T} \vec{1}\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

следовательно, (12) можно записать в следующем виде:

$$v_\nu = \sum_{k=1}^{r+2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}z^\nu} \sum_{n \geqslant 1} z^n \vec{p}_{kin}^{\,T} \vec{1} \,\bigg|_{z=1} . \tag{13}$$

И, наконец, из (13) с учетом (5)–(7) очевидным образом вытекает (11).

Теперь нам необходимо получить алгоритм для вычисления $\vec{v}_{ki\nu}$, $k = \overline{1, r+2}$, $i = 1, 2$, $\nu \geqslant 1$. Для этого умножим уравнения (10)–(12) из работы [2] для каждого фиксированного $n \geqslant 0$ справа на z^n и просуммируем полученные равенства при каждом фиксированном $k = \overline{1, r+2}$, $i = 1, 2$, по всем возможным значениям n. В итоге, учитывая (5), (6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{0}^T &= u(1-n)u(2-i)\vec{p}_0^{\,T}\big(\lambda \otimes \vec{\beta}_1^T\big) + \vec{F}_{1i}^T(-\lambda \oplus M_i) + \\ &+ u(2-i)\big[\vec{p}_{22}^{\,T} + z\vec{F}_{2i}^T(z)\big](I \otimes \vec{\mu}_2) + u(i-1)\big[\vec{p}_{21}^{\,T} + z\vec{F}_{2i}^T(z)\big](I \otimes \vec{\mu}_1)\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,\, 2\,; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \vec{0}^T &= u(3-k)\Big[u(2-i)\vec{F}_{k-1,i}^T(z)(\lambda \otimes I \otimes \vec{\beta}_2^T) + \\ &\qquad\qquad + u(i-1)\vec{F}_{k-1,i}^T(z)(\lambda \otimes \vec{\beta}_1^T \otimes I)\Big] + \\ &+ u(k-2)\vec{F}_{k-1,i}^T(z)(\lambda \otimes I \otimes I) + \vec{F}_{ki}^T(z)(-\lambda \oplus M) + \\ &+ u(2-i)\Big[\big(\vec{p}_{k+1,2}^{\,T} + z\vec{F}_{k+1,i}^T(z)\big)(I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^T)\Big] + \\ &+ u(i-1)\Big[\vec{p}_{k+1,1}^{\,T} + z\vec{F}_{k+1,i}^T(z)\Big](\vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^T \otimes I)\,, \qquad k = \overline{2, r+2}\,, \quad i = 1,\, 2\,; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\vec{0}^T = \vec{F}_{r+1,i}^T(z)(\lambda \otimes I \otimes I) + \vec{F}_{r+2,i}^T(z)M\,, \qquad i = 1,\, 2\,. \tag{16}$$

Дифференцируя (14)–(16) ν раз по z, а затем полагая $z = 1$, и учитывая (7), приходим к системе уравнений для определения $\vec{v}_{ki\nu}$, $k = \overline{1, r+2}$, $i = 1, 2$, которая с учетом (8)–(10) сводится к системе (12)–(14) из работы [4], а решение последней определяется в соответствии с теоремой 1 из той же работы. Таким образом, теорема доказана. □

Заключение

Итогом проведенного исследования являются алгоритмы расчета таких важных стационарных показателей производительности рассматриваемой системы, как ПЛС функции распределения задержки переупорядочивания заявок и факториальные моменты числа заявок каждого типа в буфере переупорядочивания.

Список литературы

[1] Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995.

[2] Данник Е.С., Матюшенко С.И. Анализ двухканальной многопотоковой системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределением фазового типа // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2014. №2. С. 51–60.

[3] Наумов В.А. О предельных вероятностях полумарковского процесса. Современные задачи в точных науках. М.: УДН, 1975. С. 35–39.

[4] Матюшенко С.И. Стационарные харктеристики двухканальной системы обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениеями фазового типа // Информатика и ее применения. 2010. Т. 4, №4. С. 67–71.

Библиографическая ссылка

Данник Е.С., Матюшенко С.И. Стационарные характеристики двухканальной многопотоковой системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок и с распределениями фазового типа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 113–119.

Сведения об авторах

1. **Данник Евгения Сергеевна**
магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН

2. **Матюшенко Сергей Иванович**
доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН.
E-mail: matushenko@list.ru.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE TWO-CHANNEL MULTI-FLOWS QUEUEING SYSTEM WITH RESEQUENCE OF CUSTOMERS AND DISTRIBUTIONS OF PHASE TYPE

Dannik Evgeniya Sergeevna
Graduate student of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Russian University of Peoples Friendship
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., RUPF

Matyushenko Sergey Ivanovich
Associate Professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Russian University of Peoples Friendship
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., RUPF.
E-mail: matushenko@list.ru

Received 10.02.2014, revised 25.02.2014.

The two-channel queueing system with several Poisson flows at the inlet and buffer of resequence at the output is considered. The Laplace–Stieltjes transform of the distribution function that characterizes the delay of resequence is obtained. The algorithm is developed to calculate the factorial moments of the number of customers being at the buffer of resequence.

Keywords: queueing system, resequence of customers, phase type distribution.

Bibliographic citation

Dannik E.S., Matyushenko S.I. Stationary characteristics of the two-channel multi-flows queueing system with resequence of customers and distributions of phase type. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 113–119. (in Russian)