УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМИ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Донцова М.В.
Нижегородский государственный педагогический университет
имени Козьмы Минина, г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию 17.01.2014, после переработки 25.09.2014.

Определены условия, обеспечивающие нелокальное существование ограниченного решения задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями. Доказательство нелокальной разрешимости опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: уравнения с частными производными первого порядка, метод дополнительного аргумента, задача Коши, глобальные оценки.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 21–36.

Введение

Системы нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка описывают различные задачи из физики, механики, гидродинамики. Поэтому изучение общих свойств систем нелинейных и квазилинейных уравнений и методов их решения актуальны в современной математике [1, 2].

В настоящее время открыт и интенсивно разрабатывается новый способ исследования разрешимости дифференциальных уравнений первого порядка – метод дополнительного аргумента, который не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их. Применение этого метода позволяет во многих случаях более эффективно и конкретно определить условия локальной разрешимости систем нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [2–8].

В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями равными нулю. В настоящей работе мы определяем условия, обеспечивающие нелокальное существование ограниченного решения задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x))\partial_x u(t,x) = f_1(t,x,u,v), \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x))\partial_x v(t,x) = f_2(t,x,v), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, a, c – известные отрицательные константы, b, g – известные положительные константы, f_1, f_2 – известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, то есть зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – известные функции. Задача (1), (2) определена в области

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in (-\infty,\infty), T > 0\}.$$

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (1), (2) расширенную характеристическую систему [2–8]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = aw_1(s,t,x) + bw_3(s,t,x), \tag{3}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = cw_4(s,t,x) + gw_2(s,t,x), \tag{4}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = f_1(s,\eta_1,w_1(s,t,x),w_3(s,t,x)), \tag{5}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = f_2(s,\eta_2,w_2(s,t,x)), \tag{6}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{7}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{8}$$

Неизвестные функции $\eta_i,\ w_j,\ i = 1,2,\ j = \overline{1,4}$ зависят не только от t и x, но и от дополнительного аргумента s . Интегрируя уравнения (3) – (6) по аргументу s, и учитывая условия (7) – (8), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (aw_1 + bw_3)d\nu, \tag{9}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (cw_4 + gw_2)d\nu, \tag{10}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s f_1(\nu,\eta_1,w_1,w_3)d\nu, \tag{11}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s f_2(\nu,\eta_2,w_2)d\nu, \tag{12}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ \ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{13}$$

Система (9) – (13) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (aw_1 + bw_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t (aw_1 + bw_3)d\tau, w_1, w_3)d\nu, \tag{14}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (cw_4 + gw_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t (cw_4 + gw_2)d\tau, w_2)d\nu, \tag{15}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t (aw_1 + bw_3)d\nu), \tag{16}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t (cw_4 + gw_2)d\nu). \tag{17}$$

Мы будем писать, что константы $c_1, c_2, ...$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретными числами.

Справедливо утверждение [2–8]:

Утверждение 1. *Пусть функции $w_1(s,t,x)$, $w_2(s,t,x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (14)–(17), являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи (1), (2) в области Ω_{T_0}, $T_0 \leqslant T$, где T_0 – константа, определяемая через исходные данные.*

2. Существование локального решения

Для доказательства существования решения задачи (1) – (2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (14) – (17).

Обозначим $\Gamma_T = \{\, (s,t,x) |\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$,

$$V_{TK} = \left\{(t,x,v)\,|0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty)\,, v \in [-K, K]\right\},$$

$$Z_{TK} = \left\{(t,x,u,v)\,|0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty)\,, u, v \in [-K, K]\right\},$$

где K – произвольно зафиксированное положительное число,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2, l = \overline{0,2}\,\}, C_f = \max\{\sup_{Z_{TK}} |f_1|\,, \sup_{V_{TK}} |f_2|\},$$

$$N_f = \max\{C_f, \sup_{Z_{TK}} |\partial_x f_1|\,, \sup_{Z_{TK}} |\partial_u f_1|\,, \sup_{Z_{TK}} |\partial_v f_1|\,, \sup_{V_{TK}} |\partial_x f_2|\,, \sup_{V_{TK}} |\partial_v f_2|\},$$

$\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных и непрерывных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$ на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2....,$ $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными в области Ω_T,

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|\,,\ \ \|h\| = \sup_{\Omega_T} |h(t,x)|.$$

Примем, что $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1), i = 1,2,\ f_1 \in \bar{C}^{2,2,2,2}(Z_{TK}),\ f_2 \in \bar{C}^{2,2,2}(V_{TK})$.

Лемма 1. *Система интегральных уравнений (14) – (17) имеет единственное решение $w_j \in \bar{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_2})$, где $j = \overline{1,4}$, $0 < T_2 \leqslant T$, T_2 – константа, определяемая через исходные данные.*

Доказательство. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (14) – (17) зададим равенствами:

$$w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ \ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (14) – (17) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ($n = 1,2,\ldots$):

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \int_0^t (aw_{1n} + bw_{3n})d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (aw_{1n} + bw_{3n})d\tau, w_{1n}, w_{3n})d\nu, \quad (18)$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \int_0^t (cw_{4n} + gw_{2n})d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (cw_{4n} + gw_{2n})d\tau, w_{2n})d\nu, \quad (19)$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s,s,x - \int_s^t (aw_{1n} + bw_{3n})d\nu), \quad (20)$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s,s,x - \int_s^t (cw_{4n} + gw_{2n})d\nu). \quad (21)$$

Для системы уравнений (18) – (21) нулевое приближение определим равенствами:

$$w^0_{jn} = w_{j(n-1)},\ \ j = \overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (18) – (21) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w^{k+1}_{1n} = \varphi_1(x - \int_0^t (aw^k_{1n} + bw^k_{3n})d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (aw^k_{1n} + bw^k_{3n})d\tau, w^k_{1n}, w^k_{3n})d\nu, \quad (22)$$

$$w^{k+1}_{2n} = \varphi_2(x - \int_0^t (cw^k_{4n} + gw^k_{2n})d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (cw^k_{4n} + gw^k_{2n})d\tau, w^k_{2n})d\nu, \quad (23)$$

$$w^{k+1}_{3n} = w_{2(n-1)}(s,s,x - \int_s^t (aw^k_{1n} + bw^k_{3n})d\nu), \quad (24)$$

$$w^{k+1}_{4n} = w_{1(n-1)}(s,s,x - \int_s^t (cw^k_{4n} + gw^k_{2n})d\nu). \quad (25)$$

Так же, как и в работах [3–7] установлено, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$, где T_1 – постоянная, определяемая через исходные данные, последовательные приближения

(22) – (25) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (18) – (21), у которого существуют непрерывные производные $\partial_x w_{jn},\ j=\overline{1,4}$, справедливы оценки:

$$\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 5C_\varphi,$$

$$\|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 5C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 9C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 9C_\varphi.$$

Так же, как и в работах [3–7] доказано, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_1$ последовательные приближения, определяемые из системы (18) – (21), сходятся к непрерывному решению системы (14) – (17), для которого справедливы оценки:

$$\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}.$$

Дважды продифференцируем последовательные приближения (18)–(21) по x и обозначим $\omega_j^n = w_{jnxx},\ j=\overline{1,4}$. Получим систему уравнений:

$$\omega_1^n\,(s,t,x) = -\varphi_1'(x-\int\limits_0^t (aw_{1n}+bw_{3n})d\nu)\int\limits_0^t (a\omega_1^n + b\omega_3^n)d\nu +$$

$$+\int\limits_0^s (-\partial_x f_1 \int\limits_\nu^t (a\omega_1^n + b\omega_3^n)d\tau + \partial_u f_1\cdot\omega_1^n + \partial_v f_1\cdot\omega_3^n)d\nu + G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}), \tag{26}$$

$$\omega_2^n\,(s,t,x) = -\varphi_2'(x-\int\limits_0^t (cw_{4n}+gw_{2n})d\nu)\int\limits_0^t (c\omega_4^n + g\omega_2^n)d\nu +$$

$$+\int\limits_0^s (-\partial_x f_2 \int\limits_\nu^t (c\omega_4^n + g\omega_2^n)d\tau + \partial_v f_2\cdot\omega_2^n)d\nu + G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}), \tag{27}$$

$$\omega_3^n\,(s,t,x) = \omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t (aw_{1nx}+bw_{3nx})d\nu)^2 - w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t (a\omega_1^n + b\omega_3^n)d\nu, \tag{28}$$

$$\omega_4^n\,(s,t,x) = \omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t (cw_{4nx}+gw_{2nx})d\nu)^2 - w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t (c\omega_4^n + g\omega_2^n)d\nu, \tag{29}$$

где $G_i, i=1,2$ – известные функции.

По свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$, где T_2 – постоянная, которая определяется через исходные данные, $T_2 \leqslant T_1$, справедливы оценки: $\|\omega_i^n\| \leqslant 14C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\omega_3^n\| \leqslant 70C_\varphi,\ \|\omega_4^n\| \leqslant 70C_\varphi$.

Обозначим $q_n = \begin{pmatrix} w_{1nx} \\ w_{2nx} \end{pmatrix}$, $p_n = \sum\limits_{j=1}^{4} \left\|w_{j(n+1)} - w_{jn}\right\|$.

Введем норму $\|q_n\| = \|w_{1nx}\| + \|w_{2nx}\|$.

Используя свойства модулей, интегралов, супремума функции, метод математической индукции, установлено, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$ справедливо неравенство: $\sum\limits_{n=0}^{N} \|q_{n+1} - q_n\| \leqslant \frac{8}{21}\|q_1 - q_0\| + \frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{N} p_n$, где $\sum\limits_{n=1}^{N} p_n$ ограничены при любом N.

Следовательно, частичные суммы $\sum\limits_{n=0}^{N} \|q_{n+1} - q_n\|$ ограничены при любом N, значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|q_{n+1} - q_n\|$ сходится.

Следовательно, $w_{inx} \to w_{ix} = \partial_x w_i,\ i=1,2$.

Также установлено, что $w_{3nx} \to w_{3x} = \partial_x w_3,\ w_{4nx} \to w_{4x} = \partial_x w_4$, где функции $\partial_x w_j,\ j = \overline{1,4}$ непрерывны по всем своим аргументам в области Γ_{T_2}. Справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_i\| \leqslant 5C_\varphi,\ i = 1,2,\ \|\partial_x w_3\| \leqslant 9C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\| \leqslant 9C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j = \overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t в области Γ_{T_2}. Единственность решения доказывается так же, как и в статье [3]. Лемма 1 доказана. □

Введем условия

$$a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ g > 0,\ \varphi_1'(x) \leqslant 0,\ \varphi_2'(x) \geqslant 0,\ \partial_x f_1 \leqslant 0,\ \partial_x f_2 \geqslant 0,\ \partial_v f_1 \leqslant 0. \tag{30}$$

Лемма 2. *Функции $\{w_j\}$, $j = \overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений (14) – (17), имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x t}$, $j = \overline{1,4}$ в области Γ_{T_2}.*

Доказательство. При выполнении условий (30) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции, экспоненты установлено, что для всех $n \in N$ в области Γ_{T_2} справедливы неравенства:

$$0 < 1 - \int_s^t (aw_{1nx} + bw_{3nx})d\nu \leqslant 1,\ 0 < 1 - \int_s^t (cw_{4nx} + gw_{2nx})d\nu \leqslant 1.$$

Так как $w_{1n},\ w_{3n}$ имеют ограниченные частные производные по x, то по свойствам интегралов, модулей, теореме о конечном приращении получаем

$$|x_1 - x_2 - \int_s^t (a(w_{1n}(\nu,t,x_1) - w_{1n}(\nu,t,x_2)) + b(w_{3n}(\nu,t,x_1) - w_{3n}(\nu,t,x_2)))d\nu| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Аналогично

$$|x_1 - x_2 - \int_s^t (c(w_{4n}(\nu,t,x_1) - w_{4n}(\nu,t,x_2)) + g(w_{2n}(\nu,t,x_1) - w_{2n}(\nu,t,x_2)))d\nu| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Докажем равностепенную непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x.

Зафиксируем точку $x_0 \in R^1$. По свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что в области Γ_{T_2} справедливы неравенства:

$$\left|\int_s^t (aw_{1n} + bw_{3n})d\nu\right| \leqslant 0.5,\ \left|\int_s^t (cw_{4n} + gw_{2n})d\nu\right| \leqslant 0.5.$$

Обозначим $\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0 - 0.5 \leqslant x \leqslant x_0 + 0.5\}$. Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$. Тогда при выполнении условий (30) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$ справедливы неравенства:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \Phi_{1n} +$$

$$+(N_f l t^2 + C_\varphi l t + N_f t)(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{2n} + |\omega_2^{n-1}(s,t,x_1) - \omega_2^{n-1}(s,t,x_2)| +$$

$$+5C_\varphi lt(|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

где

$$\Phi_{1n}=$$
$$=|H_1(s,t,x_1,w_{1n}(s,t,x_1),w_{3n}(s,t,x_1),\omega_1^n(s,t,x_1),\omega_3^n(s,t,x_1))-$$
$$-H_1(s,t,x_2,w_{1n}\left(s,t,x_2\right),w_{3n}\left(s,t,x_2\right),\omega_1^n(s,t,x_1),\omega_3^n(s,t,x_1))+$$
$$+G_1(s,t,x_1,w_{1n}\left(s,t,x_1\right),w_{3n}\left(s,t,x_1\right),w_{1nx}\left(s,t,x_1\right),w_{3nx}\left(s,t,x_1\right))-$$
$$-G_1(s,t,x_2,w_{1n}\left(s,t,x_2\right),w_{3n}\left(s,t,x_2\right),w_{1nx}\left(s,t,x_2\right),w_{3nx}(s,t,x_2))|,$$

где $G_i,\ i=1,2$ – известные функции, $G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx})$, $G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx})$ равностепенно непрерывны в области $\Gamma_{T_2x_0}$, где

$$\Gamma_{T_2x_0}=\{\,(s,t,x)|\,0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_2,\ x_0-0.5\leqslant x\leqslant x_0+0.5,\ T_2>0\},$$

$$H_1(s,t,x,w_{1n}\left(s,t,x\right),w_{3n}\left(s,t,x\right),\omega_1^n\left(s,t,x_1\right),\omega_3^n\left(s,t,x_1\right))=$$
$$=-\varphi_1'(x-\int\limits_0^t(aw_{1n}\left(\nu,t,x\right)+bw_{3n}\left(\nu,t,x\right))d\nu)\int\limits_0^t(a\omega_1^n\left(\nu,t,x_1\right)+b\omega_3^n\left(\nu,t,x_1\right))d\nu+$$
$$+\int\limits_0^s(-\partial_xf_1\int\limits_\nu^t(a\omega_1^n\left(\tau,t,x_1\right)+b\omega_3^n\left(\tau,t,x_1\right))d\tau+\partial_uf_1\cdot\omega_1^n\left(\nu,t,x_1\right)+\partial_vf_1\cdot\omega_3^n\left(\nu,t,x_1\right))d\nu,$$

$$\Phi_{2n}=|\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))\cdot[\eta_{1nx}^2(s,t,x_1)-\eta_{1nx}^2(s,t,x_2)]-$$
$$-\int\limits_s^t(a\omega_1^n\left(\nu,t,x_1\right)+b\omega_3^n(\nu,t,x_1))d\nu\cdot$$
$$\cdot[w_{2(n-1)x}(s,s,\eta_{1n}\left(s,t,x_1\right))-w_{2(n-1)x}(s,s,\eta_{1n}\left(s,t,x_2\right))]|,$$

$$\eta_{1n}\left(s,t,x\right)=x-\int\limits_s^t(aw_{1n}\left(\nu,t,x\right)+bw_{3n}\left(\nu,t,x\right))d\nu.$$

Установлено, что для всех $0\leqslant t\leqslant T_2$ справедливы неравенства:

$$N_flt^2+C_\varphi lt+N_ft<\frac{4}{35},\ 5C_\varphi lt<\frac{2}{7},$$

где $l=\max\{|a|\,,b,|c|\,,g\}$. Следовательно,

$$|\omega_1^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_1^n\left(s,t,x_2\right)|<\Phi_{1n}+$$
$$+\frac{4}{35}(|\omega_1^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_1^n\left(s,t,x_2\right)|+|\omega_3^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_3^n\left(s,t,x_2\right)|),$$
$$|\omega_3^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_3^n\left(s,t,x_2\right)|<\Phi_{2n}+|\omega_2^{n-1}\left(s,t,x_1\right)-\omega_2^{n-1}\left(s,t,x_2\right)|+$$
$$+\frac{2}{7}(|\omega_1^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_1^n\left(s,t,x_2\right)|+|\omega_3^n\left(s,t,x_1\right)-\omega_3^n\left(s,t,x_2\right)|),$$

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, ограниченностью всех функций, входящих в H_1, Φ_{1n},Φ_{2n}, получаем, что для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такое $\delta>0$, что для всех n будет $\Phi_{1n}<0.5\varepsilon$, $\Phi_{2n}<0.5\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$.

Установлено, что при $|x_1-x_2|<\delta$ справедливы неравенства:

$|\omega_i^0(s,t,x_1)-\omega_i^0(s,t,x_2)|<\varepsilon$, $|\omega_i^1(s,t,x_1)-\omega_i^1(s,t,x_2)|<\varepsilon$, $i=1,2$.

Предположим, что для некоторого $n-1$, $(n=1,2,\ldots)$ при $|x_1-x_2|<\delta$ справедливы неравенства:

$|\omega_1^{(n-1)}(s,t,x_1)-\omega_1^{(n-1)}(s,t,x_2)|<\varepsilon$, $|\omega_2^{(n-1)}(s,t,x_1)-\omega_2^{(n-1)}(s,t,x_2)|<\varepsilon$.

Тогда

$$|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|<0.5\varepsilon+$$

$$+\frac{4}{35}(|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|), \tag{31}$$

$$|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|<1.5\varepsilon+$$

$$+\frac{2}{7}(|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|). \tag{32}$$

Сложим неравенства (32) и (33), получим:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|<2\varepsilon+$$

$$+0.4(|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Следовательно,

$$|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|<\frac{10}{3}\varepsilon. \tag{33}$$

Из (31), (33) следует, что $|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$. Аналогично $|\omega_2^n(s,t,x_1)-\omega_2^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$.

Итак, последовательности $\{\omega_i^n(s,t,x)\}$, $i=1,2$ равностепенно непрерывны по x при $x\in\Omega_{x_0}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde\omega_1^n(s,t,x)=-\varphi_1'(x-\int_0^t(aw_1+bw_3)d\nu)\int_0^t(a\tilde\omega_1^n+b\tilde\omega_3^n)d\nu+$$

$$+\int_0^s(-\partial_x f_1\int_\nu^t(a\tilde\omega_1^n+b\tilde\omega_3^n)d\tau+\partial_u f_1\cdot\tilde\omega_1^n+\partial_v f_1\cdot\tilde\omega_3^n)d\nu+G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}), \tag{34}$$

$$\tilde\omega_2^n(s,t,x)=-\varphi_2'(x-\int_0^t(cw_4+gw_2)d\nu)\int_0^t(c\tilde\omega_4^n+g\tilde\omega_2^n)d\nu+$$

$$+\int_0^s(-\partial_x f_2\int_\nu^t(c\tilde\omega_4^n+g\tilde\omega_2^n)d\tau+\partial_v f_2\cdot\tilde\omega_2^n)d\nu+G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}), \tag{35}$$

$$\tilde\omega_3^n(s,t,x)=\tilde\omega_2^{n-1}\cdot(1-\int_s^t(aw_{1x}+bw_{3x})d\nu)^2-w_{2x}\int_s^t(a\tilde\omega_1^n+b\tilde\omega_3^n)d\nu, \tag{36}$$

$$\tilde\omega_4^n(s,t,x)=\tilde\omega_1^{n-1}\cdot(1-\int_s^t(cw_{4x}+gw_{2x})d\nu)^2-w_{1x}\int_s^t(c\tilde\omega_4^n+g\tilde\omega_2^n)d\nu, \tag{37}$$

где $G_i, i=1,2$ – известные функции, $G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x})$, $G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x})$ равномерно непрерывны в области $\Gamma_{T_2x_0}$, где

$$\Gamma_{T_2x_0}=\{(s,t,x)|\,0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_2,\ x_0-0.5\leqslant x\leqslant x_0+0.5,\ T_2>0\}.$$

При выполнении условий (30) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$ справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_1^n\| < 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2^n\| < 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3^n\| < 5.5C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4^n\| < 5.5C_\varphi.$$

Из неравенства $\left\|\tilde{\omega}_1^{n+1} - \tilde{\omega}_1^n\right\| + \left\|\tilde{\omega}_2^{n+1} - \tilde{\omega}_2^n\right\| \leqslant 0.2(\left\|\tilde{\omega}_2^n - \tilde{\omega}_2^{n-1}\right\| + \left\|\tilde{\omega}_1^n - \tilde{\omega}_1^{n-1}\right\|)$ следует, что $\tilde{\omega}_1^n \to \tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2^n \to \tilde{\omega}_2$. Следовательно, справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leqslant 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\| \leqslant 3C_\varphi.$$

Установлено, что функции $\tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2$ равномерно непрерывны по x при $x \in \Omega_{x_0}$.

Так как $\tilde{\omega}_1^n \to \tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2^n \to \tilde{\omega}_2$, то из неравенств

$$\left\|\tilde{\omega}_3^{n+1} - \tilde{\omega}_3^n\right\| < 2\left\|\tilde{\omega}_2^n - \tilde{\omega}_2^{n-1}\right\| + 0.5\left\|\tilde{\omega}_1^{n+1} - \tilde{\omega}_1^n\right\|),$$

$$\left\|\tilde{\omega}_4^{n+1} - \tilde{\omega}_4^n\right\| < 0.5\left\|\tilde{\omega}_2^{n+1} - \tilde{\omega}_2^n\right\| + 2\left\|\tilde{\omega}_1^n - \tilde{\omega}_1^{n-1}\right\|)$$

следует, что $\tilde{\omega}_3^n \to \tilde{\omega}_3,\ \tilde{\omega}_4^n \to \tilde{\omega}_4$. Следовательно, справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_3\| \leqslant 5.5C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\| \leqslant 5.5C_\varphi.$$

Покажем, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1,4}$ при $n \to \infty$ в области Γ_{T_2}.

При выполнении условий (30) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции, получаем, что справедливы неравенства:

$$|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1| \leqslant |R_1^n| + \frac{4}{35}(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$

$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant |R_2^n| + \left|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right| + \frac{2}{7}(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$

где

$$R_1^n = H_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},\omega_1^n,\omega_3^n) - H_1(s,t,x,w_1,w_3,\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3) +$$
$$+ G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}) - G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}),$$

$$H_1(s,t,x,w_1,w_3,\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_3) = -\varphi_1'(x - \int_0^t (aw_1 + bw_3)d\nu)\int_0^t (a\tilde{\omega}_1 + b\tilde{\omega}_3)d\nu +$$
$$+ \int_0^s (-\partial_x f_1 \int_\nu^t (a\tilde{\omega}_1 + b\tilde{\omega}_3)d\tau + \partial_u f_1 \cdot \tilde{\omega}_1 + \partial_v f_1 \cdot \tilde{\omega}_3)d\nu,$$

$$R_2^n = \omega_2^{n-1} \cdot [\eta_{1nx}^2 - \eta_{1x}^2] - \int_s^t (a\omega_1^n + b\omega_3^n)d\nu \cdot [w_{2(n-1)x}(s,s,\eta_{1n}) - w_{2x}(s,s,\eta_1)],$$

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int_s^t (aw_{1n} + bw_{3n})d\nu,\ \eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (aw_1 + bw_3)d\nu.$$

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех функций, входящих в $H_1,\ R_1^n,\ R_2^n$, получаем, что для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такой номер N, что при $n \geqslant N$

$$|R_1^n| < \varepsilon,\ |R_2^n| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n \geqslant N$

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{35}{31}\varepsilon + \frac{4}{31}\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|,$$

$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant \frac{7}{5}\varepsilon + \frac{7}{5}\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \frac{2}{5}\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\|. \tag{38}$$

Значит, при $n \geqslant N$

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{29}{21}\varepsilon + \frac{4}{21}\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\|. \tag{39}$$

Аналогично при $n \geqslant N$

$$\|\omega_2^n - \tilde{\omega}_2\| \leqslant \frac{29}{21}\varepsilon + \frac{4}{21}\left\|\omega_1^{n-1} - \tilde{\omega}_1\right\|. \tag{40}$$

Сложим неравенства (39) и (40), получим при $n \geqslant N$:

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_2^n - \tilde{\omega}_2\| \leqslant \frac{58}{21}\varepsilon + \frac{4}{21}(\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \left\|\omega_1^{n-1} - \tilde{\omega}_1\right\|).$$

С помощью метода математической индукции установлено неравенство:

$$\left\|\omega_1^{N+k} - \tilde{\omega}_1\right\| + \left\|\omega_2^{N+k} - \tilde{\omega}_2\right\| \leqslant \left(\frac{4}{21}\right)^k (\left\|\omega_1^N - \tilde{\omega}_1\right\| + \left\|\omega_2^N - \tilde{\omega}_2\right\|) + 4\varepsilon.$$

Следовательно, $\omega_1^{N+k} \to \tilde{\omega}_1,\ \omega_2^{N+k} \to \tilde{\omega}_2$ при $N \to \infty,\ k \to \infty$. Из неравенства (38) следует, что $\omega_3^n \to \tilde{\omega}_3$ при $n \to \infty$. Аналогично $\omega_4^n \to \tilde{\omega}_4$ при $n \to \infty$.

Получаем, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ $j = \overline{1,4}$ непрерывны и ограничены в области Γ_{T_2} при выполнении условий (30). □

Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial xt}$, $j = \overline{1,4}$ в области Γ_{T_2} при выполнении условий (30).

Из лемм 1 и 2 следует теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1), i = 1,2,\ f_1 \in \bar{C}^{2,2,2,2}(Z_{T_2K}),\ f_2 \in \bar{C}^{2,2,2}(V_{T_2K})$, где $K = 2C_\varphi$ и выполняются условия (30). Тогда в области Γ_{T_2}, где T_2 – постоянная, определяемая через исходные данные, задача Коши (1) – (2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_2})$, которое определяется из системы интегральных уравнений (14) – (17).*

3. Существование нелокального решения

Продифференцируем систему уравнений (1) по x и обозначим $p(t,x) = u_x(t,x)$, $q(t,x) = v_x(t,x)$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t p + (au + bv)\partial_x p = -ap^2 - bpq + \partial_x f_1 + p \cdot \partial_u f_1 + q \cdot \partial_v f_1, \\ \partial_t q + (cu + gv)\partial_x q = -gq^2 - pq + \partial_x f_2 + q \cdot \partial_v f_2, \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{41}$$

Добавим к системе уравнений (9) – (13) два уравнения:

$$\frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a\gamma_1^2(s,t,x) - b\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \partial_x f_1(s,\eta_1,w_1,w_3)+$$
$$+\gamma_1(s,t,x)\,\partial_u f_1(s,\eta_1,w_1,w_3) + \gamma_2(s,s,\eta_1)\,\partial_v f_1(s,\eta_1,w_1,w_3), \tag{42}$$
$$\frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g\gamma_2^2(s,t,x) - \gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \partial_x f_2(s,\eta_2,w_2)+$$
$$+\gamma_2(s,t,x)\,\partial_v f_2(s,\eta_2,w_2), \tag{43}$$

с условиями:

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2). \tag{44}$$

Перепишем систему уравнений (42) – (43) в следующем виде:

$$\gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)+$$
$$+\int\limits_0^s [-a\gamma_1^2 - b\gamma_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) + \partial_x f_1 + \gamma_1\partial_u f_1 + \gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)\,\partial_v f_1]d\nu, \tag{45}$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g\gamma_2^2 - c\gamma_2\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \partial_x f_2 + \gamma_2\partial_v f_2 d\nu. \tag{46}$$

Доказательство существования непрерывного решения системы (45), (46) в области Γ_{T_2} при выполнении условий (30) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\gamma_1^{n+1}(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)+$$
$$+\int\limits_0^s [-a(\gamma_1^n)^2 - b\gamma_1^n\gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1) + \partial_x f_1 + \gamma_1^n\partial_u f_1 + \gamma_2^n(\nu,\nu,\eta_1)\partial_v f_1]d\nu, \tag{47}$$

$$\gamma_2^{n+1}(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g(\gamma_2^n)^2 - c\gamma_1^n(\nu,\nu,\eta_2)\gamma_2^n + \partial_x f_2 + \gamma_2^n\partial_v f_2]d\nu, \tag{48}$$

при этом $\gamma_1^0 = \varphi_1'(\eta_1)$, $\gamma_2^0 = \varphi_2'(\eta_2)$.

При выполнении условий (30) в области Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$|\gamma_i^{n+1}| < 2.5C_\varphi, \ |\eta_{ix}| \leqslant 1, |\ \gamma_{ix}^{n+1}| < 5C_\varphi, \ i=1,2.$$

Последовательные приближения $\{\gamma_i^n\}$, $i=1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (45) – (46) на Γ_{T_2} при выполнении условий (30), так как выполняется неравенство: $\left\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\right\| + \left\|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\right\| \leqslant 0.7(\left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\| + \left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\|)$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\omega_{21} = \varphi_1''(\eta_1)\,\eta_{1x} + R_1+$$
$$+\int\limits_0^s [(\partial_u f_1 - 2a\gamma_1 - b\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1))\omega_{21} + (\partial_v f_1 - b\gamma_1)\omega_{22}(\nu,\nu,\eta_1)\,\eta_{1x}]d\nu, \tag{49}$$

$$\omega_{22} = \varphi_2''(\eta_2)\,\eta_{2x} + R_2+$$
$$+\int\limits_0^s [(\partial_v f_2 - 2g\gamma_2 - c\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2))\omega_{22} - c\omega_{21}(\nu,\nu,\eta_2)\,\gamma_2\eta_{2x}]\,\mathrm{d}\nu, \tag{50}$$

где $R_i,\ i=1,2$ – известные функции.

Доказательство существования непрерывного решения системы (49) – (50) проводится с помощью метода последовательных приближений:

$$\omega_{21}^{n+1} = \varphi_1''(\eta_1)\,\eta_{1x} + R_1 +$$

$$+\int\limits_0^s [(\partial_u f_1 - 2a\gamma_1 - b\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1))\omega_{21}^n + (\partial_v f_1 - b\gamma_1)\omega_{22}^n(\nu,\nu,\eta_1)\,\eta_{1x}]d\nu,$$

$$\omega_{22}^{n+1} = \varphi_2''(\eta_2)\,\eta_{2x} + R_2 +$$

$$+\int\limits_0^s [(\partial_v f_2 - 2g\gamma_2 - c\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2))\omega_{22}^n - c\omega_{21}^n(\nu,\nu,\eta_2)\,\gamma_2\eta_{2x}]\,\mathrm{d}\nu.$$

При выполнении условий (30) в области Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\left\|\omega_{2i}^{n+1}\right\| \leqslant 5C_\varphi,\ i=1,2.$$

Последовательные приближения $\{\omega_{2i}^n\},\ i=1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (49) – (50) в области Γ_{T_2} при выполнении условий (30), так как выполняется неравенство:

$$\left\|\omega_{21}^{n+1}-\omega_{21}^n\right\| + \left\|\omega_{22}^{n+1}-\omega_{22}^n\right\| \leqslant 0.7(\left\|\omega_{21}^n-\omega_{21}^{n-1}\right\| + \left\|\omega_{22}^n-\omega_{22}^{n-1}\right\|).$$

Из неравенства

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\| < (0.7)^p(\left\|\gamma_{1x}^N-\omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^N-\omega_{22}\right\|) + 4\varepsilon$$

следует, что$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\| \to 0$ при $N\to\infty, p\to\infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{ix}{}^n = \omega_{2i},\ i=1,2$. Следовательно, существует непрерывная производная по x у решения системы (45), (46), $\gamma_{ix} = \frac{\partial\gamma_i}{\partial x} = \omega_{2i}$, и справедливы оценки:

$$\|\gamma_{ix}\| \leqslant 5C_\varphi,\ i=1,2.$$

Так же, как и в статье [2] доказано существование непрерывной производной по t у решения системы (45)–(46). Так как существует непрерывно дифференцируемое решение задачи (45)–(46), то $\gamma_1(t,t,x)=p(t,x)=\partial_x u,\ \gamma_2(t,t,x)=q(t,x)=\partial_x v$.

Из (14) – (17) следуют оценки: $\|w_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i=1,2$, следовательно,

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \qquad (51) – (52)$$

Из (42) – (43) следует:

$$\gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a\gamma_1 + b\gamma_2 - \partial_u f_1)\,d\nu) +$$

$$+\int\limits_0^s (\partial_x f_1 + \gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)\,\partial_v f_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a\gamma_1 + b\gamma_2 - \partial_u f_1)\,d\nu)d\tau,$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (c\gamma_1 + g\gamma_2 - \partial_v f_2)\,d\nu) +$$

$$+\int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp(-\int\limits_\tau^s (c\gamma_1 + g\gamma_2 - \partial_v f_2)\, d\nu) d\tau.$$

При выполнении условий (30) получаем:

$$\|\gamma_2\| \leqslant (C_\varphi + TN_f) \exp(TN_f),$$

$$\|\gamma_1\| \leqslant (C_\varphi + TN_f + TN_f(C_\varphi + TN_f) \exp(TN_f)) \exp(TN_f),$$

$$\|\partial_x u\| \leqslant (C_\varphi + TN_f + TN_f(C_\varphi + TN_f) \exp(TN_f)) \exp(TN_f), \tag{53}$$

$$\|\partial_x v\| \leqslant (C_\varphi + TN_f) \exp(TN_f). \tag{54}$$

Установлено, что при всех t и x справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leqslant E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{55}$$

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \leqslant E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{56}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки (51) – (56) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Взяв в качестве начальных значений $u(T_0, x),\ v(T_0, x)$, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, беря начальные значения $u(T_1, x),\ v(T_1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x u\|$, $\|\partial_x v\|$, которые ограничены глобальными оценками (53) – (54), справедливыми на любом промежутке разрешимости. Для вторых производных справедливы оценки (55), (56), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения задачи Коши (1), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Общий итог исследования представим в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1), i = 1, 2,\ f_1 \in \bar{C}^{2,2,2,2}(Z_{TK}),\ f_2 \in \bar{C}^{2,2,2}(V_{TK})$, где $K = C_\varphi + TC_f$, и выполняются условия (30). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1) – (2) имеет единственное решение $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (14) – (17).*

Заключение

Метод дополнительного аргумента позволил определить условия, обеспечивающие нелокальное существование ограниченного решения задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями.

Список литературы

[1] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

[2] Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2013. № 3(177). С. 190–201.

[3] Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16–21.

[4] Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Круц К.Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 142–147.

[5] Шемякина Т.А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2012. № 2(146). С. 130–131.

[6] Алексеенко С.Н., Донцова М.В. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2012. № 14. С. 34–41.

[7] Алексеенко С.Н., Донцова М.В. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2013. № 15. С. 52–59.

[8] Донцова М.В. Условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки. Н. Новгород: НИУ РАНХИГС, 2013.

Библиографическая ссылка

Донцова М.В. Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 21–36.

Сведения об авторах

1. **Донцова Марина Владимировна**
аспирант кафедры математики и математического образования Нижегородского государственного педагогического университета имени К. Минина.

Россия, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 1, Мининский университет. E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru.

THE NONLOCAL EXISTENCE OF A BOUNDED SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTINUOUS AND BOUNDED RIGHT-HAND SIDES

Dontsova Marina Vladimirovna
Postgraduate student of Mathematics and Mathematical Education department,
K. Minin State Pedagogical University of Nizhnii Novgorod
Russia, 603950, Nizhnii Novgorod, 1 Ulyanov str.
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Received 17.01.2014, revised 25.09.2014.

The conditions which provide the nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides are determined. The proof of the nonlocal resolvability relies on global estimates.

Keywords: first order partial differential equations, method of an additional argument, Cauchy problem, global estimates.

Bibliographic citation

Dontsova M.V. The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 21–36. (in Russian)