УДК 517.521.2

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕЙБНИЦА

Зверкина Г.А.
Московский государственный университет
путей сообщения (МИИТ), г. Москва

Поступила в редакцию 09.02.2014, после переработки 28.04.2014.

Известная теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов обобщена на случай, когда абсолютная величина членов ряда «не совсем монотонно» стремится к нулю. Рассмотрены вопросы точности оценки остатка ряда.

Ключевые слова: признак Лейбница, знакочередующиеся ряды, монотонность, скорость сходимости.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 123–138.

Введение

Известная теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов с монотонно стремящейся к нулю абсолютной величиной слагаемых не всегда позволяет исследовать сходимость рядов, слагаемые которых колеблются около монотонно стремящейся к нулю последовательности. Ряды такого рода могут быть исследованы с помощью доказанных ниже фактов.

1. Обобщение теоремы Лейбница

Определение 1. *Последовательность $\{a_n\}$ называется $Z(\omega)$-монотонно возрастающей (убывающей) на множестве $\mathfrak{D}$, если $\forall k \in \mathfrak{D}$ выполняется $a_{k+\omega} \geqslant a_k$ (соответственно $a_{k+\omega} \leqslant a_k$); $\omega \in \mathbb{N}$.* $\diamond$

Теорема 1. *Если последовательность a_n является $Z(2\omega-1)$-монотонно убывающей при $n \geqslant n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится. При этом остаток ряда, то есть разность суммы ряда $S = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ и частичной суммы $S_m = \sum\limits_{n=n_0}^{m}(-1)^n a_n$ оценивается следующим образом:*

$$\begin{gathered} R_m = S - S_m, \\ |R_m| \leqslant \sum_{n=m+1}^{m+2\omega} |a_k|. \end{gathered} \tag{1}$$

$\square$

Замечание 1. Легко видеть, что в случае, когда последовательность $\{a_n\}$ является $Z(2\omega)$-монотонной и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ может быть расходящимся. ◇

Пример 1.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2} & \text{при} \quad n = 2k, \\ \\ \dfrac{1}{k} & \text{при} \quad n = 2k-1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, последовательность $\{a_n\}$ является $Z(2)$-монотонной, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ представляет собой разность расходящегося гармонического ряда и сходящегося ряда из обратных квадратов:

$$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \ldots;$$

этот ряд расходится к $+\infty$. ■

При $\omega = 1$ $\quad Z(2\omega - 1)$-монотонность превращается в обычную монотонность $(0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n)$, а Теорема 1 превращается в известную теорему Лейбница о знакочередующихся рядах:

Теорема 2 (Г. В. фон Лейбниц, [2])**.** *Знакочередующийся ряд* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *сходится, если выполняются оба условия:*

1. $\forall n\ b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant 0$*;*

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Кроме того, сумма ряда удовлетворяет неравенству:

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \leqslant b_1.$$ [1]

□

Из теоремы Лейбница вытекает следствие, позволяющее оценить погрешность вычисления суммы ряда $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} b_n$.

Следствие 1. *Остаток* $R_m = S - S_m$ *сходящегося знакочередующегося ряда удовлетворяет неравенству:*

$$|R_m| \leqslant b_{m+1}. \tag{2}$$

Обозначим R_m^L*:* $|R_m| \leqslant R_m^L = b_{m+1}$.

[1] В работе 1682 г. [2] Лейбниц впервые использовал этот признак сходимости для ряда $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$; более полное изложение этой теоремы было сделано в письмах к Я. Германну (Jakob Hermann) от 26.06.1705 и И. Бернулли (Johann (I) Bernoulli) от 10.01.1714.

Более того, можно утверждать, что

$$R_m = \theta \cdot (-1)^{m+1} b_{m+1}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{3}$$

Величина θ может достигать 0 и 1, например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. □

Как известно ([1, п.384]), теорема Лейбница является частным случаем теоремы (признака) Дирихле:

Теорема 3 (П. Г. Лежён-Дирихле, [3], §101)**.** *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *в совокупности ограничены:*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < M,\ N \in \mathbb{N},$$

а числа a_n образуют монотонную последовательность, сходящуюся к нулю:

$$a_n \geqslant a_{n+1},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.* □

Ниже (Примеры 2, 4, 5) приведены примеры рядов, для которых Теорема 1 позволяет устанавливать сходимость, а Теорема 3 Дирихле неприменима или её применение связано с большими техническими трудностями.

Доказательство Теоремы 1. Пусть a_n – это $Z(2\omega-1)$-монотонно убывающая последовательность, стремящаяся к 0 при $i \geqslant n_0$. Для простоты будем считать, что $n_0 = 1$.

Рассмотрим ряды $\sigma_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{j,k}$, $(k = 1, 2, \ldots, 2\omega - 1)$, где

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} (-1)^j a_j & \text{при} \quad j = m\cdot(2\omega-1)+k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq m\cdot(2\omega-1)+k, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ k = 1, 2, \ldots, 2\omega-1. \tag{4}$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j,k} =$$

$$= \underbrace{0+0+\ldots+0}_{k-1 \text{ слагаемых}} + (-1)^k a_k + \underbrace{0+0+\ldots+0}_{2\omega-2 \text{ слагаемых}} + (-1)^{k+2\omega-1} a_{k+2\omega-1} +$$

$$+ \underbrace{0+0+\ldots+0}_{2\omega-2 \text{ слагаемых}} + (-1)^{k+2(2\omega-1)} a_{k+2(2\omega-1)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+m(2\omega-1)} a_{k+m(2\omega-1)} + \underbrace{0+0+\ldots+0}_{2\omega-2 \text{ слагаемых}} +$$

$$+ (-1)^{k+(m+1)(2\omega-1)} a_{k+(m+1)(2\omega-1)} + \ldots$$

Фактически ряд σ_k — это «разбавленный» нулями ряд

$$\widetilde{\sigma}_k = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m(2\omega-1)}a_{k+m(2\omega-1)} = (-1)^k\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m a_{k+m(2\omega-1)}.$$

Ряд $\widetilde{\sigma}_k$ («под-ряд» исходного ряда) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поскольку из $Z(2\omega-1)$-монотонности последовательности a_i следует обычная монотонность последовательности $a_{k+m(2\omega-1)}$; сумма этого ряда конечна, а остаток

$$\widetilde{\rho}_{p,k} = \sigma_k - \sigma_{p,k} = (-1)^k\sum_{m=p+1}^{\infty}(-1)^m a_{k+m(2\omega-1)},$$

где

$$\sigma_{p,k} = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{k+m(2\omega-1)}a_{k+m(2\omega-1)} = (-1)^k\sum_{m=0}^{p}(-1)^m a_{k+m(2\omega-1)}$$

в соответствии с (3) $\widetilde{\rho}_{p,k}$ оценивается первым отброшенным слагаемым:

$$|\widetilde{\rho}_{p,k}| \leqslant a_{k+(p+1)(2\omega-1)}$$

или

$$\widetilde{\rho}_{p,k} = \theta_{p,k}\cdot(-1)^{k+p+1}a_{k+(p+1)(2\omega-1)}, \qquad 0 \leqslant \theta_{p,k} \leqslant 1.$$

Из этого следует, что и ряд σ_k также сходится к конечной сумме, а его остаток оценивается первым *ненулевым* отброшенным слагаемым:

$$\rho_{q,k} = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k} - \sum_{j=1}^{q}\alpha_{j,k} = \theta_{q,k}\cdot(-1)^{k+(p+1)}a_{k+(p+1)(2\omega-1)},$$

где $k+p(2\omega-1) \leqslant q < k+(p+1)(2\omega-1)$, $0 \leqslant \theta_{q,k} \leqslant 1$.

Иначе это можно записать как $\rho_{q,k} = \theta_{q,k}\cdot\sum\limits_{j=q+1}^{q+(2\omega-1)}\alpha_{j,k}$, поскольку в сумму $\sum\limits_{j=q+1}^{q+(2\omega-1)}\alpha_{j,k}$ попадает только одно ненулевое слагаемое из каждого под-ряда σ_k, а именно $(-1)^{k+(q+1)(2\omega-1)}a_{k+(q+1)(2\omega-1)}$, где $k+p(2\omega-1) \leqslant q < k+(p+1)(2\omega-1)$.

Легко видеть, что исходный ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ есть сумма рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}$, $1 \leqslant k \leqslant 2\omega-1$, соответственно частичная сумма $S_q = \sum\limits_{k=1}^{2\omega-1}\sigma_{q,k}$. Из существования конечных пределов $\lim\limits_{q\to\infty}\sigma_{q,k} = s_k$ следует существование конечного предела $\lim\limits_{q\to\infty}S_q = S = \sum\limits_{k=1}^{2\omega-1}s_k$, при этом $|S-S_q| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{2\omega-1}|s_k-\sigma_{q,k}| \leqslant \sum\limits_{n=q+1}^{q+2\omega-1}a_n$ – сумма оценок абсолютных величин остатков рядов σ_k.

Поскольку знаки остатков рядов σ_k чередуются, последнюю оценку можно улучшить следующим образом:

$$|S-S_q| < \max\left\{\sum_{r=1}^{\omega-1}a_{q+2r}, \sum_{r=1}^{\omega}a_{q+2r-1}\right\}. \tag{5}$$

В дальнейшем оценку $\left(\max\left\{\sum\limits_{r=1}^{\omega-1} a_{m+2r}, \sum\limits_{r=1}^{\omega} a_{m+2r-1}\right\}\right)$ будем обозначать R_m^Z: $R_m^Z > |S - S_m| = |R_m|$. Или более точно:

$$S - S_m = \sum_{j=1}^{2\omega-1} (-1)^{m+j} \tilde{\theta}_{m+j} a_{m+j}, \quad 0 \leqslant \tilde{\theta}_r \leqslant 1. \tag{6}$$

□

Ряд, удовлетворяющий условиям Теоремы 2, будем называть L-рядом, а ряд, удовлетворяющий условиям Теоремы 1 – Z-рядом.

Оценка (5) в общем случае неулучшаема, что можно видеть из следующего примера.

Пример 2. Пусть последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^k}, & \text{если} \quad n = 3(2k-1) - 2; \\ \dfrac{1}{10^k}, & \text{если} \quad n = 3(2k-1) - 1; \\ \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^k}, & \text{если} \quad n = 3(2k-1); \\ \dfrac{1}{k}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 2k - 2; \\ \dfrac{1}{10^k}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 2k - 1; \\ \dfrac{1}{k}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 2k. \end{cases} \tag{7}$$

Легко видеть, что величины $|a_n|$ стремятся к 0, будучи $Z(3)$-монотонной последовательностью, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ не является L-рядом.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1} + \boxed{\frac{1}{2}}}_{a_1} - \underbrace{\frac{1}{10}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{1} + \boxed{\frac{1}{2}}}_{a_3} - \underbrace{\frac{1}{1}}_{a_4} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{a_5} - \underbrace{\frac{1}{1}}_{a_6} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2^2}}}_{a_7} - \underbrace{\frac{1}{10^2}}_{a_8} + \underbrace{\frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2^2}}}_{a_9} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{10}} + \underbrace{\frac{1}{10^2}}_{a_{11}} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{12}} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{3}+\boxed{\frac{1}{2^3}}}_{a_{13}}-\underbrace{\frac{1}{10^3}}_{a_{14}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\boxed{\frac{1}{2^3}}}_{a_{15}}-\underbrace{\frac{1}{3}}_{a_{16}}+\underbrace{\frac{1}{10^3}}_{a_{17}}-\underbrace{\frac{1}{3}}_{a_{18}}+\dots$$

$$\dots+\underbrace{\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{2^k}}}_{a_{6k-5}}-\underbrace{\frac{1}{10^k}}_{a_{6k-4}}+\underbrace{\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{2^k}}}_{a_{6k-3}}-\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_{6k-2}}+\underbrace{\frac{1}{10^k}}_{a_{6k-1}}-\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_{6k}}+\dots$$

сходится к сумме $S=2$ (все слагаемые кроме выделенных рамками сокращаются). При этом

$$S_{6k}=2\left(1-\frac{1}{2^k}\right);$$

$$S_{6k+1}=2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{1}{2^k};$$

$$S_{6k+2}=2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{10^k};$$

$$S_{6k+3}=2\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{10^k}+\frac{2}{k};$$

$$S_{6k+4}=2\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{10^k};$$

$$S_{6k+5}=2\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)+\frac{1}{k};$$

$$R_{6k+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n-\sum_{n=1}^{6k+3}(-1)^{n+1}a_n=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{10^k}-\frac{2}{2k},$$

то есть при $k\to\infty$ $R_{6k+3}\sim\dfrac{2}{k}\sim(a_{6k+4}+a_{6k+6})$.

Однако $R_{6k}=2^{-(k-1)}$, то есть абсолютная величина остатка ряда колеблется в достаточно широких границах. ■

Представленный в Примере 2 ряд, по-видимому, не может быть исследован с помощью признака Дирихле (Теорема 3).

2. Условия применимости Теоремы 1

Достаточно часто члены ряда представляют собой значения некоторой непрерывной функции в целочисленных точках: $a_n=f(n)$. Поэтому для исследования сходимости рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)$ в том случае, когда $f(x)$ не является

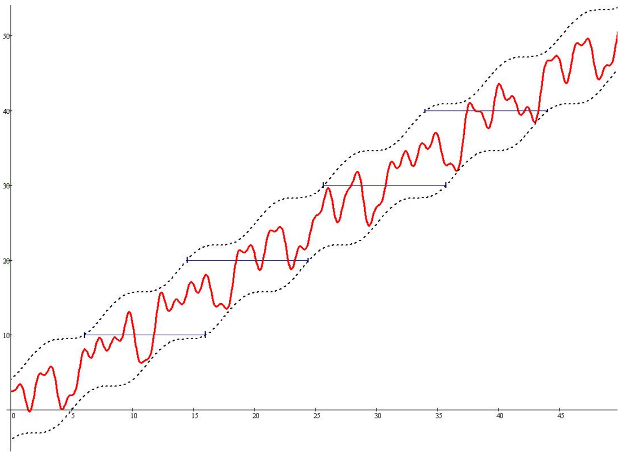

Рис. 1: Zv-монотонно возрастающая функция с параметром 10

монотонной функцией, естественно распространить понятие Z-монотонности на произвольные функции.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется $Z(T)$-монотонно возрастающей (убывающей) на множестве $\mathfrak{D}$ (здесь $T > 0$), если $\forall x \in \mathfrak{D}$ выполняется $f(x+T) \geqslant f(x)$ (соответственно $f(x+T) \leqslant f(x)$).* $\diamond$

Однако тот факт, что $f(x)$ является $Z(T)$-монотонной функцией, не позволяет сделать вывод о том, что последовательность $f(n)$ является $Z(k)$-монотонной. Действительно, функция $\varphi(x) = \ln x + x \sin^2 x$ является $Z(2\pi)$-монотонно возрастающей при $x > 0$, однако ни при каких натуральных k она не является $Z(k)$-монотонной. Поэтому приходится ввести понятие сильной Z-монотонности.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется Zv-монотонно[2] возрастающей (убывающей) на множестве $\mathfrak{D}$, если*

$$\exists T > 0 : \forall x \in \mathfrak{D},\ \forall \tau > 0 \quad f(x+T+\tau) \geqslant f(x)$$

(соответственно $f(x+T+\tau) \leqslant f(x)$). $\diamond$

То есть $f(x)$ Zv-монотонна, если она $Z(T+\tau)$-монотонна для некоторого фиксированного $T > 0$ и произвольного $\tau > 0$. Введем параметр Zv-монотонно возрастающей на множестве $\mathfrak{D}$ функции:

$\mathrm{Par}_{Zv}(f(x)) = \inf\{T > 0 :\ \forall \tau > 0,\ \ \forall x \in \mathfrak{D} \quad f(x+T+\tau) \geqslant f(x)\}$.

Аналогично определяется параметр Zv-монотонно убывающей функции.

Если параметр Zv-монотонной функции равен 0, то эта функция монотонна в обычном смысле.

Из Определения 3 следует, что для любой Zv-монотонной на множестве $\mathfrak{D}$ функции $f(x)$ найдется такая монотонная[3] функция $\varphi(x)$, что $\forall t \in \mathfrak{D}$ значение

[2] Z-*very*-монотонно.

[3] Имеется в виду нестрогая монотонность: $\varphi(x)$ монотонна на $\mathfrak{D}$, если $\forall a < b \in \mathfrak{D}$ $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ или $\forall a < b \in \mathfrak{D}$ $\varphi(a) \geqslant \varphi(b)$.

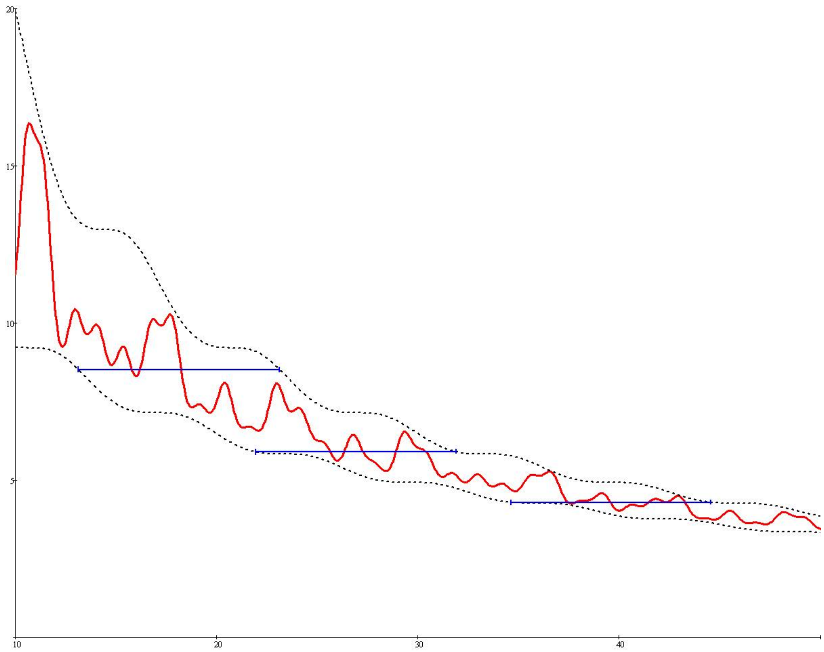

Рис. 2: Zv-монотонно убывающая функция с параметром 10

$f(t)$ лежит между числами $\varphi(t)$ и $\varphi(t+T)$, где $T \geqslant \mathrm{Par}_{Zv}(f(x))$, то есть график функции $f(x)$ лежит в полосе между двумя графиками монотонных функций; ширина по горизонтали этой полосы ограничена, но, естественно, она не меньше параметра Zv-монотонной функции (см. Рис. 1 и 2). Однако отыскать такую функцию $\varphi(x)$ не всегда бывает просто. Поэтому для доказательства Zv-монотонного возрастания функции $f(x)$ достаточно найти две монотонные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, такие, что $\varphi_1(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi_2(x)$ и $\exists T > 0 : \ \forall x \in \mathfrak{D} \quad \varphi_1(x+T) > \varphi_2(x)$ (В этом случае $T \geqslant \mathrm{Par}_{Zv}(f(x))$. Аналогично решается вопрос о Zv-монотонном убывании.

В большинстве случаев определить параметр Zv-монотонной функции довольно сложно, но можно получить оценку этого параметра сверху.

Пример 3. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$ и функция $p(x)$ ограничена: $|p(x)| < M$. Покажем, что функция $f(x) = x^\alpha + p(x)x^{\alpha-1}$ $\quad Zv$-монотонно возрастает при $x > \dfrac{(1-\alpha)M}{\alpha}$.

Рассмотрим функции $q(x) = x^\alpha + \dfrac{M}{x^{1-\alpha}}$ и $r(x) = x^\alpha - \dfrac{M}{x^{1-\alpha}}$. Эти функции монотонно возрастают при $x > \dfrac{(1-\alpha)M}{\alpha}$. Очевидно, $r(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x)$ (график функции $f(x)$ заключен в полосу между графиками функций $q(x)$ и $r(x)$).

Покажем, что расстояние по горизонтали между графиками функций $q(x)$ и $r(x)$ при достаточно больших x ограничено.

Выберем точку x_0, в которой функция $q(x)$ возрастает: это выполняется при $x_0 > \dfrac{(1-\alpha)M}{\alpha}$. Найдем точку $x_1 : \ r(x_1) = q(x_0)$. Проведем касательную к графику функции $q(x)$ в точке C с координатами $(x_1; q(x_1))$ (Рис. 3) и горизонтальную

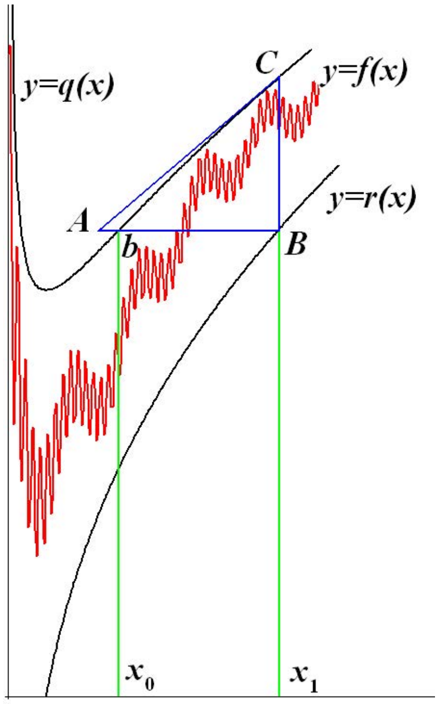

Рис. 3: К Примеру 3

прямую через точку B $(x_1; r(x_1))$ до пересечения с касательной AC. Оценим величину $|bB| = x_1 - x_0$ — расстояние между графиками функций $q(x)$ и $r(x)$ по горизонтали.

$$|bB| < |AB| = |BC| \operatorname{ctg}\,(\angle CAB);$$

$$|BC| = \frac{2M}{x^{1-\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\,(\angle CAB) = q'(x_1) = \alpha x_1^{\alpha-1} - (1-\alpha)Mx_1^{\alpha-2}; \tag{8}$$

$$|bB| < |AB| = \frac{|BC|}{\operatorname{tg}\,(\angle CAB)} = \frac{2M}{\alpha - \dfrac{M(1-\alpha)}{x_1^2}}.$$

Последнее выражение убывает с ростом x $(x > 0)$, поэтому для всех $x > x_0$ расстояние по горизонтали между графиками функций $q(x)$ и $r(x)$ будет меньше, чем $T(x_0) = \dfrac{2M}{\alpha - \dfrac{M(1-\alpha)}{x_1^2}}$, то есть $r(x) > q(x - T(x_0))$; следовательно, $F(x)$ Zv-монотонно возрастает при $x > x_0$ с параметром, меньшим, чем $T(x_0)$. $\square$

Теорема 4. *Если $f(x)$ Zv-монотонно убывает при $x > n_0 > 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^i f(n)$ сходится.* □

Доказательство. Найдем нечетное число $2\omega - 1 > \mathrm{Par}_{Zv}(f(x))$. Последовательность $\{f(n)\}$ является $Z(2\omega-1)$-монотонной. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^i f(n)$ сходится. □

Пример 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^\beta}{n+p(n)}$ сходится, если $0 \leqslant \beta < 1$ и функция $p(x)$ ограничена. Это следует из того, что функция $g(x) = \dfrac{x^\beta}{x+p(x)}$ Zv-монотонно стремится к 0, поскольку $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, где $f(x)$ — рассмотренная в Примере 3 Zv-монотонно возрастающая стремящаяся к бесконечности функция (здесь $\beta = 1-\alpha$). □

Пример 5. Несложно заметить, что функция $g(x) = \dfrac{1}{x+2\cos x}$ Zv-монотонна и

$$\mathrm{Par}_{Zv}(g(x)) \leqslant 2\pi. \tag{9}$$

То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(n-1)}}{n+2\cos n}$ является Z-рядом[4]; последовательность $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+2\cos n}\right\}$ $Z(7)$-монотонно убывает к нулю ($7 > 2\pi$). Значит, остаток ряда $R_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(n-1)}}{n+2\cos n}$ может быть оценен суммой четырех слагаемых: $|R_m| < a_{m+1} + a_{m+3} + a_{m+5} + a_{m+7}$. Однако оценку (9) можно улучшить в соответствии с рассуждениями Примера 3.

Действительно, $x - 2 \leqslant \dfrac{1}{g(x)} = x + 2\cos x \leqslant x + 2$, то есть в обозначениях Примера 3 $M = 2$, $\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,(\angle CAB) = 1$, $|bB| = |AB| = 4$. Отсюда $\mathrm{Par}_{Zv}(g(x)) \leqslant 4$, и последовательность $\{a_n\}$ является $Z(5)$-монотонно убывающей. Это дает лучшую оценку для R_m: $|R_m| < a_{m+1} + a_{n+m} + a_{m+5}$. Однако можно усмотреть, что при m достаточно больших $|R_m| < a_{m+1}$. То есть оценки (3) и (5) в некоторых случаях могут быть улучшены. □

3. О точности оценки остатка L-рядов и Z-рядов

Давно замечено, что оценка (3) в большинстве случаев дает очень хорошую точность. Но, поскольку L-ряды, исследование которых иначе как с помощью признака (теоремы) Лейбница невозможно, обычно сходятся довольно медленно, желательно было бы иметь метод уточнения оценок (2) и (5).

[4]На VI Международной студенческой олимпиаде по математике 2012 г. в г.Ярославле было предложено исследовать сходимость этого ряда. Его сходимость можно доказать с использованием тригонометрических преобразований, однако небольшие изменения формулы для членов ряда приводят к невозможности использования предложенного организаторами олимпиады способа решения задачи. Размышления над этой задачей и привели автора к написанию настоящей статьи.

Пример 6. Для хорошо известного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \tag{10}$$

оценка (2) приводит к неравенству $|R_m| = \left| \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \leqslant R_m^L = \dfrac{1}{m+1}$.

Оценим R_m более точно.

$$|R_m| = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+3)(m+4)} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(m+2k-1)(m+2k)};$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(m+2x-1)(m+2x)}\,\mathrm{d}\,x < |R_m| < \int_0^{\infty} \frac{1}{(m+2x-1)(m+2x)}\,\mathrm{d}\,x;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) < |R_m| < \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

$$|R_m| \sim \frac{1}{2m} \text{ при } m \to \infty.$$

В этом случае остаток ряда монотонно стремится к 0; ошибка оценки (2) составляет примерно половину. ■

Пример 7. Рассмотрим другой L-ряд.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{если} \quad n = 2k-1; \\ \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^k}, & \text{если} \quad n = 2k. \end{cases} \tag{11}$$

Иначе $\quad a_n = \dfrac{1}{\left[\dfrac{n+1}{2}\right]} - \dfrac{1+(-1)^n}{2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$.

Легко видеть, что при достаточно больших n $(n > 7)$ $a_n \downarrow 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right) + \ldots = 1. \tag{12}$$

При этом
$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{k}, & \text{если} \quad n = 2k-1; \\ \\ \dfrac{1}{2^k}, & \text{если} \quad n = 2k. \end{cases} \tag{13}$$

Оценка в остатка ряда (12) соответствии с (2) такова:
$$|R_{2n-1}| < R^L_{2n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}},$$
$$|R_{2n}| < R^L_{2n} = \frac{1}{n+1}.$$

То есть
$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{|R_{2\omega}|}{R^L_{2\omega}} = 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{|R_{2\omega+1}|}{R^L_{2\omega+1}} = 1;$$
точность оценки имеет большой разброс. Удобного соотношения вида $|R_n - R^L_n| \lesssim C \cdot R_n$ здесь нет. В этом случае можно говорить о неудовлетворительной точности оценки (2). Представленный случай имеет некоторое сходство с Примером 2. ■

Теорема 5. *Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает стремясь к 0 ($a_n \downarrow 0$) при $n > n_0$, и при $n > n_0$ выполняется условие $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$, то при $m > n_0$ оценка R^L_m остатка L-ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сравнима с абсолютной величиной остатка R_m этого ряда: $\dfrac{1}{2}\,R^L_m \leqslant |R_m| \leqslant \dfrac{1}{2}\,R^L_{m-1}$.* □

Доказательство. Поскольку $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$, можно найти такую убывающую дважды дифференцируемую функцию $f(x)$, выпуклую вниз при $x > n_0$ ($f''(x) > 0$ или $f'(x) \nearrow$ ($|f'(x)| \searrow$) при $x > n_0$), что $a_n = f(n)$.

Остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^n f(n)$ можно оценить следующим образом:
$$|R_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^n f(n)\right| =$$
$$= ((f(n) - f(n+1)) + (f(n+2) - f(n+3)) + (f(n+4) - f(n+5)) + \ldots) =$$
$$= (-f'(\xi_n) - f'(\xi_{n+2}) - f'(\xi_{n+4}) - \ldots) \leqslant$$
$$\leqslant (-f'(n) - f'(n+2) - f'(n+4) - \ldots);$$
$$|R_n| \geqslant (-f'(n+1) - f'(n+3) - f'(n+5) - \ldots),$$

здесь $\xi_n \in [n; n+1]$; и $f'(x_n) \leqslant f'(\xi_n) \leqslant f'(n+1) \leqslant 0$ поэтому

$$|R_n| \leqslant \int\limits_0^\infty -f'(n+2x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\limits_n^\infty -f'(n+2x)\mathrm{d}\,2x = \frac{1}{2}\,f(n) = \frac{1}{2}\,R^L_{n-1}.$$

Аналогично можно получить оценку снизу:

$$|R_n| \geqslant \frac{1}{2}\,f(n+1) = \frac{1}{2}\,R^L_n.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\,a_{n+1} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{1}{2}\,a_n \text{ при } n > n_0. \tag{14}$$

Последнее неравенство важно потому, что Теорема 2 Лейбница обычно применяется к рядам с медленно убывающими слагаемыми, и в этом случае неравенство $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\,a_n$ сильнее неравенства $|R_n| \leqslant a_{n+1}$. □

Следствие 2. *Для $Z(p)$-ряда $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ $(p = 2\omega - 1)$ можно предложить следующую общую оценку остатка ряда:*

$$R_m = (-1)^m(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \ldots - \delta_{p-1} + \delta_p),$$

где δ_k — остаток L-ряда. При этом $\dfrac{1}{2}\,a_{n+i} \leqslant \delta_i \leqslant a_{n+i}$. Поэтому

$$|R_m| \leqslant a_{m+1} - \frac{1}{2}\,a_{m+2} + a_{m+3} - \frac{1}{2}\,a_{m+4} + \ldots - \frac{1}{2}\,a_{m+p-1} + a_{m+p} \leqslant$$

$$\leqslant \max(a_i,\ i = m+1, m+3, \ldots, m+p)\cdot\frac{p+1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2}\min(a_i,\ i = m+2, m+4, \ldots, m+p-1)\cdot\frac{p-1}{2},$$

Кроме того,

$$|R_m| \geqslant \frac{1}{2}\,a_{m+1} - a_{m+2} + \frac{1}{2}\,a_{m+3} - a_{m+3} + \ldots + \frac{1}{2}\,a_{m+p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\min(a_i,\ i = m+1, m+3, \ldots, m+2\omega-1)\cdot\frac{p+1}{2} -$$

$$- \max\,(a_i,\ i = m+2, m+2, \ldots, m+2\omega-2)\cdot\frac{p-1}{2}.$$

Последняя оценка, скорее всего, неинтересна: правая часть неравенства почти всегда будет отрицательна.

Однако если при $n > n_0$ выполняется соотношение $a_n \leqslant 2a_{n+p}$, то оценку R_m можно улучшить, учитывая, что в этом случае[5]

$$\frac{1}{2}\,a_{n+i} \leqslant \delta_i \leqslant \frac{1}{2}\,a_{n+i-p} \leqslant a_{n+i}:$$

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{2}(a_{m+1-p} - a_{m+2} + a_{m+3-p} - a_{m+4} + \ldots - a_{m+p-1} + a_m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\max(a_{i-p},\ i = m+1, m+3, \ldots, m+p)\cdot\frac{p+1}{2} -$$

$$- \min(a_i,\ i = m+2, m+4, \ldots, m+p-1)\cdot\frac{p-1}{2}\Bigg).$$

Если же, в дополнение к этому, окажется, что при $n \to \infty$ для любого фиксированного k выполнено $a_n \sim a_{n+k}$, то можно утверждать, что при $m \to \infty$ $R_m \lesssim \frac{1}{2}a_m$. ■

Именно эта ситуация встречается в Примере (5): ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n + 2\cos n}$ сходится, и его остаток $R_m \lesssim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}$.

Заключение

Теорема 1 легко может быть обобщена различными несложными способами. Например, назовем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ($a_k \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$) ω-знакопериодическим рядом, если для некоторого $\omega \in \mathbb{N}$ выполняется: $\forall\ k > k_0$ sign $(a_k) = -$sign $(a_{k+\omega})$, где sign $(a_k) = 1$ при $a_k > 0$, sign $(a_k) = -1$ при $a_k < 0$ и sign $(0) = 0$. Тогда если последовательность $\{|a_k|\}$ является $Z(\omega)$-монотонно убывающей к нулю, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Оценка остатка такого ряда может быть получена по аналогии с вышеприведенными оценками. Этот пример включает в себя ситуацию, когда некоторые под-ряды (L-ряды) рассматриваемого Z-ряда нулевые. Иначе говоря, ω-знакопериодический ряд может быть превращен в $Z(2n-1)$-ряд добавлением в него нескольких нулевых под-рядов.

Автор предполагает, что понятие Z-рядов может быть использовано в некоторых разделах теории рядов, например, при изучении и применении некоторых преобразований расходящихся рядов.

Обзор доступной автору литературы и консультации с коллегами-математиками из различных городов и ВУЗов приводят к выводу, что признаков сходимости знакопеременных рядов, подобных Теоремам 1 и 4, неизвестно; также

[5] Неравенство $a_n \leqslant 2a_{n+p}$ означает, что члены каждого из составляющих Z-ряд L-рядов убывают медленнее геометрической прогрессии со знаменателем 0,5. Учитывая, что Теорема 2 Лейбница применяется, в основном, к условно сходящимся и медленно сходящимся рядам, такое предположение вполне уместно.

неизвестны оценки остатка ряда, подобные Теореме 5 (оценка (14)). Ничего подобного не найдено ни в авторитетных энциклопедических изданиях по теории рядов [4], [5], ни в математических журналах второй половины XX века и начала XXI века.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность профессору механико-математического факультета МГУ В. Н. Чубарикову, кафедре высшей математики Ярославского государственного технического университета (организатору Всероссийской студенческой олимпиады по математике в 2012 г.) и доценту этой кафедры В. Ш. Ройтенбергу, автору задачи Примера 5.

Также автор благодарит А. Ю. Веретенникова и анонимного рецензента за ценные замечания к тексту статьи.

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. Т. 2. 864 с.

[2] Leibniz G.W. De vera proportione circuli ad quadrarum circumpscriptum in numeris rationalibus // Acta Eruditprum. 1682. Pp. 41–46.

[3] Lejeune Dirichlet P.G., Dedekind R. Vorlesungen über Zahlentheorie. Brunswick, 1863.

[4] Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. Dover Publications, 1990.

[5] Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, 1979.

Библиографическая ссылка

Зверкина Г.А. Об одном обобщении теоремы Лейбница // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 123–138.

Сведения об авторах

1. **Зверкина Галина Александровна**
доцент кафедры «Прикладная математика-1» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Россия, 127994, ГСП-4, Москва, уз. Образцова, д. 9, стр. 9, МИИТ.
E-mail: zverkina@gmail.com.

ON A GENERALIZATION OF THE LEIBNIZ THEOREM

Zverkina Galina Alexandrovna
Associate Professor of Applied Mathematics chair,
Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
Russia, 127994, Moscow, 9b9 Obraztsova str., MIIT.
E-mail: zverkina@gmail.com

Received 09.02.2014, revised 28.04.2014.

The well-known Leibniz theorem (Leibniz Criterion or alternating series test) of convergence of alternating series is generalized for the case when the absolute value of terms of series are "not absolutely monotonously" convergent to zero. Questions of accuracy of the estimation for the series remainder are considered.

Keywords: alternating series test, alternating series, monotony, convergence rate.

Bibliographic citation

Zverkina G.A. On a generalization of the Leibniz theorem. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 123–138. (in Russian)