СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ДИВЕРСИФИКАЦИИ

Целищев М.А.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 27.09.2014, после переработки 30.09.2014.

Настоящая работа является продолжением формализации понятия диверсификации инвестиционных портфелей, начатой в [1]. Обобщение проходит в два этапа. На первом шаге используется отношение стохастической доминации первого порядка. На втором шаге строится замыкание бинарного отношения по произвольной метрике в пространстве вероятностных распределений на действительной прямой. Подробно рассмотрен случай замыкания по метрике Канторовича в пространстве распределений с конечным первым моментом. Доказан критерий построенного отношения.

Ключевые слова: диверсификация, сравнение инвестиционных портфелей, стохастическая доминация, метрика Канторовича, мера риска Expected Shortfall.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 77–93.

Введение

В статье [1] было предложено и обосновано формальное определение понятия диверсификации как бинарного отношения предпочтения в классе вероятностных распределений на действительной прямой.

Определение 1. *Распределение ξ является результатом диверсификации распределения η ($\xi \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$), если для некоторого натурального n существует такое многомерное распределение $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, что маргинальные распределения этого вектора совпадают с распределением η, и некоторая выпуклая линейная комбинация компонент этого вектора совпадает с распределением ξ, то есть*

$$\eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \eta, \quad i = 1, \ldots, n$$

и

$$\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \quad \text{для некоторого набора } a_1 \geqslant 0, \ldots, a_n \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Напомним, что здесь не обязательно рассматривать ξ и η как случайные величины, а $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ как случайный вектор на некотором вероятностом пространстве. Фактически, в определении сравниваются вероятностные распределения на действительной прямой (более точно, на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$), а вектор $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ можно понимать как некоторое вероятностное распределение на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, обладающее указанными выше свойствами.

При этом распределение ξ (равно как и η) называлось инвестиционным портфелем и интерпретировалось как возврат средств в некоторый момент времени T (при закрытии всех позиций) от вложения всего капитала инвестора в нулевой момент времени в некоторую группу финансовых инструментов.

В [1] было доказано, что отношение $\overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq}$ есть частичная упорядоченность в классе вероятностных распределений с конечным первым моментом на действительной прямой.

Настоящая работа есть продолжение статьи [1]. Мы рассмотрим некоторые обобщения введенного определения и построим критерий для одного из таких обобщений.

Всюду далее $\mathcal{P}$ обозначает класс всех вероятностных мер на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а $\mathcal{P}_r$ – класс всех вероятностных мер с конечным r-м абсолютным моментом $(r > 0)$ на этом же измеримом пространстве.

1. Первое обобщение. Стохастическая доминация

Легко заметить, что предложенное определение отношения диверсификации заведомо не позволяет сравнивать портфели с разными математическими ожиданиями. В этом разделе вводится первое обобщение, позволяющее сравнивать некоторые (но далеко не все) портфели с разными математическими ожиданиями. Для этого использовано хорошо известное отношение стохастической доминации первого порядка.

Определение 2. *Говорят, что распределение $\xi \in \mathcal{P}$ с функцией распределения F_ξ стохастически доминирует над распределением $\eta \in \mathcal{P}$ с функцией распределения F_η по первому порядку (обозначается $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$, $F_\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} F_\eta$), если $F_\xi(x) \leqslant F_\eta(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Элементарно проверяется, что бинарное отношение $\overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq}$ обладает свойствами

- рефлексивности: $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi$ для любого $\xi \in \mathcal{P}$;
- антисимметричности: $\xi_1 \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_2,\ \xi_2 \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_1 \ \Rightarrow\ F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то есть $\xi_1 \overset{\mathrm{d}}{=} \xi_2$;
- транзитивности: $\xi_1 \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_2 \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_3 \ \Rightarrow\ \xi_1 \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_3$.

Таким образом, отношение $\overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq}$ является частичной упорядоченностью на $\mathcal{P}$.

Определение 3. *Будем говорить, что инвестиционный портфель ξ является диверсификацией инвестиционного портфеля η с положительной добавкой (и обозначать это отношение как $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$), если существует такое распределение ξ_0, что $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0 \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$.*

Выбор такого названия станет ясен дальше из альтернативного определения, эквивалентного данному. Как нетрудно видеть, новое определение действительно обобщает старое, то есть если $\xi \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$, то $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$. Достаточно в качестве ξ_0 взять само распределение ξ.

Для построения эквивалентного определения покажем справедливость следующего критерия стохастической доминации первого порядка.

Теорема 1. *Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$;
2. *$q_\alpha(\xi) \geqslant q_\alpha(\eta)$ для всех $\alpha \in (0,1)$, где $q_\alpha(\xi) = \inf\bigl\{x \mid F_\xi(x) \geqslant \alpha\bigr\}$ — нижняя квантильная функция распределения ξ;*
3. *существует совместное распределение $(\eta', \Delta\xi)$, такое что $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \eta' + \Delta\xi$, причем $\eta' \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$, а $\Delta\xi \geqslant 0$.*

Доказательство. Будем доказывать импликации 1⇒2, 2⇒3, 3⇒1 по очереди.

Пусть $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$, то есть $F_\xi(x) \leqslant F_\eta(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\bigl\{x \mid F_\xi(x) \geqslant \alpha\bigr\} \subseteq \bigl\{x \mid F_\eta(x) \geqslant \alpha\bigr\} \text{ для всех } \alpha \in (0,1).$$

Поэтому

$$q_\alpha(\xi) = \inf\bigl\{x \mid F_\xi(x) \geqslant \alpha\bigr\} \geqslant \inf\bigl\{x \mid F_\eta(x) \geqslant \alpha\bigr\} = q_\alpha(\eta) \text{ для всех } \alpha \in (0,1).$$

Доказательство первой импликации завершено.

Пусть теперь $q_\alpha(\xi) \geqslant q_\alpha(\eta)$ для всех $\alpha \in (0,1)$. На произвольном вероятностном пространстве построим равномерно распределенную на $(0,1)$ случайную величину u. Хорошо известно, что распределение величины $F_\xi^{-1}(u) = q_u(\xi)$ совпадает с распределением ξ и, аналогично, распределение величины $F_\eta^{-1}(u) = q_u(\eta)$ совпадает с распределением η. Определим $\eta' = F_\eta^{-1}(u)$, $\Delta\xi = F_\xi^{-1}(u) - F_\eta^{-1}(u) \geqslant 0$. Тогда $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} F_\xi^{-1}(u) = \eta' + \Delta\xi$, и, тем самым, вторая импликация доказана.

Пусть, наконец, $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \eta' + \Delta\xi$, причем $\eta' \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$ и $\Delta\xi \geqslant 0$. Тогда

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x) = \mathsf{P}(\eta' + \Delta\xi \leqslant x) \leqslant \mathsf{P}(\eta' \leqslant x) = F_\eta(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R},$$

и, следовательно, $\xi \overset{1\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$. Теорема доказана. □

Доказанная теорема позволяет построить определение, эквивалентное определению 3.

Определение 4. *Распределение ξ является результатом диверсификации распределения η с положительной добавкой ($\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$), если для некоторого натурального n существует такое многомерное распределение $(\eta_1, \dots, \eta_n, \Delta\xi)$, что маргинальные распределения η_i этого вектора совпадают с распределением η, маргинальное распределение $\Delta\xi$ неотрицательно и некоторая выпуклая линейная комбинация компонент $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ с добавлением $\Delta\xi$ совпадает с распределением ξ, то есть*

$$\eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \eta, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\Delta\xi \geqslant 0$$

и

$$\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i + \Delta\xi \quad \text{для некоторого набора } a_1 \geqslant 0, \dots, a_n \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Теперь должно быть ясно, почему для отношения $\overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq}$ было выбрано такое название.

Оказывается, что многие свойства отношения $\overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq}$ сохраняются для отношения $\overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq}$. К примеру, очевидно, что $\overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq}$ рефлексивно на $\mathcal{P}$. Тем же методом, что и в [1], доказывается и транзитивность отношения $\overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq}$ на $\mathcal{P}$. Остается справедливой и антисимметричность на $\mathcal{P}_1$.

Утверждение 1. *Отношение $\overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq}$ антисимметрично на $\mathcal{P}_1$, т. е. если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$, $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, $\eta \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \xi$, то $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$.*

Доказательство. Пусть $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \Delta\xi)$ и $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \Delta\eta)$ — многомерные распределения, а $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ — веса из альтернативного определения $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$ и $\eta \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \xi$ соответственно. Заметим, что если $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, то

$$\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i + \Delta\xi\right) = \mathsf{E}\eta + \mathsf{E}\Delta\xi \geqslant \mathsf{E}\eta, \ \text{так как } \Delta\xi \geqslant 0.$$

Аналогично, поскольку $\eta \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \xi$, то $\mathsf{E}\eta \geqslant \mathsf{E}\xi$. Таким образом, $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$, а это, в свою очередь, означает, что $\mathsf{E}\Delta\xi = \mathsf{E}\Delta\eta = 0$. Учитывая, что $\Delta\xi \geqslant 0$ и $\Delta\eta \geqslant 0$, получим, что $\Delta\xi = 0$, $\Delta\eta = 0$. Поэтому,

$$\xi \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \xi,$$

а в силу антисимметричности отношения $\overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq}$ на $\mathcal{P}_1$ (см. [1]), $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$. □

Замечание 1. Попутно было доказано, что если $\xi \overset{\mathrm{div+}}{\succcurlyeq} \eta$ и $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$ конечны, то $\xi \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Бинарное отношение* $\overset{\text{div+}}{\succcurlyeq}$ *является частичной упорядоченностью на* $\mathcal{P}_1$.

Другие полезные свойства тоже сохраняются.

Утверждение 2. *Если* $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $c\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} c\eta$ *для всех* $c > 0$.

Доказательство. Пусть $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, то есть существует такое распределение ξ_0, что $\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$. По аналогичному утверждению из [1], $c\xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} c\eta$. Покажем, что $c\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} c\xi_0$. Действительно, в силу того, что $\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0$, имеем:

$$F_{c\,\xi}(x) = F_\xi\left(\frac{x}{c}\right) \leqslant F_\eta\left(\frac{x}{c}\right) = F_{c\,\eta}(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \text{ при } c > 0.$$

Итак, $c\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} c\xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} c\eta$, то есть $c\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} c\eta$. Утверждение доказано. □

Утверждение 3. *Пусть* (ξ, X) *и* (η, X_1) *– два совместных распределения с независимыми компонентами, причем* $X \overset{\text{d}}{=} X_1$. *Тогда если* $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $\xi + X \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta + X_1$.

Доказательство. Пусть $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, то есть существует такое распределение ξ_0, что $\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$. Пусть, далее, (ξ_0', X') – совместное распределение с независимыми компонентами, маргинальные распределения которого выглядят как $\xi_0' \overset{\text{d}}{=} \xi_0$ и $X' \overset{\text{d}}{=} X$. В этом случае, согласно соответствующему утверждению из [1], $\xi_0' + X' \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta + X_1$. Осталось показать, что $\xi + X \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0' + X'$. Действительно, пользуясь представлением функции распределения суммы двух независимых случайных величин в виде свертки маргинальных функций распределения, имеем в силу $\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \xi_0'$ и $X \overset{\text{d}}{=} X'$:

$$F_{\xi+X}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(x-y)\,dF_X(y) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_0'}(x-y)\,dF_{X'}(y) = F_{\xi_0'+X'}(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Утверждение доказано. □

Напомним определение мер риска, чтобы показать связь построенного определения с различными мерами риска.

Определение 5. *Инвариантной по распределению мерой риска* ρ *называется отображение* $\rho\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 6. *Инвариантная по распределению мера риска* ρ *называется выпуклой, если* $\rho(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^n a_i\rho(\xi_i)$ *для произвольного многомерного распределения* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *и весов* $a_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Определение 7. *Инвариантная по распределению мера риска* ρ *называется монотонной, если из того, что* $\xi \overset{1\,\text{sd}}{\succcurlyeq} \eta$, *следует, что* $\rho(\xi) \leqslant \rho(\eta)$.

Утверждение 4. *Если* $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, *то для любой инвариантной по распределению монотонной выпуклой меры риска* ρ *выполняется* $\rho(\xi) \leqslant \rho(\eta)$.

Доказательство. Пусть $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, то есть существует такое распределение ξ_0, что $\xi \overset{\text{1 sd}}{\succcurlyeq} \xi_0 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$. Поскольку ρ – выпуклая, то по соответствующему утверждению из [1], $\rho(\xi_0) \leqslant \rho(\eta)$. Так как ρ еще и монотонная, то $\rho(\xi) \leqslant \rho(\xi_0)$, что и доказывает утверждение. □

2. Дальнейшее обобщение. Замыкание в метрическом пространстве

В этом разделе мы замкнем введенное отношение диверсификации с положительной добавкой по произвольной метрике в пространстве распределений на действительной прямой. Это позволит, например, использовать предельные теоремы для сравнения инвестиционных портфелей. Пусть d — произвольная метрика на $\mathcal{P}$.

Определение 8. *Будем говорить, что* $\xi \overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta$ *(и называть при этом отношение* $\overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq}$ *замыканием отношения диверсификации с положительной добавкой* $\overset{\text{div+}}{\succcurlyeq}$ *по метрике* d*), если существуют такие две последовательности распределений* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ *(где под сходимостью понимается сходимость вероятностных мер по метрике* d*, то есть сходимость в метрическом пространстве* $(\mathcal{P}, d)$ *) и* $\xi_n \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Часто оказывается, что d является метрикой только на некотором $\mathcal{P}_r$ (например, рассматриваемая далее метрика Канторовича на $\mathcal{P}_1$). В этом случае определение остается неизменным, за исключением того обстоятельства, что ξ, η, ξ_n и η_n должны быть распределениями из $\mathcal{P}_r$.

Новое определение действительно обобщает определение 3.

Утверждение 5. *Если* $\xi \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $\xi \overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta$ *для произвольной метрики* d.

Доказательство. Достаточно в качестве элементов последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ взять сами величины ξ и η соответственно. □

Новое определение действительно замкнуто относительно сходимости по метрике d.

Утверждение 6. *Если* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ *и* $\xi_n \overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\xi \overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta$.

Доказательство. По определению $\xi_n \overset{\text{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta_n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно построить такие последовательности $\{\xi_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\xi_{nk} \xrightarrow{d} \xi_n$, $\eta_{nk} \xrightarrow{d} \eta_n$ при $k \to \infty$ и $\xi_{nk} \overset{\text{div+}}{\succcurlyeq} \eta_{nk}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для каждого n можно построить такой номер $K(n)$, что для всех $k \geqslant K(n)$ выполняется $d(\xi_{nk}, \xi_n) < \frac{1}{n}$ и $d(\eta_{nk}, \eta_n) < \frac{1}{n}$. В этом случае, пользуясь неравенством треугольника для метрики d, получим:

$$0 \leqslant d\left(\xi_{n,K(n)}\,,\,\xi\right) \leqslant d\left(\xi_{n,K(n)}\,,\,\xi_n\right) + d\left(\xi_n\,,\,\xi\right) < \frac{1}{n} + d\left(\xi_n\,,\,\xi\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

поскольку $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.
Аналогично,

$$0 \leqslant d\left(\eta_{n,K(n)}\,,\,\eta\right) \leqslant d\left(\eta_{n,K(n)}\,,\,\eta_n\right) + d\left(\eta_n\,,\,\eta\right) < \frac{1}{n} + d\left(\eta_n\,,\,\eta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Как уже было упомянуто, $\xi_{n,K(n)} \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_{n,K(n)}$. Таким образом, построены две последовательности распределений $\{\xi_{n,K(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_{n,K(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящиеся по метрике d к ξ и η соотвественно, и такие, что элементы этих последовательностей с одинаковыми номерами находятся в отношении диверсификации с положительной добавкой. Иначе говоря, $\xi \overset{\mathrm{div}(d)}{\succcurlyeq} \eta$, что и требовалось доказать. □

2.1 Метрика Канторовича

Всюду далее мы будем рассматривать метрическое пространство $(\mathcal{P}_1, \boldsymbol{\kappa})$, где

$$\boldsymbol{\kappa}(\xi,\eta) = \boldsymbol{\kappa}(F_\xi, F_\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|F_\xi(x) - F_\eta(x)\right| dx = \int\limits_0^1 \left|q_p(\xi) - q_p(\eta)\right| dp.$$

Эквивалентность определений доказывается, например, в [3].

Метрическое пространство $(\mathcal{P}_1, \boldsymbol{\kappa})$ обладает рядом хороших качеств. В частности, оно является польским, то есть сепарабельным и полным. Более того, справедливо следующее утверждение, которое является частным случаем более общей теоремы (6.9) в [4].

Утверждение 7. *Сходимость по метрике $\boldsymbol{\kappa}$ в $\mathcal{P}_1$ эквивалентна слабой сходимости плюс сходимости первых абсолютных моментов к первому абсолютному моменту слабого предела, то есть если $\mathsf{E}\,|\xi_n| < \infty$, $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$, то*

$$\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_n \Rightarrow \xi, \quad \mathsf{E}|\xi_n| \to \mathsf{E}|\xi|\,.$$

Следующая теорема доказывает интуитивно ясное представление о том, что математическое ожидание инвестиционного портфеля должно быть не хуже в смысле диверсификации, чем сам портфель.

Теорема 3. *Если $\mathsf{E}|\eta| < \infty$, то $\mathsf{E}\eta \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$.*

Доказательство. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – последовательность н.о.р.с.в., определенных на одном вероятностном пространстве и распределенных так же, как и η. Согласно усиленному закону больших чисел в форме Колмогорова для н.о.р.с.в. с конечными первыми абсолютными моментами, последовательность $\xi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$ сходится почти всюду к $\mathsf{E}\eta$ при $n \to \infty$ (а значит и слабо сходится: $\xi_n \Rightarrow \mathsf{E}\eta$). Более того, можно показать, что имеет место сходимость в среднем порядка 1. Поскольку пространство всех случайных величин с конечным первым моментом на некотором вероятностоном пространстве полное, то достаточно доказать фундаментальность последовательности ξ_n в среднем порядка 1:

$$\mathsf{E}\,|\xi_n - \xi_{n+1}| = \mathsf{E}\left|\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n}\eta_i - \tfrac{1}{n+1}\,\eta_{n+1}\right| = \mathsf{E}\left|\tfrac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\eta_i - \tfrac{1}{n+1}\,\eta_{n+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{n(n+1)} n\,\mathsf{E}\,|\eta| + \tfrac{1}{n+1}\,\mathsf{E}\,|\eta| = \frac{2\,\mathsf{E}|\eta|}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Обозначим $a = \mathsf{E}\xi_n = \mathsf{E}\eta$. Пользуясь теперь сходимостью ξ_n в среднем порядка 1, получим:

$$\big|\mathsf{E}|\xi_n| - |a|\big| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big(\,|x| - |a|\,\big)\,dF_{\xi_n}(x)\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|\,|x| - |a|\,\big|\,dF_{\xi_n}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|x - a\big|\,dF_{\xi_n}(x) = \mathsf{E}\big|\xi_n - a\big| = \|\xi_n - a\|_{L^1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $\mathsf{E}\,|\xi_n| \to |a|$. Учитывая, что ранее была показана слабая сходимость $\xi_n \Rightarrow a$, то, по утверждению 7, $\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} a = \mathsf{E}\eta$.

Очевидно, что $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta$ для всех n. С учетом вышеизложенного, $\mathsf{E}\eta \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$. Теорема доказана. □

Замечание 2. Разумеется, теорему можно обобщить следующим образом. Пусть $\mathsf{E}|\eta| < \infty$. Тогда если $\xi \geqslant \mathsf{E}\eta$ п. в., то $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$.

2.2 Свойства

Убедимся, что замыкание обобщенного отношения диверсификации по метрике Канторовича $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ сохраняет некоторые свойства своего родителя – отношения $\overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq}$.

Утверждение 8. *Если* $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$ *и* $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $\mathsf{E}\xi \geqslant \mathsf{E}\eta$.

Доказательство. По определению $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ существуют две последовательности распределений $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такие что $\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \eta$ и $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Следствием сходимости в метрике Канторовича является сходимость математических ожиданий:

$$|\mathsf{E}\xi - \mathsf{E}\xi_n| = \left|\int_0^1 q_p(\xi)\,dp - \int_0^1 q_p(\xi_n)\,dp\,\right| \leqslant \int_0^1 |q_p(\xi) - q_p(\xi_n)|\,dp = \boldsymbol{\kappa}(\xi, \xi_n) \to 0$$

при $n \to \infty$. Аналогично, $|\mathsf{E}\eta - \mathsf{E}\eta_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Пользуясь свойствами отношения $\overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq}$, а также сходимостью математических ожиданий, получаем

$$\mathsf{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\xi_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\eta.$$

□

Утверждение 9. *Если* $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$ *и* $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $c\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} c\eta$ *для всех* $c > 0$.

Доказательство. По определению отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ существуют две последовательности распределений $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такие что $\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \eta$ и $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Согласно утверждению 2, $c\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} c\eta_n$ для произвольного $c > 0$. Поскольку $c\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} c\xi$ и $c\eta_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} c\eta$, то $c\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} c\eta$. □

Утверждение 10. *Пусть* $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$ *и* $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$. *Тогда если* $\mathsf{E}|X| < \infty$ *и* X *стохастически не зависит от* ξ *и от* η, *то* $\xi + X \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta + X$.

Доказательство. По определению отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ существуют две последовательности распределений $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такие что $\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \eta$ и $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что X стохастически не зависит от ξ_n и η_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ (иначе строим такое $X' \overset{\mathrm{d}}{=} X$, что оно не зависит от ξ, ξ_n, η и η_n). По утверждению 3 $\xi_n + X \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n + X$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Остается показать, что $\xi_n + X \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi + X$ и $\eta_n + X \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \eta + X$, причем доказываются эти сходимости аналогично (поэтому докажем только первую). По формуле свертки

$$\boldsymbol{\kappa}(\xi_n + X, \xi + X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_{\xi_n+X}(x) - F_{\xi+X}(x)\right| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_n}(x-y)\, dF_X(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(x-y)\, dF_X(y) \right| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_{\xi_n}(x-y) - F_{\xi}(x-y)\right) dF_X(y) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_{\xi_n}(x-y) - F_{\xi}(x-y)\right| dx\, dF_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\kappa}(\xi_n, \xi)\, dF_X(y) = \boldsymbol{\kappa}(\xi_n, \xi) \to 0,$$

что и требовалось. Утверждение доказано. □

2.3 Связь с мерами риска

Если заданы два распределения ξ и η, то, пользуясь только определением, весьма сложно выяснить, выполняется или нет между ними отношение $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$. В этом подразделе доказывается критерий бинарного отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$, проверить который гораздо проще. Этот критерий напрямую связан с мерой риска *Expected Shortfall*, которая уже использовалась для доказательства антисимметричности отношения $\overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq}$ на $\mathcal{P}_1$ в статье [1]. Напомним ее определение:

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi) = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\gamma q_\alpha(\xi)\,d\alpha\ ,\ \gamma \in (0,1], \tag{1}$$

где, как и раньше,

$$q_\alpha(\xi) = \inf\bigl\{x \mid F_\xi(x) \geqslant \alpha\bigr\},\ \alpha \in (0,1) \tag{2}$$

– нижняя квантильная функция распределения ξ. Больше информации по этой мере риска можно найти, например, в [2] и [3]. Следует, однако, заметить, что в [3] мера риска Expected Shortfall называется AVaR (*Average Value-at-Risk*).

Прежде чем перейти к основной теореме, докажем вспомогательные утверждения.

Предположим, дано произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \varnothing$, $\Delta \in \mathbb{R}$. Обозначим за $D_{A,B,\Delta}$ оператор, действующий в пространстве случайных величин, определенных на данном вероятностном пространстве, по правилу

$$D_{A,B,\Delta}\,\eta(\omega) = \begin{cases} \eta(\omega) + \Delta, & \text{если } \omega \in A; \\ \eta(\omega) - \Delta, & \text{если } \omega \in B; \\ \eta(\omega), & \text{если } \omega \in \overline{A \cup B}. \end{cases}$$

Утверждение 11. *Если* $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) > 0$, $a < b$, $0 \leqslant \Delta \leqslant b - a$, *и*

$$\eta(\omega) = \begin{cases} a, & \textit{при } \omega \in A; \\ b, & \textit{при } \omega \in B; \end{cases}$$

то $D_{A,B,\Delta}\,\eta \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$.

Доказательство. Определим

$$\eta'(\omega) = \begin{cases} b, & \text{если } \omega \in A; \\ a, & \text{если } \omega \in B; \\ \eta(\omega), & \text{если } \omega \in \overline{A \cup B}. \end{cases}$$

Очевидно, $\eta' \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$. Возьмем $\alpha = \frac{b-a-\Delta}{b-a}$. Заметим, что $\alpha \in [0,1]$. При этом легко проверяется равенство

$$\alpha\,\eta + (1-\alpha)\eta' = D_{A,B,\Delta}\,\eta.$$

Тем самым, $D_{A,B,\Delta}\,\eta \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$. □

Теорема 4. *Пусть ξ и η — простые распределения, принимающие свои значения с **рациональными** вероятностями. Тогда если $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех $\gamma \in (0,1]$, то $\xi \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta$. Если, к тому же, $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$ (или, что то же самое, $\mathrm{ES}_1(\xi) = \mathrm{ES}_1(\eta)$), то $\xi \overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq} \eta$.*

Доказательство. Пусть ξ принимает значения $a_1 < a_2 < \ldots < a_e$ с вероятностями $\frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \ldots, \frac{r_e}{n}$, а η принимает значения $b_1 < b_2 < \ldots < b_l$ с вероятностями $\frac{s_1}{n}, \frac{s_2}{n}, \ldots, \frac{s_l}{n}$, где все дроби приведены к одному знаменателю $n \in \mathbb{N}$ (то есть $r_1, \ldots, r_e, s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{N}$).

Будем считать, что случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ определены на вероятностом пространстве $\big((0,1],\ \mathcal{B}(0,1],\ \lambda\big)$ и не убывают по аргументу $\omega \in (0,1]$, а также непрерывны слева. Это предположение не ограничивает общности рассуждения, поскольку как ES_γ, так и отношения диверсификации ($\overset{\mathrm{div}}{\succcurlyeq}$ и $\overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq}$) зависят только от распределений случайных величин. При этом, как несложно заметить, так определенные случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ совпадают со своими нижними квантильными функциями:

$$\xi(\omega) = q_\omega(\xi), \quad \eta(\omega) = q_\omega(\eta), \quad \omega \in (0,1].$$

Разделим множество элементарных исходов, то есть полуинтервал $(0,1]$, на непересекающиеся подмножества $A_1 = (0, \frac{1}{n}]$, $A_2 = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\ldots$, $A_{n-1} = (\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}]$, $A_n = (\frac{n-1}{n}, 1]$. На каждом из них случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ постоянны (по построению и условию теоремы) и принимают значения, скажем, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ соответственно.

С учетом вышесказанного

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi) = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\gamma q_\omega(\xi)\,d\omega = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\gamma \xi(\omega)\,d\omega, \quad \gamma \in (0,1].$$

Аналогично для η:

$$\mathrm{ES}_\gamma(\eta) = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\gamma \eta(\omega)\,d\omega, \quad \gamma \in (0,1].$$

Неравенства $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех $\gamma \in (0,1]$ превращаются, таким образом, в

$$\int\limits_0^\gamma \xi(\omega)\,d\omega \geqslant \int\limits_0^\gamma \eta(\omega)\,d\omega, \quad \gamma \in (0,1]. \tag{3}$$

Выбирая в качестве γ значения $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$, получаем:

$$\sum_{i=1}^k x_i \geqslant \sum_{i=1}^k y_i \quad \text{для каждого} \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Если обозначить за $\Delta_i = x_i - y_i$, $i = 1, \ldots, n$, то последнюю серию неравенств можно, очевидно, записать в виде $\sum\limits_{i=1}^k \Delta_i \geqslant 0$ для каждого $k = 1, \ldots, n$.

Далее за n шагов будет построена последовательность случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, такая что $\eta_n \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta_{n-1} \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \ldots \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta_1 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$ и $\xi \geqslant \eta_n$. Таким образом, будет показано, что $\xi \overset{\text{div}+}{\succcurlyeq} \eta$.

<u>Шаг 1</u>. Если $x_n \geqslant y_n$, то определим $\eta_1 = \eta$ и переходим к шагу 2. Если же $x_n < y_n$, то действуем следующим образом. Пусть $I_1 = \big\{i \in [1, n-1] \colon \Delta_i > 0\big\}$ — номера тех полуинтервалов A_i, где значение ξ превосходит значение η, то есть $x_i > y_i$. Ради определенности, положим, $I_1 = \big\{k_1, \ldots, k_m\big\}$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n-1$. Аналогично, пусть $I_1' = \big\{i \in [1, n-1] \colon \Delta_i \leqslant 0\big\}$. Поскольку для $i \in I_1'$ выполнено $x_i \leqslant y_i$, то

$$\sum_{j=1}^{m}\big(x_{k_j} - y_{k_j}\big) = \sum_{i\in I_1}(x_i - y_i) \geqslant \sum_{i\in I_1}(x_i - y_i) + \sum_{i\in I_1'}(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i) \geqslant y_n - x_n. \quad (5)$$

Последнее неравенство следует из (4) при $k = n$.

Из (5) следует, что найдется такой номер $t \in [1, m]$, для которого

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=t}^{m}\big(x_{k_j} - y_{k_j}\big) \geqslant y_n - x_n; \\ \displaystyle\sum_{j=t+1}^{m}\big(x_{k_j} - y_{k_j}\big) < y_n - x_n. \end{cases}$$

Теперь мы можем определить

$$\eta_1 = D_{A_{k_t}, A_n, \Delta_n - \Delta_{k_m} - \ldots - \Delta_{k_{t+1}}}\left[D_{A_{k_{t+1}}, A_n, \Delta_{k_{t+1}}} \ \ldots \ D_{A_{k_m}, A_n, \Delta_{k_m}}\ \eta\right]. \quad (6)$$

В силу представления (6), утверждения 11 и транзитивности бинарного отношения $\overset{\text{div}}{\succcurlyeq}$, получаем $\eta_1 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$.

Случайную величину η_1 можно представить и в более явном виде:

$$\eta_1(\omega) = \begin{cases} \eta(\omega), & \text{если } \omega \in \Big(\bigcup_{i\in I_1'} A_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{t-1} A_{k_j}\Big); \\ y_{k_t} + \delta \leqslant x_{k_t}, & \text{если } \omega \in A_{k_t}, \quad \text{где } \delta = \Delta_n - \Delta_{k_m} - \ldots - \Delta_{k_{t+1}} > 0; \\ x_{k_{t+1}}, & \text{если } \omega \in A_{k_{t+1}}; \\ x_{k_{t+2}}, & \text{если } \omega \in A_{k_{t+2}}; \\ \ldots & \ldots \\ x_{k_m}, & \text{если } \omega \in A_{k_m}; \\ x_n, & \text{если } \omega \in A_n. \end{cases} \quad (7)$$

Для удобства обозначим $\eta_1(\omega) = z_i$ при $\omega \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Проверим, что для η_1 выполняется условие, аналогичное (4). Поскольку $\eta_1(\omega) = \eta(\omega)$ при $\omega \in \bigcup\limits_{u=1}^{k_t-1} A_u$, то в силу (4)

$$\sum_{i=1}^{v}(x_i - z_i) = \sum_{i=1}^{v}(x_i - y_i) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad v = 1, \ldots, k_t - 1. \quad (8)$$

Из представления (7) видно, что $x_i \geqslant z_i$ при $i \geqslant k_t$ (для $i \in I_1'$ это следует напрямую из определения I_1'). Поэтому, с учетом вышеизложенного,

$$\sum_{i=1}^{v}(x_i - z_i) = \sum_{i=1}^{k_t-1}(x_i - z_i) + \sum_{i=k_t}^{v}(x_i - z_i) \geqslant 0 + 0 = 0 \quad \text{при} \quad v = k_t, \ldots, n. \tag{9}$$

Шаг 2 (и последующие). Если $x_{n-1} \geqslant z_{n-1}$, то определим $\eta_2 = \eta_1$ и переходим к шагу 3. Если же $x_{n-1} < z_{n-1}$, то действуем по такому же алгоритму, что и в шаге 1, но с соответствующими изменениями: вместо y_i следует использовать значения η_1, то есть z_i. Таким образом, теперь $\Delta_i = x_i - z_i$, а вместо множеств I_1 и I_1' рассматриваются множества $I_2 = \{i \in [1, n-2]\colon \Delta_i > 0\}$, $I_2' = \{i \in [1, n-2]\colon \Delta_i \leqslant 0\}$. Точно так же уменьшаем значение η_1 (но уже не на множестве A_n, а на A_{n-1}), и увеличиваем значения там, где ξ превосходит η_1, двигаясь справа налево. Это возможно благодаря тому, что выполняется (8) и (9). В итоге получаем величину η_2, причем $\eta_2 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta_1$.

Таким образом, за n шагов получим случайные величины $\eta_n \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta_{n-1} \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \ldots \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta_1 \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$. Заметим, что, по построению, на каждом следующем шаге k выполнено: $\eta_k \leqslant \xi$ на $\bigcup\limits_{w=n-k+1}^{n} A_w$. Поэтому $\xi(\omega) \geqslant \eta_n(\omega)$ для всех $\omega \in (0,1]$. Это и было нашей целью: теперь полностью показано, что $\xi \overset{\text{div}+}{\succcurlyeq} \eta$, и основная часть теоремы доказана. Если же, ко всему прочему, выполнено условие $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$, то, поскольку $\mathsf{E}\eta_n = \mathsf{E}\eta$, имеем $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta_n$. С учетом того, что $\xi \geqslant \eta_n$, получаем $\xi = \eta_n$. А поскольку $\eta_n \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$, то и $\xi \overset{\text{div}}{\succcurlyeq} \eta$. Теорема полностью доказана. □

Утверждение 12. *Мера риска* $\mathrm{ES}_\gamma(\xi)$ *для произвольного* $\gamma \in (0,1]$ *непрерывна в смысле сходимости аргумента в метрическом пространстве* $(\mathcal{P}_1, \boldsymbol{\kappa})$, *то есть если* $\xi_n \xrightarrow{\boldsymbol{\kappa}} \xi$ *(где все* ξ_n *и* ξ *имеют конечные первые абсолютные моменты), то*

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi_n) \to \mathrm{ES}_\gamma(\xi) \ \textit{при}\ n \to \infty.$$

Доказательство. Согласно (1), для произвольного $\gamma \in (0,1]$ имеем:

$$\begin{aligned}\big|\,\mathrm{ES}_\gamma(\xi) - \mathrm{ES}_\gamma(\xi_n)\,\big| &\leqslant \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma |q_\alpha(\xi_n) - q_\alpha(\xi)|\, d\alpha \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma}\int_0^1 |q_\alpha(\xi_n) - q_\alpha(\xi)|\, d\alpha = \frac{1}{\gamma}\,\boldsymbol{\kappa}(\xi_n, \xi) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \end{aligned} \tag{10}$$

□

Теорема 5. *Пусть* $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$. *Тогда*

$$\xi \overset{\text{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta) \quad \forall \gamma \in (0,1].$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$ и $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$. По определению бинарного отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ можно построить две последовательности распределений $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такие что $\xi_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Согласно утверждению 4, $\mathrm{ES}_\gamma(\xi_n) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta_n)$ для всех $\gamma \in (0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Пользуясь утверждением 12, получим:

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{ES}_\gamma(\xi_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{ES}_\gamma(\eta_n) = \mathrm{ES}_\gamma(\eta) \text{ для каждого } \gamma \in (0,1].$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}|\eta| < \infty$ и $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех $\gamma \in (0,1]$. Согласно [5], метрическое пространство $(\mathcal{P}_1, \boldsymbol{\kappa})$ является полным и сепарабельным, причем в качестве сепаранты можно выбрать $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ – класс таких вероятностных мер на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, которые соответствуют простым случайным величинам, принимающим *рациональные* значения с *рациональными* вероятностями. Это значит, что можно построить две последовательности простых распределений ξ_n и η_n, $n \in \mathbb{N}$, принимающих рациональные значения с рациональными вероятностями и сходящихся в метрике $\boldsymbol{\kappa}$ к ξ и η соответственно: $\xi_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \eta$. Используя неравенство $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех $\gamma \in (0,1]$, несложно проверить, что можно выбрать ξ_n и η_n такими, чтобы $\mathrm{ES}_\gamma(\xi_n) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta_n)$ для всех $\gamma \in (0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. По теореме 4, из последнего получим:

$$\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, построены две последовательности распределений ξ_n и η_n, такие что $\xi_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \xi$, $\eta_n \overset{\boldsymbol{\kappa}}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{\mathrm{div}+}{\succcurlyeq} \eta_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По определению, $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$. Достаточность доказана. □

Последняя теорема, помимо того что упрощает проверку отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ между двумя распределениями на действительной прямой, обладает еще и рядом других достоинств. С ее помощью без труда доказывается тот факт, что бинарное отношение $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ является частичной упорядоченностью на $\mathcal{P}_1$. Более того, эта теорема показывает связь бинарного отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ с так называемым отношением стохастической доминациии второго порядка.

Определение 9. *Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{P}_1$. Тогда говорят, что ξ стохастически доминирует η по второму порядку ($\xi \overset{2\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$), если*

$$\int\limits_{-\infty}^{a} F_\xi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{a} F_\eta(x)\,dx \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Следствием последней теоремы, а также [6, т. (2.3) разд. (2.2.2) и т. (3.8) разд. (3.3.2)] является следующая

Теорема 6. *Для произвольных $\xi, \eta \in \mathcal{P}_1$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\xi \overset{2\,\mathrm{sd}}{\succcurlyeq} \eta$;
2. $\mathsf{E}\,u(\xi) \geqslant \mathsf{E}\,u(\eta)$ *для каждой неубывающей вогнутой функции полезности* $u(\cdot)$;
3. $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ *для всех* $\gamma \in (0,1]$;
4. $\xi \overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq} \eta$.

Эта теорема показывает тесную связь бинарного отношения $\overset{\mathrm{div}(\boldsymbol{\kappa})}{\succcurlyeq}$ с отношением стохастической доминации второго порядка, а также находит место построенного отношения в теории полезности. Поскольку выпуклые функции полезности соответствуют отвращению игрока к риску, то, фактически, последняя теорема показывает, что диверсификация есть не что иное, как неприятие любого риска.

Заключение

В работе продолжена попытка формально определить понятие диверсификации инвестиционных портфелей, начатая в [1]. Построены два обобщения определения отношения диверсификации, предложенного в предыдущей работе. Подробно рассмотрено замыкание определения в метрическом пространстве вероятностных распределений с конечным первым моментом на действительной прямой с метрикой Канторовича. Показана тесная связь между таким замыканием и мерами риска, в частности, когерентной мерой риска Expected Shortfall. Построены критерии такого замыкания, которые указывают место предложенного определения в теории управления рисками, теории стохастического доминирования и теории полезности.

Список литературы

[1] Целищев М.А., Назаров Л.В. О формализации понятия диверсификации // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 63–80.

[2] Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall // Journal of Banking & Finance. 2002. Vol. 26, № 7. Pp. 1487–1503.

[3] Rachev S., Stoyanov S., Fabozzi F. A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures. John Wiley & Sons, 2011. 392 p.

[4] Villani C. Optimal Transport, Old and New. Berlin et al.: Springer, 2008. 992 p.

[5] Bolley F. Separability and completeness for the Wasserstein distance // Lecture Notes in Mathematics. 2008. Vol. 1934. Pp. 371–377.

[6] Sriboonchitta S., Wong W. K., Dhompongsa S., Nguyen H. T. Stochastic Dominance and Applications to Finance, Risk and Economics. Chapman & Hall/CRC, 2009. 455 p.

Библиографическая ссылка

Целищев М.А. Об обобщении понятия диверсификации // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 77–93.

Сведения об авторах

1. **Целищев Михаил Андреевич**
аспирант кафедры математической статистики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

ON THE GENERALIZATION OF THE DIVERSIFICATION CONCEPT

Tselishchev Mikhail Andreyevich
PhD student of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.

Received 27.09.2014, revised 30.09.2014.

This paper is a sequel to formalization of the concept of diversification of investment portfolios proposed in [1]. The generalization is made in two steps. Primarily, we use the first order stochastic dominance relation. Secondly, we build a closure of the binary relation in a metric space of probability distributions on the real line. Special case of closure in the space of finite first moment distributions with Kantorovich metric is investigated explicitly. A criterion for the latter case is proven.

Keywords: diversification, investment portfolio comparison, stochastic dominance, Kantorovich metric, Expected Shortfall.

Bibliographic citation

Tselishchev M.A. On the generalization of the diversification concept. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 77–93. (in Russian)