

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ПСЕВДОХАРАКТЕРИСТИК

Нурбаев У.Д.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

---

*Поступила в редакцию 03.04.2014, после переработки 24.04.2014.*

---

В статье исследуется устойчивость численного метода псевдохарактеристик в цилиндрических координатах. Получены соотношения шагов между пространственными переменными, при которых выполняется условие устойчивости Неймана. Также получено, что метод псевдохарактеристик остается устойчивым, если координата точки по оси  $r$  близка к нулю.

**Ключевые слова:** метод псевдохарактеристик, устойчивость.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 17–24.*

### Введение

В [1] был предложен метод псевдохарактеристик для расчета пространственных сверхзвуковых течений газа. Метод имеет второй порядок аппроксимации. Практическое применение метода показало его высокую точность и быстродействие.

Ранее устойчивость метода псевдохарактеристик в декартовой системе координат была исследована в [2]. В данной статье исследуется устойчивость метода псевдохарактеристик в применяемой в [1] цилиндрической системе координат и исследуется влияние положения рассчитываемой точки на устойчивость метода.

### 1. Дифференциальные уравнения и линеаризация

Рассмотрим сверхзвуковое стационарное изоэнергетическое течение идеального газа в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$ . Уравнения, описывающие такое течение, запишем в следующем виде

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{2} M_\infty^2 + \frac{k}{k-1}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность газа,  $\vec{V} = (u, v, w)'$  — скорость (верхний индекс штрих - знак транспонирования),  $p$  — давление газа,  $k$  — показатель адиабаты,  $M_\infty$  — число Маха набегающего потока и  $\nabla$  — оператор Гамильтона. Все величины взяты в безразмерном виде и отнесены к параметрам в набегающем потоке.

Систему (1) можно представить в следующем матричном виде

$$A\vec{U}_x + B\vec{U}_r + C\vec{U}_\varphi = \vec{f}, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{uv}{a^2} & -\frac{uw}{a^2} & 0 \\ \rho u & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} & -\frac{vw}{a^2} & 0 \\ \rho v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{uw}{a^2} & -\frac{vw}{a^2} & (1 - \frac{w^2}{a^2}) & 0 \\ \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{f} = \frac{1}{r}(-v, 0, \rho w^2, -v\rho w)'$ ,  $a^2 = k \frac{p}{\rho}$  – местная скорость звука,  $\vec{U} = (u, v, w, p)'$  – вектор искомых переменных,  $\vec{U}_x, \vec{U}_r, \vec{U}_\varphi$  – частные производные по соответствующей координате. Система (2) является замкнутой и состоит из четырех уравнений относительно четырех искомых функций.

Для исследования устойчивости положим  $\vec{f} = 0$ . Линеаризуем систему (2) вдоль маршевой переменной  $x$ :

$$\vec{V} = V_0 \vec{e}_x + \vec{V}_m, p = p_0 + p_m, \quad (3)$$

где  $V_0 \gg |\vec{V}_m| = \sqrt{u_m^2 + v_m^2 + w_m^2}$ ,  $p_0 \gg p_m$ ,  $V_0 = const$ ,  $p_0 = const$ ,  $\vec{V}_m$  и  $p_m$  – новые искомые функции.

В линеаризованной задаче пренебрежем квадратичными членами искомых функций, то есть будем считать, что при подстановке (3) в (2) такие слагаемые равны нулю. Также будем считать, что слагаемые, состоящие из произведения искомых функций и их производных вдоль осей координат, равны нулю. Таким образом, окончательная линеаризованная система дифференциальных уравнений примет вид:

$$A_l \vec{U}_{m,x} + B_l \vec{U}_{m,r} + C_l \vec{U}_{m,\varphi} = 0, \quad (4)$$

где

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 - \frac{V_0^2}{a_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_0 V_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho_0 V_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 V_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_l = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_0 = k \frac{p_0}{a_0^2} \text{ и } a_0^2 = k \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right) - \frac{k-1}{2} V_0^2.$$

## 2. Метод псевдохарактеристик

Для численного решения системы (4) введем сетку в области течения газа. Все дальнейшие определения и обозначения взяты из [1]. Расчетная сетка  $\Omega$  представляет собой пересечение меридиональных плоскостей  $\varphi = \varphi_i$  и равноудаленных

непересекающихся между собой венков  $r_j = r_j(x_s, \varphi)$ . Пусть  $x_s = sh_x$ ,  $r_j = jh_r$  и  $\varphi = ih_\varphi$ , где  $h_x, h_r, h_\varphi$  – шаги сетки и  $s, i, j$  – целые числа.

Рассмотрим шаблон для расчета искомых газодинамических функций, состоящей из трех точек 1-2-3 (см. Рис. 1) и введем новый базис из тройки единичных свободных векторов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  по следующим формулам:  $\vec{e}_1 = (\vec{e}_x + r_x \vec{e}_r)\tau$ ,  $\vec{e}_2 = (\vec{e}_x - r_x \vec{e}_r)\tau$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$ , где  $\tau = \frac{1}{\sqrt{1+r_x^2}}$ ,  $r_3 = r_1 + h_r = r_2 - h_r$  и  $r_x = \frac{r_3 - r_1}{h_x}$ .

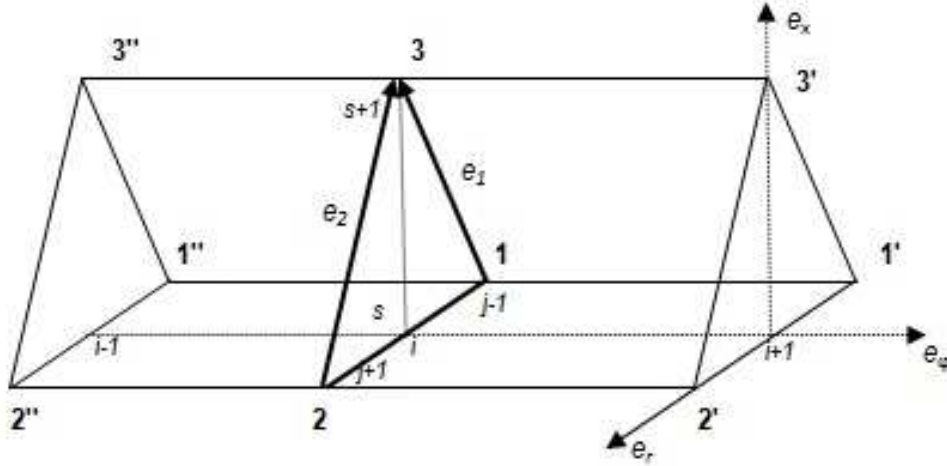


Рис. 1: Шаблон для расчета точки методом псевдохарактеристик

Запишем систему (4) в новом базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\frac{1}{2\tau} \left( A_l + \frac{B_l}{r_x} \right) \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_1} + \frac{1}{2\tau} \left( A_l - \frac{B_l}{r_x} \right) \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_2} + C_l \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_3} = 0, \quad (5)$$

где  $dq_n$  – длина дуги линии, к которой вектор  $\vec{e}_n$  является касательным ( $n = 1, 2, 3$ ).

В методе псевдохарактеристик интегрирование ведется вдоль двух расчетных поверхностей, являющихся боковыми гранями расчетного шаблона. Боковую поверхность, содержащую линию 1-3, мы будем называть псевдохарактеристической поверхностью первого рода, а боковую поверхность, содержащую линию 2-3 – второго рода. Псевдохарактеристические поверхности, вообще говоря, не совпадают с характеристическими поверхностями. Однако уравнения, записанные на псевдохарактеристических поверхностях, как и условия совместности в методе характеристик, содержат касательные производные к псевдохарактеристическим поверхностям и не содержат выводящих производных с псевдохарактеристических поверхностей. Векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_3$  являются касательными к псевдохарактеристической поверхности первого рода, а векторы  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  – к псевдохарактеристической поверхности второго рода.

Рассматривая производные вдоль направления  $\vec{e}_2$  в качестве *новой* искомой функции  $\frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_2} = \vec{R}$ , перепишем систему (5) в псевдохарактеристическом виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\tau}(A_l + \frac{B_l}{r_x})\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(A_l - \frac{B_l}{r_x})\vec{R} + C_l\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_3} = 0, \\ \frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_2} - \vec{R} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) представляет собой 8 уравнений относительно 8-ми неизвестных  $(\vec{U}_m, \vec{R})$ . В работе [1] показано, что функция  $\vec{U}_m$ , являющаяся решением системы (6), также является решением исходной системы (5). На расчетном шаблоне производные вдоль каждого направления  $\vec{e}_n$  будем аппроксимировать с помощью центральных разностей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_1} &\approx \frac{1}{\tau}\frac{U_3 - U_1}{h_x\sqrt{1+r_x^2}} = \frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij-1}^s}{h_x}, \\ \frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_2} &\approx \frac{1}{\tau}\frac{U_3 - U_2}{h_x\sqrt{1+r_x^2}} = \frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij+1}^s}{h_x}, \\ \frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial q_3} &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1j}^{s+1} - U_{i-1j}^{s+1}}{2h_\varphi} + \frac{U_{i+1j-1}^s - U_{i-1j-1}^s}{2h_\varphi}\right). \end{aligned}$$

Тогда разностная схема, аппроксимирующая уравнения на расчетных поверхностях со вторым порядком точности, примет вид:

$$\begin{cases} (A_l + \frac{B_l}{r_x})\frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij-1}^s}{h_x} + (A_l - \frac{B_l}{r_x})\frac{R_{ij}^{s+1} + R_{ij-1}^s}{2} + \\ \quad + \frac{C_{l,3} + C_{l,1}}{2}\left(\frac{U_{i+1j}^{s+1} - U_{i-1j}^{s+1}}{2h_\varphi} + \frac{U_{i+1j-1}^s - U_{i-1j-1}^s}{2h_\varphi}\right) = 0, \\ \frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij+1}^s}{h_x} - \frac{R_{ij}^{s+1} + R_{ij+1}^s}{2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

### 3. Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости представим искомые функции в виде рядов Фурье  $U_{ij}^s = \sum \sum U^s e^{i_1 j \zeta} e^{i_1 i \eta}$  и  $R_{ij}^s = \sum \sum R^s e^{i_1 j \zeta} e^{i_1 i \eta}$ , где  $R^s, U^s$  – коэффициенты Фурье,  $i = k_r h_r$ ,  $j = k_\varphi h_\varphi$ ,  $k_r$  и  $k_\varphi$  – целые волновые числа и  $i_1$  – мнимая единица.

Подставляя разложение в ряд Фурье в (7) и приводя подобные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (A_l + \frac{B_l}{r_x})\frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij}^s e^{-i_1 \zeta}}{h_x} + (A_l - \frac{B_l}{r_x})\frac{R_{ij}^{s+1} + R_{ij}^s e^{-i_1 \zeta}}{2} + \\ \quad + \frac{i_1 \sin \eta}{h_\varphi} \frac{C_{l,3} + C_{l,1}}{2}(U_{ij}^{s+1} + U_{ij}^s e^{-i_1 \zeta}) = 0, \\ \frac{U_{ij}^{s+1} - U_{ij}^s e^{+i_1 \zeta}}{h_x} - \frac{R_{ij}^{s+1} + R_{ij}^s e^{+i_1 \zeta}}{2} = 0. \end{cases}$$

Система уравнений перехода со слоя на слой для объединенного восьмимерного вектор-столбца коэффициентов Фурье  $(U^s, R^s)$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{s+1} \\ R^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_5 & D_6 \\ D_7 & D_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^s \\ R^s \end{pmatrix},$$

где  $D_1 = (A_l + \frac{B_l}{r_x})\frac{1}{h_x} + \frac{i_1 \sin \eta}{h_\varphi} \frac{C_{l,3} + C_{l,1}}{2}$ ,  $D_2 = \frac{1}{2}(A_l - \frac{B_l}{r_x})$ ,  $D_3 = \frac{E_4}{h_x}$ ,  $D_4 = -\frac{E_4}{2}$ ,  $D_5 = ((A_l + \frac{B_l}{r_x})\frac{1}{h_x} - \frac{i_1 \sin \eta}{h_\varphi} \frac{C_{l,3} + C_{l,1}}{2})e^{-i_1 \zeta}$ ,  $D_6 = -D_2 e^{-i_1 \zeta}$ ,  $D_7 = D_3 e^{+i_1 \zeta}$ ,  $D_8 = -D_4 e^{+i_1 \zeta}$  и  $E_4$  – единичная матрица размера  $4 \times 4$ .

Условием устойчивости Неймана для метода псевдохарактеристик является следующее неравенство [3]

$$|\lambda| \leq 1 + O(h_x), \quad (8)$$

где  $\lambda$  – собственное число матрицы перехода со слоя на слой.

Собственные числа матрицы перехода определяются из следующего уравнения восьмой степени относительно  $\lambda$  :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda D_1 - D_5 & \lambda D_2 - D_6 \\ \lambda D_3 - D_7 & \lambda D_4 - D_8 \end{pmatrix} = 0, \\ (b_3 b_4 - b_1 b_5)^2 ((b_3 b_4 + b_1 b_5)^2 + a_{11} r_x^2 (b_3 b_4 - b_1 b_5)^2 + (b_5 b_2 r_x)^2) = 0,$$

где  $a_{11} = 1 - \frac{V_0^2}{a_0^2}$ ,  $b_1 = \frac{\lambda - e^{-i_1 \zeta}}{h_x}$ ,  $b_2 = \frac{i_1 \sin \eta}{2h_\varphi} (\lambda + e^{-i_1 \zeta}) (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3})$ ,  $b_3 = \frac{\lambda + e^{-i_1 \zeta}}{2}$ ,  $b_4 = \frac{\lambda - e^{+i_1 \zeta}}{h_x}$ ,  $b_5 = -\frac{\lambda + e^{i_1 \zeta}}{2}$ ,  $r_1$  и  $r_3$  – координаты точек 1 и 3 расчетного шаблона соответственно.

Рассмотрим первую скобку – уравнение четвертой степени относительно  $\lambda$ . Подставляя выражения и приводя подобные, получим:

$$(\lambda^2 + \lambda(e^{-i_1 \zeta} - e^{i_1 \zeta}) - 1 + \lambda^2 + \lambda(e^{i_1 \zeta} - e^{-i_1 \zeta}) - 1)^2 = 0, \\ (\lambda^2 - 1)^2 = 0, \\ |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

Первые четыре собственных числа имеют модуль равный единице. Рассмотрим вторую скобку в выражении для определителя и, приводя подобные, получим

$$q_4 \lambda^4 + q_3 \lambda^3 + q_2 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_0 = 0, \quad (9)$$

где  $q_4 = q_0 = \frac{a_{11} r_x^2}{h_x^2} - \frac{r_x^2 \sin^2 \eta}{16h_\varphi^2} (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3})^2$ ,  $q_3 = q_1 = -\frac{r_x^2 \sin^2 \eta}{4h_\varphi^2} (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3})^2 \cos \zeta$  и  $q_2 = -\frac{2a_{11} r_x^2}{h_x^2} - \frac{4 \sin^2 \zeta}{h_x^2} - \frac{r_x^2 \sin^2 \eta}{16h_\varphi^2} (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3})^2 (4 \cos^2 \zeta + 2)$ .

Уравнение (9) является уравнением четвертой степени относительно  $\lambda$ . Решая данное уравнение с помощью замены  $y = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ , получим

$$\lambda_{5,6} = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4}}{2}, \\ \lambda_{7,8} = \frac{y_2 \pm \sqrt{y_2^2 - 4}}{2},$$

где  $y_1 = \frac{-\frac{q_3}{q_4} + \sqrt{(\frac{q_3}{q_4})^2 - 4(\frac{q_2}{q_4} - 2)}}{2}$  и  $y_2 = \frac{-\frac{q_3}{q_4} - \sqrt{(\frac{q_3}{q_4})^2 - 4(\frac{q_2}{q_4} - 2)}}{2}$ .

Определим соотношения между параметрами течения, при которых выполняется условие устойчивости Неймана (8). Для удобства введем следующие коэффициенты  $k_1 > 0$  и  $k_2 > 0$ , связывающие шаги по пространственным переменным между собой:

$$h_r = k_1 h_\varphi, \\ h_x = k_2 h_r.$$

Рассмотрим течение газа в сверхзвуковой области, то есть такой, что в любой точке области выполняется неравенство  $\frac{|V^2|}{a^2} \approx \frac{V_0^2}{a_0^2} = M_{loc}^2 > 1$ , где  $M_{loc}$  – локальное число Маха.

Численное решение уравнения (9) позволило сделать следующие выводы относительно устойчивости метода псевдохарактеристик:

1. Метод псевдохарактеристик устойчив при выполнении определенных ограничений на коэффициент  $k_2$ , при этом на коэффициент  $k_1$  ограничений нет.
2. Область устойчивости метода псевдохарактеристик (иначе говоря, значения коэффициента  $k_2$ ) не зависит от числа Маха набегающего потока  $M_\infty$ , а определяется локальным числом Маха  $M_{loc}$  в каждой точке области течения газа. Более того, чем больше локальное число Маха, тем больше коэффициент  $k_2$ . Следовательно, при расчете искомых величин в точке, лежащей близко к звуковой линии ( $M_{loc} = 1$ ), необходимо мельчить шаги, в то время как при расчете искомых величин в сверхзвуковой области ( $M_{loc} > 1$ ) можно увеличивать шаги. Таким образом, в методе псевдохарактеристик соотношение шагов по пространственным переменным может меняться при расчете течения, при этом не нарушая устойчивости.
3. Метод псевдохарактеристик остается устойчивым, когда координата рассчитываемой точки по оси  $r$  близка к нулю.

Введем максимальный коэффициент  $k_{2,max}$ , при котором метод псевдохарактеристик все еще является устойчивым. Тогда условие устойчивости Неймана для метода псевдохарактеристик выглядит следующим образом

$$k_2 \leq k_{2,max}(M_{loc}^2). \quad (10)$$

Графически это означает, что область устойчивости метода псевдохарактеристик находится под графиком  $k_2 = k_{2,max}(M_{loc}^2)$ . Ниже, на Рис. 2, показан график  $k_{2,max}(M_{loc}^2)$  при  $O(h_x) = 0,05$ .

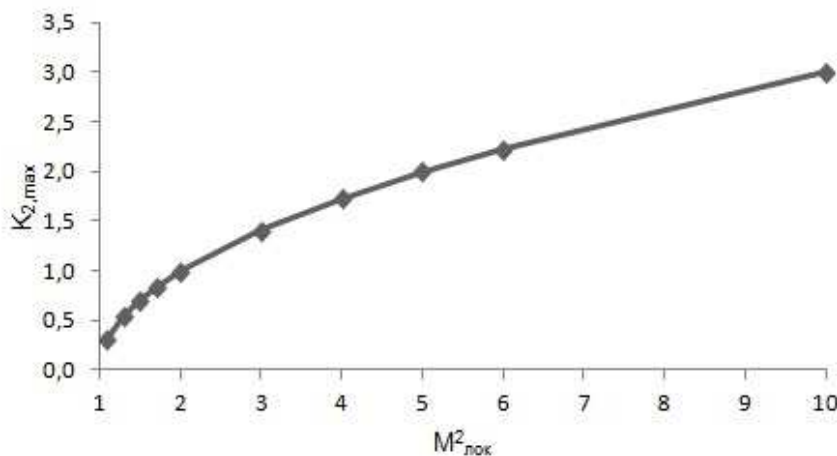


Рис. 2: Зависимость коэффициента  $k_{2,max}$  от  $M_{лок}^2$

## Заключение

В статье исследована устойчивость численного метода псевдохарактеристик при расчете пространственного сверхзвукового течения газа в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$ . Условием устойчивости Неймана для метода псевдохарактеристик является определенное соотношение между шагами  $h_x$  и  $h_r$ , при этом ограничений на шаг  $h_\varphi$  нет. Соотношение между шагами  $h_x$  и  $h_r$  определяется локальным числом Маха и позволяет адаптировать шаги сетки к характеру течения газа в рассматриваемой области. Метод псевдохарактеристик является устойчивым и в тех случаях, когда координата рассчитываемой точки по оси  $r$  близка к нулю.

## Список литературы

- [1] Михайлов И.Е., Нурбаев У.Д. Метод псевдохарактеристик для расчета стационарных пространственных сверхзвуковых течений газа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 19–28.
- [2] Куриленко Ю.В. Об устойчивости численного метода псевдохарактеристик для пространственных стационарных сверхзвуковых течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 10. С. 1774–1779.
- [3] Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. Учеб. пособие. 2-е изд., исправл. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

## Библиографическая ссылка

Нурбаев У.Д. Об устойчивости метода псевдохарактеристик // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 17–24.

## Сведения об авторах

### 1. Нурбаев Улукбек Джаныбекович

аспирант учреждения Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.

*Россия, 119311, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН.*

*E-mail: ulukbek.nurbaev@gmail.com.*

## ON STABILITY OF PSEUDOCHARACTERISTICS METHOD

**Nurbaev Ulukbek**

Postgraduate student of Dorodnicyn Computing Centre  
of Russian Academy of Sciences

*Russia, 119333, Moscow, 40 Vavilova str. E-mail: ulukbek.nurbaev@gmail.com.*

---

*Received 03.04.2014, revised 24.04.2014.*

---

In this paper we investigate stability of numerical pseudocharacteristics method in cylindrical system. Limitations on steps of three axis and Neumann stability condition are obtained. The method of pseudocharacteristics is also stable when r-axis coordinate of calculated point is close to zero.

**Keywords:** method of pseudocharacteristics, stability.

### **Bibliographic citation**

Nurbaev U.D. On stability of pseudocharacteristics method. *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 17–24. (in Russian)