УДК 519.61

КОРРЕКЦИЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО МИНИМУМУ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОРМ[1]

Баркалова О.С.
Московский педагогический государственный университет, г. Москва

Поступила в редакцию 13.07.2012, после переработки 25.01.2014.

Рассматривается коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с критериями коррекции, основанными на четырех возможных случаях полиэдральных норм, а также соответствующих задач линейного программирования. Предлагается подход, заключающийся в сведении данных задач, в зависимости от нормы, либо к задаче линейного программирования, либо к последовательности таких задач. Данные методы получают программную реализацию посредством математической среды $MatLab$.

Ключевые слова: несовместная система линейных алгебраических уравнений, несобственная задача линейного программирования, матричная коррекция, полиэдральная норма, минимаксный критерий.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 121–133.

Введение

Математической моделью многих прикладных задач в областях техники, экономики, физики и многих других, являются системы линейных алгебраических уравнений и неравенств, которые по различным причинам могут быть несовместными. Таковыми могут являться, в зависимости от рассматриваемой области, нехватка ресурсов, производственных мощностей, погрешности в экспериментальных данных, ошибки округления, а также противоречивость и нечеткость информации. Задачи линейного программирования (ЗЛП), ограничения которых задаются такими системами, называют несобственными. В связи с этим возникает естественная потребность в коррекции данных задач. Исследования в этом направлении начались, главным образом, в 80-х годах прошлого века и не прекращаются по сей день. В частности, А.А. Ватолиным было выполнено исследование задач коррекции расширенной матрицы коэффициентов системы уравнений по минимуму евклидовой нормы и систем с фиксированными (не подверженными коррекции) строками и столбцами в расширенной матрице системы [1]. В.А. Гореликом,

[1]Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства образования и науки РФ, № гос. рег. 01201153724.

В.И. Ерохиным, Р.В. Печенкиным рассматриваются задачи матричной коррекции матриц несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочной структурой [3]. Исследовались и соответствующие задачи линейного программирования. В.А. Гореликом двухкритериальная проблема максимизации исходного линейного критерия и минимизации допустимой коррекции расширенной матрицы коэффициентов формализуется как задача минимизации евклидовой нормы корректирующей матрицы при ограничении снизу на значение исходного критерия [2]. В соавторстве с В.И. Ерохиным и О.В. Муравьевой им были рассмотрены вопросы существования и единственности решения для задачи коррекции несобственной ЗЛП по минимуму евклидовой нормы матрицы коррекции, исследуется вид семейства решений скорректированных систем [4]. Р.В. Печенкиным были исследованы вопросы оптимальной структурной матричной коррекции, в том числе и по минимаксному критерию. Минимаксный критерий также использовался Р.Р. Ибатуллиным при коррекции и аппроксимации задач оптимизации и управления [5].

Как видно, основными рассматриваемыми критериями коррекции являются минимаксный и минимум евклидовой нормы. В монографии [4] используется более общий случай матричной гельдеровой нормы. Использование в качестве критерия оптимальности полиэдральных норм дает новые возможности с точки зрения формализации постановки и содержательной интерпретации задач оптимизации, в том числе прикладных. К числу исторически сложившихся первых критериев качества полиэдральной структуры следует отнести известный критерий равномерного приближения Чебышева. В работах российских ученых используются такие выражения как полиэдральное оценивание и полиэдральная аппроксимация, полиэдральная оптимизация и оптимизация в полиэдральной норме, полиэдральные множества допустимых стратегий, алгоритмы полиэдральной аппроксимации в задачах фильтрации и др. Н.В. Филимоновым исследована полиэдральная оптимизация дискретных процессов управления. Основными достоинствами полиэдральной оптимизации являются:

- ясный практический смысл полиэдральных критериев качества;
- сводимость к задачам линейного программирования, теория которых хорошо изучена;
- простота компьютерной реализации с использованием доступных и апробированных вычислительных технологий и стандартного программного обеспечения.

Данная статья посвящена матричной коррекции по минимуму различных видов полиэдральных норм, частным случаем которого является и минимаксный критерий. Принимаются во внимание две постановки задачи, а именно: коррекции обеих частей исходной системы и коррекции при фиксированном векторе правых частей. В разделе 1 дается общая постановка задачи, а также некоторые сведения о матричных нормах. Разделы 2 и 3 посвящены коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений с критериями коррекции, основанными на четырех возможных случаях полиэдральных норм, и соответствующих задач линейного программирования. В разделе 4 показана программная реализация методов коррекции с использованием математической среды $MatLab$ и сравнительные результаты для численного примера небольшой размерности.

1. Необходимые сведения и обозначения

Пусть дана несовместная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

которая дополняется условием неотрицательности решения

$$x \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $A \in R^{m\times n}, x \in R^n, b \in R^m$. И пусть $\chi_+(A,b) \triangleq \{x|Ax = b, x \geqslant 0\} = \varnothing$ – множество ее решений.

Задачу матричной коррекции СЛАУ (1.1) в общем виде сформулируем следующим образом: требуется найти такую матрицу H (расширенную матрицу [h H]), что система

$$(A + H) \cdot x = b(= b - h),$$

дополненная условием (1.2), становится совместной, а элементы матрицы коррекции удовлетворяют требованию «малости», которое формализуется в виде самостоятельной задачи.

В данной статье остановимся на критериях, в основе которых лежат различные виды полиэдральных норм. Приведем основные определения.

Определение 1. *Гельдеровой нормой с показателем $p \geqslant 1$ для матрицы $A \in R^{m\times n}$ будем называть величину*

$$\|A\|_{l_p} \triangleq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При выборе $p = \infty$ или $p = 1$ получаем соответственно

$$\|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j}|a_{ij}|, \|A\|_{l_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Определение 2. *φ, ψ-нормой матрицы $A \in R^{m\times n}$ будем называть величину*

$$\|A\|_{\varphi,\psi} \triangleq max_{x\neq 0}\frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)},$$

где $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ – некоторые векторные нормы.

Определение 3. *Векторную норму $\|\cdot\|$ называют полиэдральной, если ее единичный шар*

$$B_{\|\cdot\|} = \{y \in R^n : ||y|| \leqslant 1\}$$

является многогранником, то есть выпуклой оболочкой конечного множества точек.

Определение 4. *Матричную φ, ψ - норму будем называть полиэдральной, если соответствующие векторные нормы $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ являются полиэдральными.*

Приведем некоторые частные виды полиэдральных норм в зависимости от выбора $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$.

1) При $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{1,\infty} = \|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

2) При $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_1$

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{1,1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|. \qquad (1.3)$$

3) При $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_1$

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{\infty,1} = \|A\|_{l_1} = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

4) При $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$

$$\|A\|_{\varphi,\psi} = \|A\|_{\infty,\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Таким образом, коррекция системы по минимуму одной из этих норм является частным случаем ее коррекции по минимуму φ, ψ – нормы матрицы с соответствующим выбором векторных норм. А в случае минимизации величин $\max_{i,j} |a_{ij}|$ и $\sum_{i,j} |a_{ij}|$ – частными случаями еще и гельдеровой нормы матрицы.

Определение 5. *Векторную норму $\|\cdot\|_p^*$ будем называть двойственной к векторной норме Гельдера с показателем p, если*

$$\|\cdot\|_p^* = \|\cdot\|_q,$$

где q такое, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Определение 6. *Вектор $y \in R^n$, удовлетворяющий условию*

$$y^T x = \varphi^*(y) \cdot \varphi(x) = 1$$

для некоторого вектора $x \neq 0, x \in R^n$, называется двойственным к вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$. Здесь $\varphi^*(y)$ – норма, двойственная к $\varphi(x)$.

Нормы $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и $\varphi^*(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$ являются двойственными друг к другу. Соотношение (1.3) принимает вид

$$y^T x = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1 = 1.$$

Тогда вектор, двойственный к x относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, можно найти следующим образом:

$$y_i = \begin{cases} \text{любое число из диапазона } [-\frac{1}{\|x\|_1}, \frac{1}{\|x\|_1}], \text{ если } x_i = 0, \\ \frac{sign(x_i)}{\|x\|_1} \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.4}$$

То есть вектор y, определяемый (1.4), в общем случае не является единственным. А вектор, двойственный относительно нормы $\|\cdot\|_1$, можно найти по формуле

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_i| < \|x\|_\infty, \\ \frac{sign(x_i)}{k\|x\|_\infty} & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1.5}$$

где k – число компонент вектора x, для которых выполняется условие $|x_i| < \|x\|_\infty$ (то есть максимальных компонент).

2. Коррекция несовместной СЛАУ с условием неотрицательности по минимуму различных видов полиэдральных норм

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{2.1}$$

где $A \in R^{m\times n}$ – неизвестная матрица, $x \in R^n$ и $b \in R^m$ – заданные векторы, причем

$$x \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Требование (2.2) вводим, так как оно понадобится в дальнейшем при рассмотрении соответствующих задач линейного программирования.

Задача 1. Найти матрицу A^0, являющуюся решением системы (2.1) при условии $x > 0$ и имеющую минимальную $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ - норму.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([4]). *Задача 1 разрешима и, в частности, имеет решение из класса одноранговых матриц, задаваемое формулой*

$$A^0 = by^T,$$

где $y \in R^n$ – вектор, двойственный к вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом

$$\|A^0\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}.$$

Теорема 1 может быть применена для решения задач коррекции несовместных СЛАУ. Ниже приведены формулировки таких задач для коррекции только левой части СЛАУ и обеих ее частей соответственно.

Задача 2. Для заданного вектора $x \in R^n$ найти матрицу $H \in R^{m\times n}$, обладающую минимальной $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ -нормой и такую, что система

$$(A + H)z = b, \tag{2.3}$$

дополненная условием (2.2), становится совместной, причем x принадлежит множеству неотрицательных решений скорректированной системы: $x \in \chi(A + H, b)$.

Задача 3. Для заданного вектора $x \in R^n$ найти матрицу $[H - h] \in R^{m\times n+1}$, где $H \in R^{m\times n}$, $h \in R^m$, обладающую минимальной $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ -нормой и такую, что система

$$(A+H)z = b+h, \tag{2.4}$$

дополненная условием (2.2), становится совместной, причем $x \in \chi(A+H, b+h)$.

Действительно, системы (2.3) и (2.4) при фиксированном векторе x можно переписать как $Hx = b - Ax$ и $\begin{bmatrix} h & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ x \end{bmatrix} = [b - A] \begin{bmatrix} l \\ x \end{bmatrix}$, соответственно. Тогда к ним применима теорема 1. Решение задается формулой

$$H = (b - Ax)y^T,$$

где $y \in R^n$ – вектор, двойственный к вектору $\begin{bmatrix} l \\ x \end{bmatrix} \in R^{n+1}$ относительно нормы $\|\cdot\|_\varphi$. При этом

$$\|H\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(b - Ax)}{\varphi\left(\begin{bmatrix} l \\ x \end{bmatrix}\right)}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим следующую задачу коррекции:

$$\mathcal{H}(A,b) : \|H\|_{\varphi,\psi} \to \min_{\chi(A+H,b-h)\neq\varnothing} \left(h^{\mathrm{o}}_{fix\{b\}} = \min_{(x,H)} \|H\|_{\varphi,\psi} \right). \tag{2.6}$$

В задаче (2.6) требуется найти минимальную расширенную матрицу коррекции $\begin{bmatrix} h & H \end{bmatrix}$, где вектор h является нулевым при $l = 0$.

Рассмотрим сначала матричную коррекцию по критериям, основанным на минимизации $\|\cdot\|_{1,\infty}$ и $\|\cdot\|_{1,1}$-норм.

Теорема 2. *Задача коррекции $\mathcal{H}(A,b)$ по минимаксному критерию (по минимуму $\|\cdot\|_{1,\infty}$ -нормы) эквивалентна задаче линейного программирования*

$$u \to \min_{u,z,y} \textit{ при условиях} \begin{cases} u \geqslant b_i y - a^i z, i = \overline{1,m}, \\ u \geqslant -b_i y + a^i z, i = \overline{1,m}, \\ ly + \sum_{j=1}^n z_j = 1, \\ y \geqslant 0, z \geqslant 0, u \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение скалярную величину $y = \frac{1}{l+\sum_{j=1}^n x_j}$ и вектор $z = xy$. Так как выполняются условия неотрицательности (2.2), то $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$. В соответствии с формулой (2.5) из задачи 3 и определением векторной нормы необходимо минимизировать величину $\frac{|b_i - a^i x|}{l+\sum_{j=1}^n x_j} = |b_i y - a^i z|$ для всех i. Значит, $|b_i y - a^i z| \leqslant u \Leftrightarrow -u \leqslant b_i y - a^i z \leqslant u$ и $u \to \min_{u,z,y}$, что приводит к первым ограничениям задачи (2.7). Кроме того,

$$ly + \sum_{j=1}^n z_j = ly + y \cdot \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{l + \sum_{j=1}^n x_j} \cdot \left(l + \sum_{j=1}^n x_j \right) = 1.$$

□

Пусть существует (u^0, z^0, y^0) – решение ЗЛП (2.7). Если указанное решение существует, то задача $\mathcal{H}(A, b)$ имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

$$h^0 = u^0, x^0 = \frac{z^0}{y^0}, h_{ij} = y^0(b_i - a^i x^0), i = \overline{1, m}, j = \overline{l, n}.$$

Сформулируем соответствующую теорему для $\|\cdot\|_{1,1}$ - нормы.

Теорема 3. *Задача коррекции $\mathcal{H}(A, b)$ по минимуму $\|\cdot\|_{1,1}$ -нормы эквивалентна задаче линейного программирования*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \to \min_{d,z,y} \text{ при условиях} \begin{cases} d_i \geqslant b_i y - a^i z, i = \overline{1, m}, \\ d_i \geqslant -b_i y + a^i z, i = \overline{1, m}, \\ ly + \sum_{j=1}^{n} z_j = 1, \\ y \geqslant 0, z \geqslant 0, d \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $l = \begin{cases} 0, & \text{если корректируется только левая часть}, \\ 1, & \text{если корректируются левая и правая части.} \end{cases}$

Доказательство. Используя формулу (2.5), в соответствии с определением векторной нормы, получаем, что необходимо минимизировать величину

$$\|H\|_{1,1} = \max_{l \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |h_{i,j}| = \frac{\sum_{i=1}^{m}(b_i - a^i x)}{l + \sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

Введем в рассмотрение скалярную величину $y = \frac{1}{l + \sum_{j=1}^{n} x_j}$ и вектор $z = xy$. Так как выполняются условия неотрицательности (2.2), то $y \geqslant 0$ и $z \geqslant 0$. Тогда $\frac{\sum_{i=1}^{m} |b_i - a^i x|}{l + \sum_{j=1}^{n} x_j} = \sum_{i=1}^{m} |b_i y - a^i z|$ для всех i. Ограничим значения модулей для каждого i числами d_i, из которых составим вектор $d \in R^m : |b_i y - a^i z| \leqslant d_i \Leftrightarrow -d_i \leqslant b_i y - a^i z \leqslant d_i$ и $\sum_{i=1}^{m} d_i \to \min_{d,z,y}$, что приводит к первым ограничениям задачи (2.8). Кроме того,

$$ly + \sum_{j=1}^{n} z_j = ly + y \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{l + \sum_{j=1}^{n} x_j} \cdot \left(l + \sum_{j=1}^{n} x_j \right) = 1.$$

□

Пусть существует (d^0, z^0, y^0) – решение ЗЛП (2.8). Если указанное решение существует, то задача $\mathcal{H}(A, b)$ имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

$$h^0 = \sum_{i=1}^{m} d_i^0, x^0 = \frac{z^0}{y^0}, H = (b - Ax^0)y^0, i = \overline{1, m}, j = \overline{l, n}.$$

Рассмотренная пара задач коррекции по минимуму $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$-нормы при $\varphi = 1$ отличается от второй пары задач с $\varphi = \infty$ тем, что требует решения только одной задачи линейного программирования. Как будет показано далее, для решения $\mathcal{H}(A, b)$ по минимуму $\|\cdot\|_{\infty,1}$ и $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$ -норм необходимо решить n или $n+1$ задачу линейного программирования.

Теорема 4. *Задача коррекции $\mathcal{H}(A,b)$ по минимуму $\|\cdot\|_{\infty,1}$ -нормы эквивалентна задаче математического программирования*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \to \min_{d,q,r} \textit{при условиях} \begin{cases} d_i \geqslant b_i r - a^i q, i = \overline{1,m}, \\ d_i \geqslant -b_i r + a^i q, i = \overline{1,m}, \\ 0 < q_j \leqslant 1, j = \overline{1,n}, \\ r \geqslant 0, q \geqslant 0, d \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Доказательство. Снова используем формулу (2.5) и определение векторной нормы. Получаем, что необходимо минимизировать величину

$$\|H\|_{\infty,1} = \sum_{j=l}^{n}\sum_{i=1}^{m} |h_{ij}| = \frac{\sum_{i=1}^{m} |b_i - a^i x|}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l; |x_j|\}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} |b_i - a^i x|}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l; x_j\}}.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия неотрицательности (2.2). Введем в рассмотрение скалярную величину $r = \frac{1}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}}$ и вектор $q = xr$. Заметим, что $q_j \in (0;1], j = \overline{1,n}$. Тогда $\frac{\sum_{i=1}^{m}(b_i - a^i x)}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}} = \sum_{i=1}^{m} |b_i r - a^i q|$ для всех i. Ограничим значения модулей для каждого i числами d_i, из которых составим вектор $d \in R^m : |b_i r - a^i q| \leqslant d_i \Longleftrightarrow -d_i \leqslant b_i r - a^i q \leqslant d_i$ и $\sum_{i=1}^{m} d_i \to \min_{d,q,r}$, что приводит к первым ограничениям задачи (2.9). □

Пусть существует (d^0, q^0, r^0) – решение ЗЛП (2.9). Если указанное решение существует, то задача $\mathcal{H}(A,b)$ имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

$$h^0 = \sum_{i=1}^{m} d_i^0, x^0 = \frac{q^0}{r^0}, H = (b - Ax^0)y^0, i = \overline{1,m}, j = \overline{l,n},$$

где y^0 – вектор, двойственный к вектору x^0 относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Учитывая условие (2.2), по формуле (1.5) получаем

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i < \max_{l\leqslant i\leqslant n} x_i, \\ \frac{1}{k \max_{l\leqslant i\leqslant n} x_i} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как заранее неизвестно, какая из компонент вектора x в оптимальном решении будет максимальной, то скаляр $r = \frac{1}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}}$ может принимать значение одной из n дробей $\frac{1}{x_j}, j = \overline{1,n}$ при коррекции только левой части системы (2.1) ($l = 0$) и одно из $n+1$ значений $\frac{1}{x_j}$ или 1 – при коррекции обеих частей системы ($l = 1$). При каждом r задача (2.9) является задачей линейного программирования. Поэтому для решения задачи $\mathcal{H}(A,b)$ необходимо решить последовательность n или $n+1$ задач линейного программирования.

Теорема 5. *Задача коррекции $\mathcal{H}(A,b)$ по минимуму $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$ -нормы эквивалентна задаче математического программирования*

$$u \to \min_{u,q,r} \textit{при условиях} \begin{cases} u \geqslant b_i r - a^i q, i = \overline{1,m}, \\ u \geqslant -b_i r + a^i q, i = \overline{1,m}, \\ 0 < q_j \leqslant 1, j = \overline{1,n}, \\ r \geqslant 0, q \geqslant 0, u \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Доказательство. Используем формулу (2.5) и определение векторной нормы. Получаем, что необходимо минимизировать величину

$$\|H\|_{\infty,\infty} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=l}^{n} |h_{ij}| = \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant m} |b_i - a^i x|}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l; |x_j|\}} = \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant m} |b_i - a^i x|}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l; x_j\}}.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия неотрицательности (2.2). Введем скаляр $r = \frac{1}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}}$ и вектор $q = xr$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Тогда $\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant m}|b_i-a^i x|}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |b_i r - a^i q|$ для всех i. Ограничим значения модулей числом $u : |b_i r - a^i q| \leqslant u \Leftrightarrow -u \leqslant b_i r - a^i q \leqslant u$ и $u \to \min_{u,q,r}$, что приводит к первым ограничениям задачи (2.10). □

Пусть существует (u^0, q^0, r^0) – решение ЗЛП (2.10). Если указанное решение существует, то задача $\mathcal{H}(A, b)$ имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

$$h^0 = u^0, x^0 = \frac{q^0}{r^0}, H = (b - Ax^0)y^0.$$

3. Коррекция несобственной ЗЛП по минимуму различных видов полиэдральных норм

Решим задачу максимизации целевой функции

$$c^T x \to \max,$$

допустимая область которой является пустой и формально задается несовместной системой (2.1) с условием (2.2). Проведем коррекцию исследуемой ЗЛП путем коррекции ее допустимой области.

Формализуем задачу коррекции путем введения для целевой функции порогового значения c_0, которое не подлежит коррекции: $c^T x \geqslant c_0$. При его недостижимости корректируется система ограничений. Получаем задачу $\mathcal{H}(A, b)$ с добавленным в нее условием $c^T x \geqslant c_0$. С учетом введенных в теоремах 3 и 4 величин $y = \frac{1}{l+\sum_{j=1}^{n} x_j}$, $z = xy$ или $r = \frac{1}{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{l;x_j\}}$, $q = xr$, данное условие преобразуется соответственно в (3.1) или (3.2):

$$c^T x \geqslant c_0 \Leftrightarrow \frac{c^T z}{y} - c_0 \geqslant 0 \Leftrightarrow c^T z - c_0 y \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j z_j - c_0 y \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$c^T x \geqslant c_0 \Leftrightarrow \frac{c^T q}{r} - c_0 \geqslant 0 \Leftrightarrow c^T q - c_0 r \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j q_j - c_0 r \geqslant 0. \tag{3.2}$$

В зависимости от вида полиэдральной нормы, исходная задача будет эквивалентна одной из задач математического программирования (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), но с добавленным в систему ее ограничений условием (3.1) или (3.2).

Применение коррекции ЗЛП по минимуму полиэдральных норм получает следующую практическую интерпретацию. Пусть, например, ЗЛП является моделью задачи планирования производства. Тогда a_{ij} – затраты j-того ресурса на производство i-того вида продукции. Использование $\|\cdot\|_{1,\infty}$-нормы соответствует коррекции с минимальным наибольшим изменением затрат, $\|\cdot\|_{1,1}$ или $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$-нормы – коррекции с минимальным суммарным изменением затрат по каждому виду ресурса или виду продукции соответственно, а $\|\cdot\|_{\infty,1}$-нормы – коррекции с минимальной суммой изменений всех параметров.

4. Программная реализация методов коррекции несобственных задач по минимуму различных видов полиэдральных норм

Рассмотрим, каким образом можно реализовать процесс решения задач коррекции в математической среде *MatLab*. Как было показано ранее, решаемые задачи сводятся либо к ЗЛП, либо к их последовательности, поэтому основной будет функция *linprog*, которая находит решение ЗЛП, допустимая область которой описывается системами линейных алгебраических уравнений и неравенств. Функция воспринимает параметры, заданные в матричной форме: коэффициенты целевой функции, матрицы левых частей и векторы правых частей ограничений типа равенств и неравенств, ограничения на значения вектора решений слева и справа (что позволяет удобным способом учесть условие неотрицательности).

При нахождении матрицы коррекции требуется вычисление двойственного вектора. Для этого создана отдельная функция $|y,q| = dy(x,p)$, принимающая в качестве аргументов вектор x и показатель гельдеровой нормы p и возвращающий вектор y и показатель q, двойственные по отношению к норме с показателем p.

Также для каждого вида полиэдральной нормы созданы соответствующие программы коррекции СЛАУ, СЛАН и ЗЛП (в стандартной и канонической формах). Входными параметрами являются матрицы коэффициентов ограничений, векторы правых частей и параметр, в зависимости от которого корректируются либо обе части системы ограничений, либо только левая часть (а также вектор коэффициентов целевой функции и пороговое значение для коррекции ЗЛП). Выходными параметрами являются матрица коррекции, оптимальное значение соответствующего критерия, коэффициенты скорректированной системы и ее решение. Посредством этих программ решим следующую задачу.

Пример 1. Скорректировать СЛАУ (корректироваться могут обе части системы):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & -2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Приведем решения задачи коррекции для различных полиэдральных критериев в Таб. 1.

Таблица 1: Решения задачи коррекции для различных полиэдральных критериев

φ, ψ-норма	H	h	χ	h^0
$\|\cdot\|_{1,\infty}$	$\begin{pmatrix} 0,3519 & 0,3519 & 0,3519 \\ -0,5648 & -0,5648 & -0,5648 \\ -0,5648 & -0,5648 & -0,5648 \\ -0,5648 & -0,5648 & -0,5648 \\ -0,5648 & -0,5648 & -0,5648 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3519 \\ -0,5648 \\ -0,5648 \\ -0,5648 \\ -0,5648 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3333 \\ 0,4706 \\ 1,4314 \end{pmatrix}$	$0,5648$
$\|\cdot\|_{1,1}$	$\begin{pmatrix} 0,6667 & 0,6667 & 0,6667 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6667 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$1,6667$
$\|\cdot\|_{\infty,1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix}$	5
$\|\cdot\|_{\infty,\infty}$	$\begin{pmatrix} 0,4000 & 0 & 0 \\ -1,5250 & 0 & 0 \\ 1,5250 & 0 & 0 \\ -1,5250 & 0 & 0 \\ -1,525 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,0168 \\ 0,4706 \\ 0,7479 \end{pmatrix}$	$1,5250$

При использовании в качестве критерия оптимальности наиболее распространенного квадратичного критерия, заключающегося в минимизации суммы квадратов изменений всех элементов системы, получим следующие результаты:
$h^0 = 19229$,

$$x = \begin{pmatrix} 1,3069 \\ 0,5565 \\ 1,0743 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0,5145 & 0,2191 & 0,4229 \\ -0,2605 & -0,1109 & -0,2141 \\ -0,1217 & -0,0518 & -0,1000 \\ -0,9006 & -0,3835 & -0,7403 \\ -0,5961 & -0,2538 & -0,4900 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 0,3937 \\ -0,1993 \\ -0,0931 \\ -0,6891 \\ -0,4561 \end{pmatrix}.$$

При решении использовалась программа, в основе которой лежат алгоритмы, описанные в монографии [4].

Как показывает проверка, во всех случаях скорректированные таким образом системы совместны. Анализируя результаты, можно заметить, что в четырех случаях в оптимальном решении для компонент вектора x выполняется соотношение $x_2 < x_3 < x_1$. Более того, для $\|\cdot\|_{1,\infty}$ и $\|\cdot\|_{1,\infty}$-норм решения скорректированных задач представляют собой одну и ту же точку. При сравнении решений со случаем квадратичного критерия видно, что в трех случаях полиэдральных норм значения критерия меньше, чем при использовании евклидовой нормы. Но судить по этому показателю о целесообразности применения именно полиэдральных критериев нельзя, так как каждый из них несет свою смысловую нагрузку. Применение того или иного вида нормы зависит как от конкретной прикладной задачи, моделью которой является рассматриваемая линейная система или ЗЛП, так и от приоритетов лица, принимающего решение (ЛПР).

Если приоритетным считать количество нулевых компонент в матрице коррекции, то для данного примера наиболее предпочтительно выглядит коррекция по минимуму $\|\cdot\|_{\infty,1}$-нормы, то есть суммы всех элементов матрицы H, несмотря на то, что значение критерия оказывается наибольшим среди исследуемых.

Список литературы

[1] Ватолин А.А. Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, №12. С. 1907–1908.

[2] Горелик В.А. Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, №11. С. 1697–1705.

[3] Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2005. Т. 12, №2. С. 3–22.

[4] Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006. 150 с.

[5] Ибатуллин Р.Р. Методы коррекции и аппроксимации несобственных задач оптимизации и управления с минимаксным критерием: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2002.

Библиографическая ссылка

Баркалова О.С. Коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования по минимуму различных видов полиэдральных норм // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 121–133.

Сведения об авторах

1. **Баркалова Оксана Сергеевна**
ассистент кафедры теоретической информатики и дискретной математики Московского педагогического государственного университета.

Россия, 119991, г. Москва, ул. Малая Пироговская, 1, МПГУ.
E-mail: asenka.pavlova@yandex.ru.

ADJUSTMENT OF INCOMPATIBLE SYSTEMS OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS AND ILL-POSED LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS BY THE MINIMUM OF VARIOUS KINDS OF POLYHEDRAL NORMS

Barkalova Oksana Sergeevna
Assistant of the Department of Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics, Moscow Pedagogical State university.
Russia, 119991, Moscow, 1 Malaya Pirogovskaya str., MPSU.
E-mail: asenka.pavlova@yandex.ru

Received 13.07.2012, revised 25.01.2014.

Correction of incompatible systems of the linear algebraic equations with the criteria of correction based on four chances of polyhedral norms, and corresponding linear programming problems is considered. The approach consisting in reduction of these problems, depending on norm, or to a linear programming problem, or to sequence such problem is offered. The given methods receive program realization by means of mathematical program *MatLab*.

Keywords: inconsistent system of linear algebraic equations, an ill-posed linear programming problem, matrix correction, polyhedral norm, minimax criterion.

Bibliographic citation

Barkalova O.S. Adjustment of incompatible systems of the linear algebraic equations and ill-posed linear programming problems by the minimum of various kinds of polyhedral norms. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 121–133. (in Russian)