УДК 510.676, 519.7

ТОЧНЫЙ ПРИМЕР РАВНОВЕСНОЙ ФУНКЦИИ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Баранова О.Е., Гусев А.И.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 26.05.2014, после переработки 02.06.2014.

В работе [2] показано, что всякая равновесная функция голоморфного отображения расширенной комплексной плоскости в себя равна константе на области притяжения параболической неподвижной точки. В настоящей заметке приведен пример равновесной функции голоморфного отображения отличной от константы вне области притяжения.

Ключевые слова: голоморфная функция, равновесная функция, множество Жюлиа, область притяжения неподвижной точки.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 127–133.

Введение

В работах [1-3] получены некоторые факты, связывающие локальное динамическое поведение голоморфной функции в окрестности неподвижной точки с понятием равновесной функции, а также рассмотрены примеры равновесных функций. В частности, в [2] было показано, что всякая равновесная функция голоморфного отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, имеющего параболическую неподвижную точку z_0, принимает постоянное значение на области притяжения этой неподвижной точки. Там же приведен пример голоморфного отображения, для которого некоторая равновесная функция равна константе на множестве, содержащем область притяжения параболической неподвижной точки, и отлична от константы вне этого множества. В настоящей работе приведен пример голоморфного отображения и равновесной функции этого отображения, отличной от константы вне замыкания области притяжения параболической неподвижной точки.

Мы будем использовать следующие обозначения.

Для $r > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$

$$O_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$
$$S_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Для $A \subset \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C} \backslash A$

$$\rho(z_0, A) = \inf\{|z - z_0| : z \in A\},$$

$$M_{A,z} = \{u \in A : \rho(u,z) = \rho(z,A)\}.$$

Для функции $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ по определению полагаем

$$f^{\circ 0} \text{ – тождественное отображение,}$$

$$f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}.$$

Функции $f^{\circ n}$ называют итерациями функции f.

Множество $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ называется вполне инвариантным для функции $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, если

$$f(A) \subset A \text{ и } f^{-1}(A) \subset A.$$

Если $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ – неподвижная точка функции f, то множество

$$A_{f,z_0} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\} : \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = z_0\}$$

называется областью притяжения точки z_0.

Область притяжения неподвижной точки является открытым множеством.

Неподвижная точка $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ называется параболической неподвижной точкой функции f, если никакая итерация функции f не является тождественным отображением и для некоторого натурального числа p имеет место равенство

$$(f'(z_0))^p = 1.$$

В представленной заметке мы рассматриваем только полиномиальные отображения. В этом случае множество Жюлиа J_f полинома $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ совпадает с топологической границей множества тех $z \in \hat{\mathbb{C}}$, для которых последовательности $\{f^{\circ n}(z)\}$ ограничены [4].

1. Пример равновесной функции

Рассмотрим функцию

$$f(z) = z(1-z). \tag{1}$$

Точка $z_0 = 0$ является параболической неподвижной точкой этой функции. Область притяжения $A_{f,0}$ этой точки показана на Рис. 1. Граница этой области является жордановой кривой и совпадает со множеством Жюлиа функции f. Множество $A_{f,0}$, множество Жюлиа и множество $\overline{A_{f,0}}$ вполне инвариантны. Последние два из них компактны. Кроме того область $A_{f,0}$ содержит круг

$$O_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, определенную равенством

$$h(z) = \begin{cases} -\rho(z, J_f), & z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}, \\ 0, & z \in \overline{A_{f,0}}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы покажем, что эта функция является равновесной для f, то есть $h(f(z)) \leqslant h(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Поскольку множество $\overline{A_{f,0}}$ вполне инвариантно, то $h(z) = h(f(z)) = 0$ для $z \in \overline{A_{f,0}}$.

Пусть теперь $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}$. Покажем, что

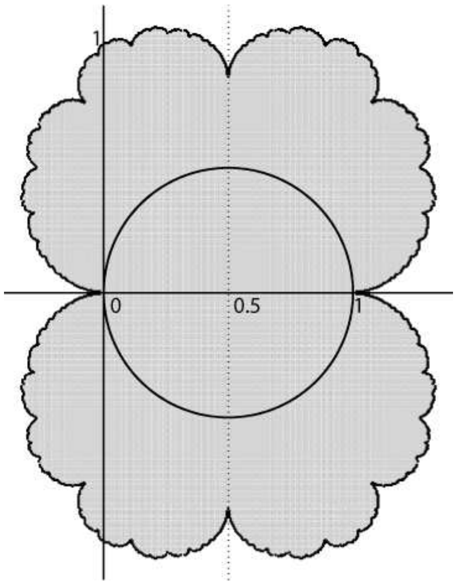

Рис. 1: Область притяжения $A_{f,0}$

$$\rho(f(z), J_f) \geqslant \rho(z, J_f), \text{ для } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}\ .$$

Так как компактное множество J_f и множество $\mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}$ вполне инвариантны, то

$$M_{J_f,z} \cap S_{z,\rho(z,J_f)} \neq \varnothing, \quad O_{z,\rho(z,J_f)} \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}, \quad f(O_{z,\rho(z,J_f)}) \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}.$$

Непосредственно проверяется, что для любых $z, u \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$|f(z) - f(u)| = |z - u| \cdot |1 - z - u|. \tag{3}$$

Пусть $\tilde{u} \in M_{J_f,z}$, $r_0 = |z - \frac{1}{2}|$, $r = |z - \tilde{u}|$, $u \in S_{z,r}$. Поскольку $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}$ и $O_{z,r} \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A_{f,0}}$, то $r_0 > \frac{1}{2}$. Так как $O_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \subset A_{f,0}$, то $|r_0 - r| > \frac{1}{2}$. Полагая $z = \frac{1}{2} + r_0 \cdot e^{i\varphi}$, $u = z + r \cdot e^{i\psi}$, равенство (2) перепишем в виде

$$|f(z) - f(u)| = r \cdot \left|1 - \frac{1}{2} - r_0 \cdot e^{i\varphi} - \frac{1}{2} - r_0 \cdot e^{i\varphi} - r \cdot e^{i\psi}\right| =$$

$$= r \left|2r_0 \cdot e^{i\varphi} - r \cdot e^{i\psi}\right| \geqslant r(2r_0 - r) = r(r_0 + r_0 - r) > r\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = r.$$

Это неравенство верно для любого $u \in S_{z,\rho(z,J_f)}$ и поэтому

$$S_{f(z),r} \subset f(S_{z,r}) \subset \mathbb{C} \backslash A_{f,0}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(f(z), J_f) > r = \rho(z, J_f). \tag{4}$$

Геометрическая интерпретация оценки (4) приведена на Рис. 2. На Рис. 3 приведен график функции h.

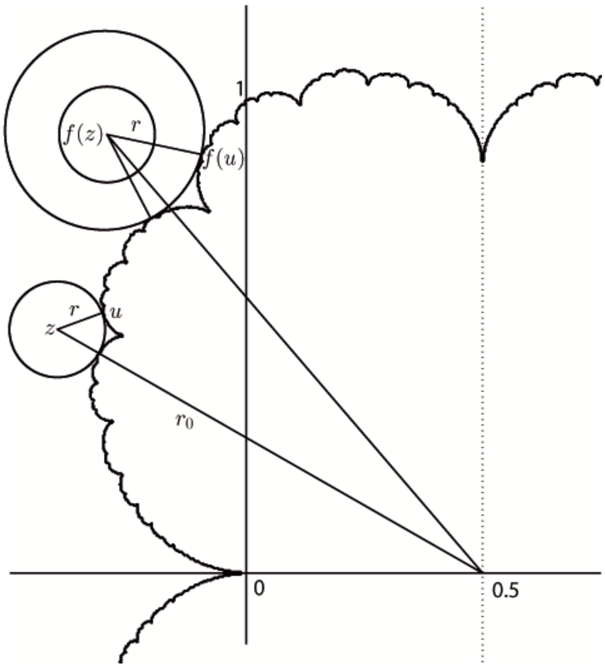

Рис. 2: Геометрическая интерпретация оценки (4)

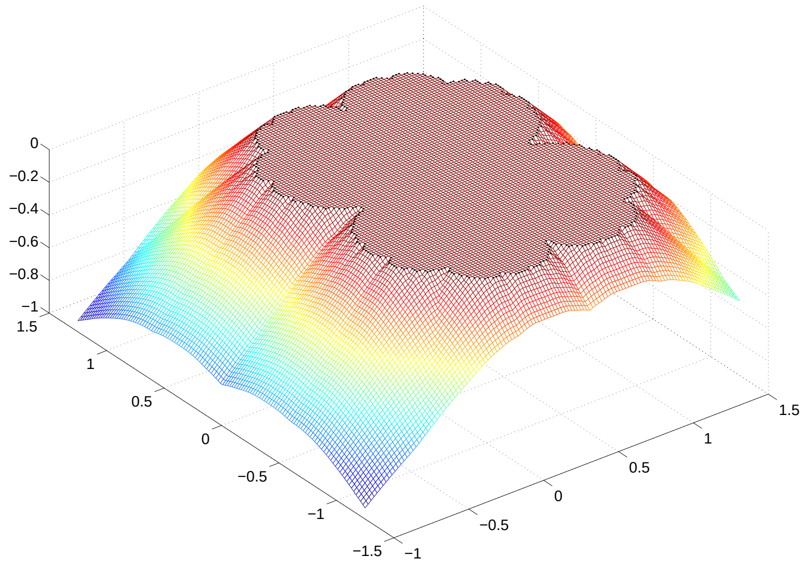

Рис. 3: График функции h

Заключение

Конструктивное построение равновесных функций даже для отдельных голоморфных отображений является весьма непростой задачей. Квадратичная функция $f(z) = z(1-z)$ (а также функция $f(z) = z(1+z)$) является уникальной в классе комплексных полиномов с точки зрения голоморфной динамики тем, что имеет ровно одну неподвижную точку, параболического типа, не имеет параболических циклов, а область притяжения неподвижной точки содержит круг $O_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Кроме того, множество Жюлиа этой функции связно, является Жордановой кривой и не обладает ярко выраженной фрактальной структурой. Именно это позволило построить для f пример равновесной функции. Вычислительные эксперименты, проведенные авторами, показали, что функции семейства $f(z) = \lambda z(1-z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, при $\lambda = 3$, $\lambda = \pm i$, $\lambda = 2 \pm i$ и многие другие имеют ровно одну параболическую неподвижную точку, но функция (2) не является равновесной для этих отображений. Для значений z, достаточно близких к множеству Жюлия, неравенство $h(f(z)) \leqslant h(z)$ может не выполняться. Отметим, что все последние отображения имеют более ярко выраженную фрактальную структуру по сравнению с отображением $f(z) = z(1-z)$.

Список литературы

[1] Боруленкова Е.М., Гусев А.И. Моделирование топологической динамики голоморфных отображений. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 16. С. 87–94.

[2] Афанасьева Е.М., Гусев А.И. Моделирование топологической динамики голоморфных отображений в окрестности нейтральной неподвижной точки. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1(24). С. 165–170.

[3] Боруленкова Е.М., Гусев А.И. Примеры равновесных функций голоморфных отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской государственный университет, 2010. С. 17–20.

[4] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

Библиографическая ссылка

Баранова О.Е., Гусев А.И. Точный пример равновесной функции голоморфного отображения в окрестности параболической неподвижной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 127–133.

Сведения об авторах

1. **Баранова Ольга Евгеньевна**
доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

2. **Гусев Анатолий Иванович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: angusev222@yandex.ru

A FINE EXAMPLE OF THE EQUILIBRIUM FUNCTION HOLOMORPHIC MAP IN THE VICINITY OF A PARABOLIC FIXED POINT

Baranova Olga Evgenyevna
Associate professor of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Gusev Anatoly Ivanovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: angusev222@yandex.ru.

Received 26.05.2014, revised 02.06.2014.

In Ref. [2] it is shown that every equilibrium function of holomorphic mapping of the extended complex plane into itself is a constant on the attraction domain of the parabolic fixed point. The example of the equilibrium function of the holomorphic mapping that is not a constant on the complement to the attraction domain of the of the parabolic fixed point is constructed in the present note.

Keywords: holomorphic function, equilibrium function, Julia set, domain of attraction of a fixed point.

Bibliographic citation

Baranova O.E., Gusev A.I. A fine example of the equilibrium function holomorphic map in the vicinity of a parabolic fixed point. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 127–133. (in Russian)