УДК 519.854.2

РАСПИСАНИЕ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ТРАФИКЕ

Дадеркин Д.О., Горячев Д.Д.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 09.06.2014, после переработки 18.06.2014.

В работе рассматривается задача составления расписания обслуживания требований, описываемых циклическим трафиком, параллельными приборами с ограничениями по времени работы этих приборов. На практике очень важно оперативно составлять расписания, например, для современных call-центров с большим количеством сотрудников, имеющих различные типы смен. Предлагаемый алгоритм позволяет оперативно составлять расписания, учитывающие ограничения как на входящий трафик, так и на типы смен сотрудников.

Ключевые слова: теория расписаний, составление расписания обслуживания требований, параллельные приборы, трафик, слабо подобная трафику нагрузка, call-центр.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 107–121.

1. Введение

Рассматривается задача составления расписания обслуживания параллельными приборами требований, описываемых циклическим трафиком. На множестве приборов введены ограничения, связанные с временем использования этих приборов.

Задачи календарного планирования для параллельных приборов с последовательным временем вступления в работу используются при оперативном планировании в различных видах промышленности [1].

Задано множество требований $N = \{1, \ldots, n\}$ и множество обслуживающих эти требования приборов $M = \{1, \ldots, m\}$. Система обслуживания требований предполагается одностадийной [2].

Введем необходимые понятия. Задан целочисленный временной интервал P обслуживания требований приборами. Под дискретом d будем понимать единицу этого интервала: $P = d{*}k$ для некоторого натурального k. Пронумеруем входящие в P моменты времени, кратные $d : d_1, \ldots, d_k$. Будем говорить, что в период P задан трафик $TR = \{tr_1, \ldots, tr_k\}$, если $P = d * k$ для некоторого k, и tr_i – количество требований, поступивших на обслуживание в дискрет $d_i, i = 1, \ldots, k$.

Каждый прибор обслуживает не более одного требования, и каждое требование обслуживается не более чем одним прибором.

Каждый прибор начинает и завершает обслуживание любого требования в течение одного дискрета.

Каждый прибор в каждый дискрет может находиться в одном из нескольких состояний: занят, свободен, недоступен. Скажем, что в дискрет d прибор m занят ($st(m, d) = bu$), если он обслуживает требование, прибор m свободен ($st(m, d) = fr$), если он не обслуживает требование и не находится в состоянии недоступен.

Прибор недоступен ($st(m, d) = na$), если для этого прибора $d \in \{H, L, b\}$.

Очередное поступившее требование может быть обслужено, если найдется прибор $m \in M$: $st(m, d) = fr$.

Назовем одной сменой работы прибора время его работы в течение календарного дня. Это время определяется типом смены (контрактом) t, задаваемым для каждого прибора: $t = \{W \times H, V, L, b\}$, где W – количество дней непрерывной работы прибора, H – количество дней непрерывного простоя прибора, следующих сразу после W, V – количество дискретов времени работы прибора в каждый из дней из W, L – количество идущих подряд в смене дискретов для наладки прибора, b – количество не следующих подряд простоев в смене длительностью один дискрет, при $b = 0$ простоев не задано. $W \times H$ назовем форматом смены. Смена для прибора – календарный день из W, удовлетворяющий ограничениям V, L и b. Длина смены прибора – количество дискретов, в течение которых прибор находится в состоянии bu.

Будем рассматривать следующие форматы смен: смены с фиксированными выходными 5×2. Здесь $W = 5$, $H = 2$, причем, $H = 1$ – это календарная суббота, $H = 2$ - воскресение. Смены со смещающимися выходными – смены формата 2×2, 3×2, 3×3 и т.д. Смены с плавающими выходными – смены формата 5×2, 4×3 и т.д. Каждую неделю могут задаваться дни, когда прибор находится в непрерывном простое. Дни простоя могут идти подряд или быть определены в разные, не подряд идущие, дни недели.

Пронумеруем все поступающие на обслуживание в дискрет d_i требования различными натуральными числами $u = 1, \dots, tr_i$. Тогда i_u – номер требования, если существует такое i, что требование j_{i_u} поступило на обслуживание в дискрет d_i и $i_u <= tr_i$. Ясно, что если $tr_i = 0$, то в дискрет d_i требований на обслуживание не поступает.

Пусть задан трафик $TR = \{tr_1, \dots, tr_k\}$. Прибор $m_r : st(m_r, d_i) = fr, r = 1, \dots, m$ в некоторый дискрет d_i , получив требование j_{i_u} , переходит в состояние bu , начинает работать и работает в течение $d_i, d_{i+1}, \dots, d_{i+s}$ для некоторого s. В этот период он обслужит требования j_{i_u} , j_{i+1_u} , $\dots$, j_{i+s_u}, здесь $(i + g)_u <= tr_{i+g}, g = 0, \dots, s$. Длительность работы m_r определяется типом смены (m_r) и заданным трафиком TR. После обработки очередного требования m_r переходит в состояние fr, если иное не предусмотрено его типом смены.

Следуя [2], будем говорить об одностадийной задаче с параллельными приборами с директивными сроками и ограничениями на состояния приборов.

Сложность изучаемой модели не позволяет найти оптимальное решение [3], поэтому авторами разработан эвристический алгоритм, позволяющий получить решения, удовлетворяющие вводимым критериям.

Поскольку все требования из TR должны быть обслужены, то потребуется соответствующее количество приборов, поэтому приборы можно рассматривать как ресурсы, необходимые для выполнения требований из TR.

2. Базовые понятия и обозначения

Определение 1. *Назовем расписанием календарного дня* dt *множество* $R_{dt} = \{a : a =< d_i^r, m_r >\}$, $m_r \in M$, d_i^r *такое, что* $tr_i \in TR$ *и* d_i^r *- первый дискрет из смены прибора* m_r *для календарного дня* $dt, i = 1, \dots, n$. *Скажем, что* R *- расписание, если* $R = \bigcup_{dt}^{PR} R_{dt}$, *где* PR *– глубина планирования расписания в выбранных единицах времени.*

Рассмотрим задачу составления расписания, обеспечивающего обслуживание требований из TR минимально необходимым количеством приборов.

Поскольку при составлении такого расписания имеется неограниченное количество приборов, то такую задачу назовем задачей составления расписания в условиях неограниченных ресурсов.

Зафиксируем некоторое расписание R, соответствующее трафику $TR = \{tr_1, \dots, tr_k\}$.

Определение 2. *Пусть* $M(d_i)$ *– множество приборов, обслуживающих в дискрет* d_i h_i *требований:* $M(d_i) = m_r \in M : st(m_r, d_i) = bu, r = 1, \dots, h_i, i = 1, \dots, k$. *Назовем* $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ *нагрузкой, а мощность множества* $|M(d_i)| = \gamma$ *– максимальным уровнем нагрузки в дискрет* d_i. *Иногда будем обозначать* $H = H(M)$, *чтобы подчеркнуть, что нагрузка* H *создается при работе приборов из* M.

Определение 3. *Расписание* R *покрывает трафик, если при обслуживании требований по этому расписанию* $h_i \geq tr_i, i = 1, \dots, k$. *Скажем, что трафик* TR *меньше (больше) нагрузки* H *(обозначим* $TR < H$ $(TR > H)$ *), если* $tr_i < h_i$ $(tr_i > h_i), i = 1, \dots, k$.

Определение 4. *Будем говорить, что нагрузка* $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ *подобна трафику* $TR = \{tr_1, \dots, tr_k\}$ *с коэффициентом подобия* b *(*$H \sim_b TR$*), если* $h_i = [b{*}tr_i], i = 1, \dots, k$, b *– рациональное число из диапазона* $(0, 1]$, $[x]$ *– целая часть* x.

Пусть T – множество всех смен приборов, MT – множество приборов с соответствующими им типами смен: $MT = \{(m_1, t_{m_1}), \dots, (m_n, t_{m_n})\}, m_i \in M, t_{m_i} \in T, i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим задачу построения расписания

$$\sum_{i=1}^{k}(tr_i - h_i) \rightarrow min, \tag{1}$$

$$H \sim_b TR. \tag{2}$$

Здесь $tr_i \in TR, h_i \in H, i = 1, \dots, k$.

Определение 5. *Если для каждого расписания* R *существует такое* $i^R : h_{i^R} < tr_{i^R}$, *то будем говорить, что ресурсы ограничены, и будем рассматривать задачу составления расписания в условиях ограниченных ресурсов.*

Определение 6. *Отрезок* $[a_n; b_n] = \{i : a_n \leq i \leq b_n h_i \in H\}, 1 \leq n \leq k$.

Определение 7. *Нагрузка $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ слабо подобна трафику $TR = \{tr_1, \ldots, tr_k\}$ с вектором подобия C ($H \approx_C TR$), если существует такой вектор коэффициентов подобия $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$, что $g_i \leq [c_i * h_i], i = 1, \ldots, k,\ c_i \in (0, 1]$, и при этом для любого отрезка $[a_n; b_n]$, $1 \leq n \leq k$, если существует такое $j \in [a_n; b_n]$, что для любых $l \in [a_n; b_n], l \neq j$, из $tr_j \neq tr_l$ следует $g_j \geq g_l$.*

Легко видеть, что справедливо

Замечание 1. $H \approx_C TR \ \rightarrow \ H \sim_b TR$.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Ясно, что при ограниченных ресурсах невозможно обслужить все требования из поступающего трафика TR, поэтому возникает задача построения такого расписания, что

$$\sum_{i=1}^{k}(tr_i - g_i) \rightarrow min, \tag{3}$$

$$G \approx_C TR. \tag{4}$$

Здесь $tr_i \in TR, g_i \in G, i = 1, \ldots, k$.

Определение 8. *Пусть Req_i – множество всех требований, обслуживаемых в дискрет d_i. Перенумеруем все эти требования: $Req_i = req_i^1, \ldots, req_i^{h_i}$. Число $\gamma \in \{1, \ldots, h_i\}$ назовем текущим уровнем нагрузки, или γ-уровнем. Последовательность натуральных чисел $1, \ldots, h_i$ задает порядок на множестве требований, обслуживаемых в дискрет d_i. Уровень нагрузки, соответствующий $\gamma = 1$, назовем первым уровнем нагрузки.*

Определение 9. *Временной отрезок трафика (нагрузки) на текущем уровне γ – это произвольный отрезок из множества отрезков $\{[a_n; b_n]\}$, $n = 1, \ldots, k$, для которого выполняются следующие свойства:*

1. *отрезок $[a_n; b_n]$ непрерывный,*
2. *для любого d_i из $\{[a_n; b_n]\}, tr \geq \gamma$ ($h_i \geq \gamma$).*

Время начала отрезка нагрузки на уровне n – наименьшее $i : f(i) \geq n$, f в зависимости от контекста есть TR, H или G.

Определение 10. *Набор приборов текущего уровня нагрузки seq_γ – упорядоченная последовательность смен приборов, обсуживающих требования из G на уровне γ. Начало каждой последующей смены – окончание предыдущей. Длина смены прибора – количество дискретов, в течение которых прибор находится в состоянии bu.*

Набор приборов seq – упорядоченная последовательность смен приборов, обсуживающих требования из G. Начало каждой последующей смены – окончание предыдущей.

Определение 11. *Пустой отрезок трафика (нагрузки) на уровне нагрузки γ – это произвольный отрезок из множества отрезков $[a_n; b_n], 1 \leq n \leq k$, для которого выполняются следующие свойства:*

1. *отрезок* $[a_n; b_n]$ *непрерывный,*

2. *для любого* d_i *из* $\{[a_n; b_n]\}$, $tr_i < \gamma$ $(h_i < \gamma)$.

Определение 12. *Погрешность набора приборов* $\delta = len(\gamma) - len(seq_\gamma)$, *где* γ *– уровень нагрузки,* $len(\gamma)$ *– длина уровня нагрузки,* seq_γ *– набор приборов текущего уровня нагрузки,* $len(seq_\gamma)$ *– сумма длин всех смен приборов из набора* eq_γ.

3. Составление расписания для суточного трафика

Пусть требуется создать расписание для суточного трафика, удовлетворяющее решению задачи (1)-(2) в случае неограниченных ресурсов, и удовлетворяющее решению задачи (3)-(4) в случае ограниченных ресурсов.

Ясно, что нагрузка, которую могут покрыть все доступные приборы, вычисляется как сумма длин смен приборов.

Этап 1: Фиксируется список MT приборов, которые могут обслуживать требования в рассматриваемый день с учетом типа смены.

Этап 2: Корректировка нагрузки.

Проверяется возможность обслужить все заданные трафиком требования. Вычисляется величина трафика и нагрузка, которую могут обеспечить приборы.

Если $TR < H(MT)$, то имеющихся ресурсов достаточно, и мы находимся в условиях задачи (1,2), иначе необходимо преобразовать формируемую нагрузку $H(MT)$ к $G(MT)$ – слабо подобной трафику нагрузке. Для этого положим $G(MT) = TR$ и затем последовательно для всех $i = 1, \ldots, k$ уменьшаем $g_i \in G(MT)$ на единицу до тех пор, пока максимально возможная нагрузка $G^*(MT)$ для имеющихся в наличии приборов не будет превосходить формируемую нагрузку $G(MT)$. Если при этом некоторый g_i становится меньше единицы, то для него уменьшение количества обслуживаемых требований не производится.

Если $g_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$, но ресурсов на покрытие $G(MT)$ не хватает, то уменьшаем g_i на единицу уже для тех j, для которых значение g_j принимало наименьшие значения, до тех пор, пока не появится возможность заполнить скорректированную нагрузку доступными приборами. Ясно, что и в таком вырожденном случае сохраняется слабое подобие нагрузки трафику.

Этап 3: Поиск начала и конца отрезка нагрузки на определенном уровне TR.

При преобразовании заданного графика, определяющего трафик, в TR возникает неоднозначность с трактовкой наклонных участков этого графика. Нужно определить, при каком наклоне графика, соответствующего TR, будет считаться, что отрезок нагрузки начался, а при каком – нет. Для снятия неоднозначности введем параметр $\alpha > 0$: чем больше α, тем более крутым должен быть график на данном уровне, чтобы идентифицировать этот отрезок как начало отрезка нагрузки.

В цикле по высоте n-уровня от нуля до максимального значения нагрузки на данные сутки (с учетом корректировки G) значения нагрузки в каждый из дискретов сравниваются с высотой рассматриваемого n-уровня.

Если при уже зафиксированном начале отрезка высота графика ниже, чем рассматриваемый n-уровень, или же цикл дошел до последнего дискрета времени рассматриваемого временного отрезка, текущий отрезок нагрузки закрывается. Длина и время начала найденного отрезка становятся аргументами в методе, заполняющем найденный отрезок сменами приборов.

Этап 4: Заполнение отрезка сменами приборов.

Скажем, что погрешность – это задаваемый пользователем параметр $\beta \geq 0$, определяющий максимум расхождения между суммой длин смен в наборе и длиной заполняемого отрезка. При обнаружении на определенном n-уровне отрезка нагрузки после определения длины и времени начала отрезка запускается алгоритм составления расписания для этого отрезка. Он включает в себя два алгоритма: алгоритм рекурсивного заполнения отрезков ARF – Algorithm of Recursive Filling и алгоритм перебора битовой маски BMC – Bit Mask Checking. Алгоритм ARF запускается, если доступных приборов больше 10. Этот алгоритм последовательно подставляет каждую из смен приборов в начало отрезка, а затем рекурсивно вызывает себя с уже меньшей длиной отрезка. Затем алгоритм последовательно перебирает получившиеся комбинации смен приборов, упорядоченных по убыванию количества смен в комбинации, и для каждой выбирает наиболее подходящий прибор. В случае, когда для набора смен не был найден подходящий список приборов, то выбирается следующая комбинация.

Алгоритм BMC запускается, если доступных приборов меньше 10. Он создает и перебирает битовую маску. Алгоритм суммирует длины смен приборов, стоящих на тех же позициях, где в битовой маске стоят единицы. Если полученная сумма отличается от длины отрезка нагрузки не более чем на β, то этот набор заносится в список наборов, подходящих для заполнения отрезка нагрузки. Из полученного списка выбирается набор смен приборов, в котором при минимальном расхождении суммы длин смен, задействованных в комбинации, и длины отрезка нагрузки (без учета погрешности β), имеется наименьшее количество приборов. Затем с учетом принятого набора приборов обновляется список доступных приборов, и алгоритм возвращается на этап 3.

Конец алгоритма.

4. Составление расписания для циклического трафика

Определение 13. *Пусть трафик обладает свойством цикличности, то есть для любого* $j = 1, \ldots, k$ *найдутся такие* $i = 1, 2, \ldots,$ *,* $\pi = 0, 1, \ldots,$ *что* $tr_j = tr_{f+\pi\times i}$ *для* $f = 1, \ldots, i$*. Назовем* i *длиной периода,* π *– номером периода,* $\{tr_1, \ldots, tr_i\}$ *– базисом периода.*

Обычно трафик обладает свойством суточной, недельной, месячной, сезонной и годовой цикличности. При недельной цикличности необходимо связать тип смены прибора с днями недели и рабочими днями. Под именем рабочего дня будем понимать имя дня недели, на который приходится этот рабочий день. Далее по Лемму 2 включительно считаем, что прибор работает по смене 2×2.

Определение 14 (Профиля контракта и смежного профиля)**.** *Профиль контракта (PC) – последовательность имен первых рабочих дней после первых выходных в месяце из 28 дней. Различные PC при необходимости нумеруются нижними индексами,* $PC_t(i)$ *– элемент, стоящий на* i*-м месте в последовательности* PC_t*.*

Смежный профиль (AP) – это последовательность имен вторых рабочих дней после первых рабочих дней.

Пример 1. Пусть 1-е число месяца — понедельник, тогда $PC_1(1) = 1$, так как выходных в месяце не было, и первый рабочий день прибора с этим контрактом – понедельник, $PC_1(2) = 5$, так как после пары первых выходных первым рабочим днем этого прибора будет пятница, $PC_1(3) = 2$, так как после следующих выходных первым рабочим днем этого прибора будет вторник, и $PC_1 = (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4)$. Ясно, что PC – это перестановка порядка 7.

Замечание 2. Каждая перестановка $PC_i, i = 1, \ldots, 7$, может быть получена из перестановки PC_1 с помощью циклического левого сдвига $PC_1(i)$ на место $PC_1(1)$. Поскольку для прибора первый рабочий день может прийтись на любой день недели, то ясно, что всего существует 7 типов PC, и для $i, j = 1, \ldots, 7 PC_1(j) = PC_1(j-1)\ mod7$, $PC_i = (PC_{i-1} + 4)\ mod7$:

Таблица 1: Пример профилей контракта

$PC_1 =$	1	5	2	6	3	7	4
$PC_2 =$	2	6	3	7	4	1	5
$PC_3 =$	3	7	4	1	5	2	6
$PC_4 =$	4	1	5	2	6	3	7
$PC_5 =$	5	2	6	3	7	4	1
$PC_6 =$	6	3	7	4	1	5	2
$PC_7 =$	7	4	1	5	2	6	3

Ясно, что в перестановке PC_1 число инверсий равно 3. Из Замечания 1 следует, что число инверсий в любом PC_i равно 3.

Определение 15. *Вектор $cw = (cw_1, \ldots, cw_7)$, в котором каждый элемент cw_i равен сумме всех рабочих дней, приходящихся на все i-е дни недели, назовем обобщенной неделей.*

Вектор месячной нагрузки прибора – вектор $m = (m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_n)$, k есть день месяца, и $m_k = 1$, если этот день у прибора рабочий, и $m_k = 0$, иначе.

Ясно, что $m = m(PC_i)$ для некоторого i.

Далее будем считать, что прибор, у которого PC_i: $i > 3$, работает в данном месяце со дня $j < i$, то есть, с начала месяца, если это не противоречит его контракту. Тогда справедливо

Замечание 3. Существует 4 различных вектора месячной нагрузки прибора: $m(PC_1), m(PC_2),\ m(PC_3), m(PC_4)$. При этом $m(PC_5) = m(PC_1), m(PC_6) = m(PC_2), m(PC_7) = m(PC_3)$.

Доказательство. Построим матрицу (Табл.2) из расположенных друг под другом векторов-строк $m(PC_1), m(PC_2), m(PC_3), m(PC_4), m(PC_5), m(PC_6), m(PC_7)$. Из построения следует, что $m(PC_5) = m(PC_1), m(PC_6) = m(PC_2)$, $m(PC_7) = m(PC_3)$. $\square$

Лемма 1. *У каждого прибора, работающего по контракту 2×2, в 28-дневном месяце в векторе обобщенной недели $cw_i = 2$, $i = 1, \ldots, 7$.*

Таблица 2: Фрагмент матрицы из векторов месячной нагрузки прибора

.	пн	вт	с	ч	пт	сб	вс	пн	вт	с	ч	пт	сб	вс	пн
$m(PC_1)$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$
$m(PC_2)$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$		
$m(PC_3)$	$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$	
$m(PC_4)$		$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$
$m(PC_5)$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$
$m(PC_6)$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$		
$m(PC_7)$	$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$			$\boxtimes$	$\boxtimes$	

Доказательство. Каждому прибору поставлен в соответствие свой PC, являющийся перестановкой порядка 7, следовательно, на каждый день недели приходится по одному рабочему дню прибора. Кроме того, прибор обладает смежным профилем AP, который одно-однозначно определяется по его PC, также являясь перестановкой порядка 7, следовательно, на каждый день недели приходится еще по одному рабочему дню. □

Следствие 1. *n приборов, работающих по контракту 2×2, в каждый день обобщенной недели обрабатывают нагрузку, равную $2n$.*

Доказательство. Легко заметить, что общая нагрузка, обрабатываемая приборами в каждый день обобщенной недели, складывается. По Лемме 1 на один прибор на каждый день обобщенной недели приходится по 2 рабочих дня, следовательно, n приборов в каждый день обобщенной недели обработают нагрузку, равную $2n$. □

Следствие 2. *Существует алгоритм построения расписания, обеспечивающего в месячном диапазоне покрытие трафика с периодом в 7 дней, форма огибающей которого есть прямая $y = n/2$, где n – количество задействованных приборов, работающих по контракту 2×2.*

Доказательство. 1. Пусть n четно. Разобъем приборы на пары (PC_i, PC_j), $j = i + 2 \mod 7$. По Следствию 1 на каждый день обобщенной недели приходится нагрузка в $2n$, следовательно, в каждый день любой недели месяца будет обработано $\frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$ единиц нагрузки.

2. Пусть n нечетно. Для четного $m = n - 1$ повторим рассуждения п.1, тогда останется прибор с PC_n, который в первую неделю увеличит обработанную нагрузку, приходящуюся на дни недели с номерами d_k, d_l, d_t, во вторую неделю – $d_{k+1}, d_{l+1}, d_{t+1}$, и т.д., в последнюю неделю – $d_{k+3}, d_{l+3}, d_{t+3}$. Ежедневная нагрузка будет повторяющейся четверкой $((m-1)/2, (m-1)/2, (m+1)/2, (m+1)/2)$, и, поскольку в неделе 7 дней, период такой кривой будет равен 28, таким образом, в течение месяца нагрузка будет апериодической. □

Теорема 1. *Не существует алгоритма построения расписания, обеспечивающего в месячном диапазоне покрытие трафика с периодом в 7 дней, форма огибающей которого отличается от прямой $y = n/2$, где n – количество задействованных приборов, работающих по контракту 2×2.*

Доказательство. Предположим, что такой алгоритм существует. Тогда существует кривая с недельной периодичностью, отличная от прямой. Следовательно, найдется по крайней мере один день каждой недели такой, что обработанная нагрузка будет строго больше величины обработанной нагрузки, равной $n/2$ (по Следствию 2) в другие дни недели. Но тогда в силу периодичности огибающей в обобщенной неделе в этот день величина обработанной нагрузки станет строго больше $4(n/2)$, то есть, строго больше $2n$. Получили противоречие со Следствием 1. Следовательно, предположение неверно. □

Легко видеть, что верна следующая

Лемма 2. *Существует алгоритм, позволяющий, используя n приборов, создать расписание, обеспечивающее покрытие недельного трафика либо*

1. *двумя пиками нагрузки величиной n и одним минимумом величины 0, либо*
2. *двумя минимумами величины 0 и одним пиком нагрузки величиной n, либо*
3. *двумя пиками нагрузки величиной n и двумя минимумами величины 0,*

при этом и пики и минимумы будут чередоваться с периодом в 4 дня.

Определение 16. *Контракт прибора назовем постоянным, если ему соответствует формат смены с фиксированными выходными, приходящимися только на субботу и воскресенье. Контракт назовем плавающим постоянным (ППК), если два выходных дня могут (постоянно для этого контракта) приходиться на любой день недели.*

Ясно, что постоянный контракт содержится во множестве W плавающих постоянных контрактов.

Определение 17. *Аналогично вектору месячной нагрузки прибора введем понятие вектор недельной нагрузки прибора $w = (w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_7)$, k есть номер дня недели, и $w_k = 1$, если в этот день недели прибор работает, и $w_k = 0$, иначе.*

Ясно, что различные приборы могут иметь одинаковые векторы недельной нагрузки.

Определение 18. *Назовем типом вектора недельной нагрузки w последовательность $wl = (wl_1, \ldots, wl_k, \ldots, wl_7)$ такую, что только две компоненты этой последовательности равны 0, а остальные есть 1. Ясно, что любой вектор недельной нагрузки w относится к одному из типов wl.*

Лемма 3. *Существует 21 тип векторов недельной нагрузки.*

Доказательство. Пусть W_i – множество таких ППК, что первый выходной в них приходится на i-ый день недели. Ясно, что максимальное значение $i = 6$, так как из определения 16 следует, что первый выходной не может приходиться на воскресенье, следовательно, $W = (W_1, \ldots, W_i, \ldots, W_6)$. Ясно, что множества W_i непусты, $i = (1, \ldots, 6)$, и $W = \bigcup_{i=1}^{6} W_i$, $W_i \cap W_j = \oslash$, следовательно, совокупность подмножеств $\{W_1, \ldots, W_6\}$ является разбиением W и, таким образом, W_i – классы эквивалентности по отношению i – «быть первым выходным в i-ый день недели».

Отсюда следует, что для любого вектора недельной нагрузки w найдется такое $i \in \{1, \ldots, 6\}$, что соответствующий тип $wl \in W_i$ для этого i.

Пусть k_i – количество различных типов wl в $W_i : k_i = \|W_i\|$.

Индукцией по i покажем, что $k_i = 7 - i$.

Базис. $i = 1$. Рассмотрим W_1. Ясно, что соответствующие W_1 типы векторов недельной нагрузки wl_1 имеют вид $(0, a, a, a, a, a, a)$, где a=0 или 1, причем, только одна переменная a в векторе имеет значение 0. Следовательно, эта переменная может занимать всего 6 различных позиций – со 2-ой по 7-ю. Следовательно, существует 6 различных типов векторов wl_1, и $\|W_1\| = k_1 = 6 = 7-1$. Базис обоснован.

Пусть для i верно, что $\|W_i\| = k_i = 7 - i$.

Докажем для $i + 1$.

Из определения W_i следует, что если некоторый тип вектора недельной нагрузки $wl_i \in W_i$, то первая равная нулю компонента в wl_i находится на i-ом месте. Тогда по построению $W_(i+1)$ в некотором $wl_{i+1} \in W_i$ первая равная нулю компонента находится на $(i+1)$-ом месте . Следовательно, количество позиций, которые может занимать вторая отличная от нуля компонента в wl_{i+1}, на 1 меньше, чем количество позиций, которые может занимать вторая отличная от нуля компонента в wl_i. Следовательно, $k_{i+1} = k_i - 1 = (7 - i) - 1 = 7 - (i + 1) = \|W_{i+1}\|$, и, таким образом, $k_{i+1} < k_i$. Следовательно, по лемме об убывающих цепях последовательность k_i конечна, и существует индекс t такой, что $k_t = 1$. Действительно, существует единственный плавающий постоянный контракт $w_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ – это постоянный контракт. Следовательно, t=6,и $\|W_6\| = k_6$= 1. Следовательно, $\sum_{i=1}^{6}(k_i) = 6 + 5 + \ldots + 1 = 21$. □

Следствие 3. *Существует 21 вид ППК 5x2.*

Доказательство. Следует из леммы 3 и определений 16 ППК и 17 вектора недельной нагрузки. □

5. Составление расписания для приборов в условиях неограниченных ресурсов

Определим требования к набору эвристик:

1. Отрезки нагрузки следует заполнять с первого уровня нагрузки.
2. Если на каком-либо уровне нагрузки встречается два или более отрезка нагрузки, то их необходимо заполнять по увеличению времени начала каждого отрезка.
3. Каждый отрезок нагрузки, если есть хотя бы один прибор, должен быть покрыт набором приборов.
4. Количество приборов в каждом наборе должно быть минимально.
5. Каждый отрезок нагрузки может быть покрыт набором приборов с некоторой погрешностью набора, причем погрешность должна быть минимальна с учетом выполнения всех предыдущих эвристик.

Получаем задачу со следующими условиями:

Задан трафик TR, для него определены все отрезки нагрузки на всех уровнях γ, где $\gamma < max(tr_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Для каждого отрезка нагрузки подобрать набор приборов с учетом введенных эвристик.

Определение 19. *Обозначим* $powers(i) = tr_i, i = 1, \ldots k$. *Множество всех уровней нагрузки – это упорядоченное множество* $PowerLevels = [level_i = powers(i) | i = 1, 2, \ldots, max(powers(x))]$.

Введем функцию $GetAllSequence(level, ws, imprecission)$, которая для произвольного уровня нагрузки $level$ из множества приборов ws с заданной погрешностью $imprecision$ возвращает множество всех возможных наборов $sequence$, упорядоченных по количеству приборов i и по абсолютной величине погрешности набора j:

$GetAllSequence(level, ws, imprecission) = [sequence_{ij} | i = len(sequence), j = \delta(sequence)]$ Пусть $Start(level)$ – начало отрезка, то есть координата a_n, $\gamma(level)$ – уровень нагрузки для текущего уровня level.

Получаем следующие эвристики:

1. Для всех $i, j : i \leq j, start(level_i) \leq start(level_j)$, если $\gamma(level_i) = \gamma(level_j)$.

2. Если $ws \neq \oslash$ и $PowerLevels \neq \oslash$, то найдется набор sequence для $min_i(level_i) \in PowerLevel$.

3. $Sequence(level, ws, imprecission) = min_{i,j}(GetAllSequence(level, w, imprecission))$.

Введем обзначения: $dayLoad_{day}$ – безразмерная положительная числовая величина, обозначающая суммарную нагрузку в день day.

$weekLoad_{day} = \{dayLoad_{currentDay} | currentDay = day, day + 1, \ldots, day + 7\}$ – множество нагрузок на неделю.

$wTuple_{=}\{m_i | i \in T, m \in M\}$ – кортеж, содержащий количество приборов m по контракту i, T-множество контрактов.

$restLoad(wTuple, weekLoad_{day})$ – функция, возвращающая множество из 7 элементов, каждый из которых показывает остаточную нагрузку в конкретный день недели, если имеются приборы из $wTuple$.

$presence(i)$ – числовая величина из (0;1), показывающая процентное соотношение наличия приборов с контрактом i.

Определим критерии подбора приборов.

Поиск набора приборов заключается в нахождении такого кортежа $wTuple$, что

$$MW(restLoad(wTuple_, weekLoad_{day})) \to 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i \in T} (wTuple[i] \times presense(i)) \to 1, \tag{6}$$

где $MW(x)$ – математическое ожидание x (выборочное среднее).

Из теоремы 1 следует, что приборы с типами смен 2×2 в среднем в день обеспечивают обслуживание нагрузки

$$\frac{workDays}{workDays + weekend} \times m_{2\times 2} \times shiftLenght,$$

где $shiftLenght$ – длина смены , $m_{2\times 2}$ – количество приборов с типом смен $2 \times 2, workDays = 2, weekend = 2$.

Такое же предположение справедливо для типов смен 3×2, 4×2 и т.д.

Для типов смен с фиксированными выходными обслуживаемая нагрузка очевидна – полная нагрузка с понедельника по пятницу и нулевая нагрузка в субботу и воскресенье.

Для типов смен со смещающимися выходными максимальная обслуживаемая нагрузка может быть равна как $m_{floatingWeekends}$, так и 0 в какой-либо день.

Для приборов со смещающимися выходными справедлива формула обслуживаемой нагрузки за неделю: $workDays \times shiftLenght \times m_{floatingWeekends}$.

Заранее зная процентное соотношение приборов с различными типами смен, задача поиска приборов сводится к нахождению кортежа $wTuple$.

Для решения (5), (6) применим итеративный алгоритм подбора приборов:

1. $wTuple = \{\oslash\}$;

2. наборНайден=false;

3. while (!наборНайден)

3.1. $wTuple = \{m_i | m = wTuple[i] + presence(i)\}, i \in T$

3.2. $if(MW(restLoad(wTuple, weekLoad_{day})) > 0)$

3.2.1. наборНайден = false;

else

3.2.2. наборНайден = true;

3.3. перейти на шаг 3.

Функция $restLoad$ может быть оптимизирована:

1. Для приборов с фиксированными выходными их обслуживаемая нагрузка вычисляется тривиально.

2. Для приборов со сменами типа 2×2 их обслуживаемая нагрузка вычисляется исходя из результатов п. 4.

3. Для оставшихся приборов со смещающимися выходными вычисляем остаточную нагрузку на неделю как сумму остаточных нагрузок на каждый день, их мощность на неделю, и находим разность.

4. Полученную разность возвращаем в качестве результата функции $restLoad$.

На шаге 3.1 итеративного алгоритма увеличение набора приборов происходит следующим образом:

$m = wTuple[i] + presence(i)$.

Добавив константный множитель к $presence(i)$, можно существенно уменьшить количество итераций, но при нахождении первого набора, удовлетворяющего условию, может возрасти погрешность:

$m = wTuple[i] + constN \times presence(i)$.

Числовую константу $constN$ зададим следующей формулой:

$constN = \sqrt{max(weekLoad_{day})}$.

Как только будет найден подходящий набор, погрешность устраняется методом половинного деления:

1. while(constN>ϵ)
2. if(M($restLoad(wTuple, weekLoad_{day})$)>0)
3. constN = |constN| / 2;
4. else
5. constN = -1* |constN| / 2;
6. $wTuple = m_i | m = wTuple[i] + constN * presence(i), i \in T$
7. Перейти на шаг 1.

Заключение

В работе представлена одна из моделей функционирования параллельных приборов, обслуживающих поступающие требования в течение задаваемых промежутков времени при ограничениях, налагаемых на эти требования. В частности, график совокупности поступающих требований может иметь циклический характер, а приборы – работать по отдельным типам смен.

Доказана теорема о том, что при определенном типе смен работы приборов не существует алгоритма построения расписания, обеспечивающего обслуживание трафика с определенным периодом.

В дальнейшем предполагается обобщить данный подход на случай, когда поступающие требования относятся к различным классам, и обработка каждого класса таких требований возможна только приборами с особыми навыками. Интересна задача построения расписания для случая, когда некоторые такие приборы могли бы обрабатывать требования из нескольких классов.

Построенные алгоритмы могут быть использованы для оперативного построения расписания работы сотрудников call-центров, сетевых гипермаркетов и прочих объектов с известным трафиком и различными типами смен сотрудников.

Список литературы

[1] Santos F.C., Vilarinho. P.M. The problem of scheduling in parallel machines: a case study // Proceedings of the World Congress on Engineering. London, U.K, 2010. Vol III.

[2] Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984. 384 с.

[3] Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. Учебное пособие. М.: МГУ, 2011. 222 с.

Библиографическая ссылка

Дадеркин Д.О., Горячев Д.Д. Расписание для параллельных приборов при циклическом трафике // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 107–121.

Сведения об авторах

1. **Горячев Денис Дмитриевич**
магистрант кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

2. **Дадеркин Дмитрий Ольгердович**
доцент кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

SCHEDULE FOR PARALLEL DEVICES UNDER CYCLIC TRAFFIC

Goryachev Denis Dmitriyevich
Master student of Computer Science chair
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Daderkin Dmitriy Olgerdovich
Associate Professor of Computer Science chair
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 09.06.2014, revised 18.06.2014

This paper considers the problem of scheduling tasks, described by cyclic traffic, in parallel devices with limitations on time of their operation. In practice, it is very important to make schedules promptly, for example for present call-centers with a huge amount of employees that have different types of working shifts. The offered algorithm allows to make schedules swiflty considering restrictions both on the incoming traffic and types of employees working shifts.

Keywords: scheduling theory, scheduling of service requirements, parallel devices, traffic, weakly similar traffic load, call-center.

Bibliographic citation

Daderkin D.O., Goryachev D.D. Schedule for parallel devices under cyclic traffic. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 107–121. (in Russian)