УДК 519.248:[33+301]

ДИНАМИКА КАПИТАЛА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА С ИНВЕСТИЦИЯМИ

Хохлов Ю.С.[1], Гафурова Э.Н.[2], Дубинина Ю.С.[2]
[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[2]Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 24.05.2014, после переработки 02.06.2014.

Получено стохастическое дифференциальное уравнение для капитала страховой компании в модели коллективного риска, в которой производятся инвестиции как в рисковые, так и в безрисковые активы, и выписано в явном виде его решение. Получены верхние и нижние оценки для вероятности разорения.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, коллективная модель риска с инвестициями, оценивание вероятности разорения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 55–63.

Введение

Одним из актуальных вопросов в развитии финансовой деятельности в Российской Федерации является эволюция рынка страховых услуг. В современном мире страхование является важнейшим стабилизатором процессов общественного воспроизводства. Финансовые резервы, накопленные в страховых активах, являются значительной основой инвестиций в экономику страны. В экономически развитых странах инвестиции страховых компании по мощности и размерам не уступают таким крупным кредитно-финансовым учреждениям, как инвестиционные фонды и банки. Эффективное функционирование страховой компании обеспечивается инвестиционной деятельностью страхователя на микроуровне за счет создания достаточного страхового фонда. Это относится к тем видам страхования, в которых при расчете тарифа учитывается прибыль от инвестиций, например страхование жизни, или в том случае, когда страховые обязательства выражаются через денежные единицы в отличии от тех, где создаются страховые резервы.

Большинство моделей математической теории страхования (актуарной математики) созданы для ситуаций, когда не учитывается инвестиционная деятельность страховой компании. Такой подход приводит к неправильным оценкам эффективности деятельности компании. Одним из наиболее популярных показателей эффективности страховой компании является так называемая вероятность разорения.

Наиболее сильные результаты по оценкам вероятности разорения получены в рамках классической коллективной модели риска Крамера-Лундберга, в которой динамика капитала страховой компании описывается следующим уравнением:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j = u + ct - S(t)\ , t \geq 0\ , \tag{1}$$

где u – величина начального капитала компании, c – скорость поступления взносов (премий), $(N(t), t \geq 0)$ – число поступивших к моменту времени t исков, $\{Z_j\}$ – величины поступивших исков. В классической коллективной модели риска предполагается, что $(N(t), t \geq 0)$ есть однородный процесс Пуассона с параметром λ, а величины исков независимы и одинаково распределены [1].

Если в некоторый момент времени величина капитала становится отрицательной, то говорят, что наступает разорение страховой компании. Величина

$$\tau := \inf(t > 0 : R(t) < 0)$$

называется моментом разорения. Обычно наибольший интерес представляет вероятность разорения

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | R(0) = u) \tag{2}$$

как фунция от величины начального капитала. Оценкам этой величины посвящено большое число журнальных статей и несколько монографий (см., например, [2], [3]). В классической коллективной модели риска получен следующий замечательный результат (см. [1]):

$$\psi(u) = \frac{e^{-R\cdot u}}{M\left(e^{-R\cdot R(\tau)} | \tau < \infty\right)}\ , \tag{3}$$

где $R > 0$ есть положительный корень уравнения:

$$\lambda + c \cdot r = \lambda \cdot M_Z(r).$$

Здесь $M_Z(r)$ – порождающая функция моментов случайных величин Z_j. Наибольшую трудность представляет вычисление величины в знаменателе. Но нетрудно видеть, что она всегда больше 1. Отсюда получаем хорошо известное неравенство Лундберга:

$$\psi(u) \leq e^{-R\cdot u}\ .$$

Но эти результаты получены без учета инвестиционной деятельности страховой компании, которая оказывает большое влияние на финансовую устойчивость компании, в частности, на величину вероятности разорения. В последнее время оценкам вероятности разорения в моделях в учетом инвестиций уделялось повышенное внимание. Опубликовано большое число журнальных статей, написано несколько диссертаций (см., например, [4], [5]). Но, к сожалению, получить результат, аналогичный представлению (3), не удается. Вместо этого получают оценки для вероятности разорения. Например, в работе [6] в модели, где допукаются инвестиции только в рисковые активы, получены асимптотические верхние и нижние оценки для вероятности разорения в случае больших значений начального капитала.

В нашей работе мы рассматриваем модель, в которой допустимы инвестиции как в рисковые, так и безрисковые активы. То есть это некоторое обобщение модели из работы [6]. Основным результатом является явное решение стохастического дифференциального уравнения для полного капитала страховой компании. Это позволило показать, что наша модель после пересчета параметров сводится к модели из работы [6]. Это позволяет воспользоваться результатами из этой работы и получить оценки вероятности разорения и в нашей ситуации.

1. Описание модели

Пусть страховая компания имеет возможность инвестировать начальный капитал как в рисковые, так и безрисковые активы. Обычно предполагают, что эволюция цен рисковых активов описывается следующим уравнением:

$$dS(t) = S(t)\left[\mu dt + \sigma dW(t)\right], \tag{4}$$

а динамика цен безрисковых активов описывается уравнением:

$$dC(t) = r \cdot C(t)dt, \tag{5}$$

где μ – ожидаемая доходность акций, $\sigma > 0$ – волатильность акций; $(W(t), t \geq 0)$ – стандартный винеровский процесс; $C(t)$ – величина банковского счета в момент времени t; r – процентная ставка $(0 < r < \mu)$. Обозначим через $\alpha(t)$ долю общего капитала в рисковых активах, $(1 - \alpha(t))$ – долю банковского счета в портфеле компании. $X(t)$ – полный капитал страховой компании в описанных условиях. Далее мы рассматриваем простейшую ситуацию, когда эти доли не меняются со временем: $\alpha(t) = \alpha$. Тогда можно показать, что уравнение динамики капитала имеет следующий вид [4]:

$$dX(t) = \left[(\alpha \cdot \mu + (1-\alpha) \cdot r)\, dt + \alpha \cdot \sigma \cdot dW(t)\right] X(t) + dR(t). \tag{6}$$

2. Решение стохастического дифференциального уравнения

В этом разделе мы получаем явное представление для решения уравнения (6). Обозначим $\beta = \alpha \cdot \mu + (1-\alpha) \cdot r$, $\gamma = \alpha \cdot \sigma$. Тогда, с учетом уравнений (1) и (6) и введенных обозначений, мы приходим к следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX(t) = X(t)\left[\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)\right] + c \cdot dt - dS(t)\ , t > 0\ , X(0) = u. \tag{7}$$

Рассмотрим следующее вспомогательное уравнение:

$$dB(t,s) = B(t,s)\left[\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)\right]\ \ , t > s\ , B(s,s) = 1. \tag{8}$$

Это уравнение легко решается с помощью формулы Ито и его решение имеет вид (см. [7]):

$$B(t,s) = exp\left\{\left(\beta - \frac{\gamma^2}{2}\right)(t-s) + \gamma\left[W(t) - W(s)\right]\right\}. \tag{9}$$

Обозначим $B(t) = B(t,0)$. Это есть так называемое геометрическое броуновское движение. Из соотношения (8) легко следует, что $B(t,s) = B(t)/B(s)$.

Следующий результат является основным в нашей работе.

Теорема 1. *Решение уравнения (7) имеет следующий вид:*

$$X(t) = B(t) \cdot u + c \cdot \int_0^t B(t,s)ds - \sum_{j=0}^{N(t)} Z_j \cdot B(t, \nu_j), \tag{10}$$

где ν_j есть момент поступления j-го иска.

Доказательство. Обозначим

$$X_1(t) := B(t) \cdot u \ , X_2(t) := c \cdot \int_0^t B(t,s)ds,$$

$$N^*(t) := \sum_{j=0}^{N(t)} Z_j \ , X_3(t) := \cdot \int_0^t B(t,s)dN^*(s).$$

Тогда в силу (10) получаем соотношение:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) - X_3(t). \tag{11}$$

Продифференцируем это выражение почленно. В силу (8) имеем

$$dX_1(t) = X_1(t) \cdot [\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)]\,. \tag{12}$$

Далее

$$X_2(t) = c \cdot B(t) \cdot \int_0^t \frac{ds}{B(s)} = c \cdot Y_1(t) \cdot Y_2(t).$$

В силу (8)

$$dY_1(t) = Y_1(t) \cdot [\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)]\,.$$

По определению стохастического дифференциала

$$dY_2(t) = \frac{dt}{B(t)}.$$

Применяя формулу Ито (см. [7]), получаем

$$dX_2(t) = X_2(t) \cdot [\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)] + c \cdot dt. \tag{13}$$

В случае третьего слагаемого ситуация сложнее, поэтому рассмотрим ее подробнее. $X_3(t)$ можно записать в виде

$$X_3(t) = Z_1(t) \cdot Z_2(t),$$

где

$$Z_1(t) = B(t), \ \ Z_2(t) = \int_0^t \frac{1}{B\,(s)} dN^*(s).$$

Рассмотрим векторный процесс

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Компоненту $Z_2(t)$ перепишем в виде

$$Z_2(t) = \int_0^t \int_{R_0^1} \frac{u}{B\,(s)}\, N\,(ds, du) = \lambda \cdot a \cdot \int_0^t \frac{ds}{B\,(s)} + \int_0^t \int_{R_0^1} \frac{u}{B\,(s)}\, N_0\,(ds, du)\,,$$

где $N\,(ds, du)$ – пуассоновская случайная мера, порожденная процессом $N^*(t)$, $N_0\,(ds, du)$ – соответствующая центрированная мера, $a = E(Z_j)$.

В монографии [8] можно найти следующий вариант обобщенной многомерной формулы Ито. Пусть мы имеем многомерный процесс $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_m(t))^T$, который имеет следующее представление:

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t X(s)ds + \int_0^t Y_1(s)dW(s) + \int_0^t \int_{R_0^1} Y_2(s, u)N_0(ds, du),$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс в R^m, $N_0(ds, du)$ – центрированная пуассоновская мера, которая не зависит от процесса W. Пусть $u = \varphi(z, t)$ есть вещественная, дважды непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим новый случайный процесс $U(t) = \varphi(Z(t), t)$. Тогда

$$dU(t) = \left\{ \varphi_t(Z(t), t) + \varphi_z(Z(t), t)^T \cdot X(t) + \frac{1}{2} tr[\varphi_{zz}(Z(t), t) \cdot Y_1(t) \cdot Y_1(t)^T] \right\} dt+$$

$$\int_{R_0^m} [\varphi(Z(t) + Y_2(t, u), t) - \varphi(Z(t), t) - \varphi_z(Z(t), t)^T \cdot Y_2(t, u)]\mu_N(dt, du)+$$

$$\varphi_z(Z(t), t)^T \cdot Y_1(t)dW(t) + \int_{R_0^m} [\varphi(Z(t) + Y_2(t, u), t) - \varphi(Z(t), t)]N_0(dt, du).$$

В нашем случае $m = 2$, $\varphi(z, t) = z_1 \cdot z_2$,

$$X_1(t) = \beta \cdot B(t),\ X_2(t) = \frac{\lambda a}{B(t)},$$

$$Y_{11}(t) = \gamma \cdot B(t),\ Y_{12}(t) = 0,$$

$$Y_{21}(t, u) = 0,\ Y_{22}(t, u) = \frac{u}{B(t)}.$$

Подставляя это в обобщенную формулу Ито, получаем:

$$dX_3(t) = X_3(t) \cdot [\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)] + dN^*(t). \tag{14}$$

Собирая вместе выражения (12), (13) и (14) и учитывая соотношение (11), окончательно получаем:

$$dX(t) = X(t) \cdot [\beta \cdot dt + \gamma \cdot dW(t)] + c \cdot dt - dN^*(t).$$

Теорема 1 доказана. □

3. Оценка вероятности разорения

В работе [6] рассматривается аналогичная задача для случая, когда допускаются инвестиции только в рисковые активы. В этом случае динамика капитала страховой компании удовлетворяет уравнению

$$dX(t) = X(t)\left[\mu_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot dW(t)\right] + c \cdot dt - dS(t)\ , t > 0\ , X(0) = u. \tag{15}$$

Это совпадает с уравнением (7), если положить $\mu_1 = \beta = \alpha \cdot \mu + (1-\alpha)\cdot r$, $\sigma_1 = \gamma = \alpha \cdot \sigma$.

Таким образом, переобозначая параметры, мы сводим нашу модель к случаю, когда используются только инвестиции в рисковые активы. Теперь мы можем применить результаты из работы [6] для получения оценок для вероятности разорения. В [6] при указанных выше условиях были получены следующие результаты.

Пусть

$$b := \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} - 1.$$

Определим функцию:

$$J(b) = \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2 b^2}\left(1_{\{0<b\le 1\}} + j_1 1_{\{1<b\le 2\}} + j_2 1_{\{b>2\}}\right),$$

где

$$j_1(b) = b\left(1+\varrho^{-1}\right),\ j_2(b) = b \cdot 2^{b-2}\left(1 + \left((1+\varrho)^{\frac{1}{b-1}} - 1\right)^{1-b}\right),$$

$$\varrho = \varrho(b) = \frac{(b-1)\sigma_1^2}{2\mu_1}.$$

Теорема 2. *Если $b > 0$ и $E\left[Z_1^b\right] < \infty$, тогда*

$$\lim_{u\to\infty} \sup u^b \psi(u) \le C^*(b),$$

где $C^*(b) = J(b) E Z_1^b$.

Теорема 3. *Если $b > 0$ и $E\left[Z_1^{b+\delta}\right] < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, тогда существует константа $0 < C_* < \infty$ такая, что:*

$$\lim_{u\to\infty} \inf u^b \psi(u) \geqslant C_*.$$

Теорема 4. *Предположим, что $\mathsf{P}\{Z_1 > z\} > 0,\ \forall z \in \mathbf{R}$. Если*

$$E\left[Z_1^{b+\delta}\right] < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$, тогда $\psi(u) = 1,\ \forall u \geqslant 0$.

Заключение

В настоящей работе получено явное решение стохастического дифференциального уравнения, которому удовлетворяет величина капитала страховой компании в

коллективной модели риска с учетом инвестиций. Показано, что эта задача может быть сведена к эквивалентной задаче, в которой допустимы инвестиции только в рисковые активы. Далее, используя это представление, получены верхние и нижние оценки для вероятности разорения.

Список литературы

[1] Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001. 656 с.

[2] Калашников В.В., Константинидис Д.Г. Вероятность разорения // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1055–1100.

[3] Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific, 2000. 385 p.

[4] Куркина А.О. Стохастические модели управления инвестициями страховой компании без использования заимствований: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МИЭМ, 2011. 138 с.

[5] Громов А.Н. Оптимальные стратегии перестрахования и инвестирования в стохастических моделях риска: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2014. 109 с.

[6] Pergamenshchikov S., Zeitouny O. Ruin probability in the presence of risky investments // Stochastic Processes and their Applications. 2006. Vol. 116. Pp. 267–278.

[7] Oksendal B. Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 332 p.

[8] Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006. 643 с.

Библиографическая ссылка

Хохлов Ю.С., Гафурова Э.Н., Дубинина Ю.С. Динамика капитала страховой компании в модели коллективного риска с инвестициями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 55–63.

Сведения об авторах

1. **Хохлов Юрий Степанович**
   профессор кафедры математической статистики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: yskhokhlov@yandex.ru.

2. **Гафурова Элина Наиловна**
   магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

   Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6, РУДН. E-mail: cheese_007@mail.ru.

3. **Дубинина Юлия Сергеевна**
аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6, РУДН.
E-mail: jdubinina@mail.ru.

DYNAMICS OF INSURANSE COMPANY CAPITAL IN COLLECTIVE RISK MODEL WITH INVESTMENTS

Khokhlov Yury Stepanovich
Professor of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorob'evy Gory, Lomonosov MSU.
E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Gafurova Elina Nailovna
Master student of Probability Theory and Mathematical Statistics department,
Peoples' Friendship University of Russia
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., PFUR.
E-mail: cheese_007@mail.ru

Dubinina Yulia Sergeevna
PhD student of Probability Theory and Mathematical Statistics department,
Peoples' Friendship University of Russia
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., PFUR.
E-mail: jdubinina@mail.ru

Received 24.05.2014, revised 02.06.2014.

Stochastic differential equation for the capital of insurance company in the collective risk model with risky and riskless investments and its explicit representation are obtained. Upper and lower estimates of ruin probability are obtained.

Keywords: stochastic differential equations, collective risk model with investments, estimation of ruin probability.

Bibliographic citation

Khokhlov Yu.S., Gafurova E.N., Dubinina Yu.S. Dynamics of insurance company capital in collective risk model with investments. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 55–63. (in Russian)