

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.2

О МОДЕЛИРОВАНИИ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С ДИСКРЕТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРОЙ

Багрова И. А.

Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 05.12.2014, после переработки 28.12.2014.

В статье описывается работа датчика устойчивых случайных векторов с дискретной спектральной мерой и характеристическим показателем $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$. В основу моделирования положена обобщенная центральная предельная теорема. Предложены формулы для определения параметров датчика.

Ключевые слова: моделирование случайных векторов, многомерные устойчивые распределения, распределение Парето.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 33–44.

Введение

Устойчивые распределения представляют собой семейство распределений, имеющих достаточно широкий диапазон применений: в экономике, радиотехнике, физике, астрономии, гидрологии и других науках [1, 2]. Устойчивое распределение полезно при моделировании многомерных данных, характеризующихся большой изменчивостью.

В качестве определения этих законов используется свойство устойчивости [3]:

Определение 1. *Случайный вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)$ называется устойчивым случайным вектором в R^d , если для любых чисел $C_1, C_2 > 0$ существует $C > 0$ и вектор $D \in R^d$ такие, что*

$$C_1 Y^{(1)} + C_2 Y^{(2)} \stackrel{d}{=} CY + D, \quad (1)$$

где $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ – независимые копии Y .

Существует несколько форм параметризации характеристической функции многомерного устойчивого распределения, например, аналог записи параметризации (A) характеристической функции устойчивого вектора $Y \sim S_{\alpha, d}(\Gamma, \mu^0)$ имеет следующий вид [3]:

$$f_Y(t) = M \exp\{i(Y, t)\} = \exp\{-I_Y(t) + i(\mu^0, t)\},$$

где

$$I_Y(t) = \int_{S^{d-1}} |(t, \xi)|^\alpha w_\alpha(t, \xi) \Gamma(d\xi),$$

$$w_\alpha(t, \xi) = \begin{cases} 1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ 1 + i \frac{2}{\pi} \ln |(t, \xi)| \operatorname{sign}(t, \xi), & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

где $S^{d-1} = \{\xi : |\xi| = 1\}$ – единичная сфера в R^d ; $\Gamma(d\xi)$ – спектральная мера устойчивого случайного вектора Y ; $(t, \xi) = t_1\xi_1 + \dots + t_d\xi_d$ – скалярное произведение векторов; $\mu_0 \in R^d$ – вектор сдвига.

Определение многомерного устойчивого распределения зависит не только от значения характеристического показателя, но и от спектральной меры (функции на единичной сфере). Спектральная мера может быть непрерывной, дискретной и их смесью. Дискретная спектральная мера представляется следующим образом:

$$\Gamma(\cdot) = \sum_{l=1}^L w_l \delta_{\xi_l},$$

где $w_l > 0$ – это веса и δ_{ξ_l} – точечная единичная масса в точках $\xi_l \in S^{d-1}$.

Определение многомерного устойчивого распределения также можно дать на основе обобщенной центральной предельной теоремы (далее – ЦПТ), которое будет являться аналогом определения семейства одномерных устойчивых распределений [4]:

Определение 2. Семейством устойчивых распределений в R^d или распределением Леви-Фельдгейма называется множество всевозможных слабых пределов распределений последовательностей S_n при $n \rightarrow \infty$, которые появляются в схеме рассмотрения последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots со значениями из d -мерного евклидова пространства R^d с образованием последовательности сумм

$$S_n = b_n^{-1}(X_1 + \dots + X_n) - a_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

нормированных некоторыми последовательностями положительных чисел $b_n = bn^{1/\alpha}$ и неслучайных элементов a_n из R^d .

1. Постановка задачи

Функция плотности вероятности d -мерного устойчивого случайного вектора не представима в аналитическом виде. Поэтому для моделирования устойчивых случайных векторов будем применять обобщенную ЦПТ (2), где в качестве слагаемых X_j будем использовать смесь распределений Парето, принадлежащих области притяжения устойчивых законов. Следовательно, требуется подобрать такие значения нормирующего и центрирующего параметров, чтобы характеристическая функция суммы независимых одинаково распределенных случайных величин сходилась к характеристической функции устойчивого распределения в форме (А).

2. Моделирование устойчивых случайных векторов при $\alpha \in (0, 1)$

Характеристическая функция в форме (А) многомерного устойчивого вектора с дискретной спектральной мерой имеет вид:

$$f_Y(t) = \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l + i |(t, \xi_l)|^\alpha w \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \operatorname{sign}(t, \xi_l) \right\}, \quad \alpha \neq 1, \quad (3)$$

где $\xi_l \subset S^{d-1}$, $w_l > 0$ – веса.

Многомерную случайную величину, имеющую распределение Парето на выделенных L направлениях ξ_l , при $0 < \alpha < 1$ можно представить как

$$X_i = \sum_{l=1}^L p_l \operatorname{Par}_l, \quad p_1 + \dots + p_L = 1, p_l > 0, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, L}.$$

Функция плотности случайных величин Par_l имеет вид:

$$f_{\operatorname{Par}_l}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha r_l^\alpha}{|x|^{\alpha+1}}, & x \in |x| \cdot \xi_l, |x| \geq r_l, \xi_l \in S^{d-1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

По аналогии с [5] можно найти характеристическую функцию векторов Par_l , а затем вычислить асимптотическое представление характеристической функции суммы S_n , которая при $n \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$f_{S_n}(t) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{-p_l (-i(t, \xi_l))^\alpha r_l^\alpha \Gamma(1 - \alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}})}{b^\alpha} \right\} + R_n(t), \quad (5)$$

где остаточный член $R_n(t) = O(\frac{1}{n})$.

По теореме 3.6.2 из [6] сходимость по распределению эквивалентна равномерной сходимости характеристических функций на отрезке:

$$|f_{S_n}(t) - f_Y(t)| < \varepsilon, \quad t \in D = [-t_m, t_m]. \quad (6)$$

Размеры существенной области $D = \{t : |t| < t_m\}$, в которой сравниваются характеристические функции, находятся из выражения, аналогичного (11) из [5]:

$$\frac{\gamma(1/\alpha, 2 \min\{w_l\} \cdot t_m^\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} < 1 - \varepsilon_{t_m}, \quad (7)$$

где $\gamma(\cdot, \cdot)$ – нижняя неполная гамма-функция, а параметр ε_{t_m} отвечает за уровень энергии отброшенных высокочастотных составляющих функции плотности $f_Y(x)$.

Применяя неравенство (12) из [5], получим

$$\begin{aligned} |f_{S_n}(t) - f_Y(t)| \leq & \left| \sum_{l=1}^L - \frac{p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma(1 - \alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{b^\alpha} + \sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l \right| + \\ & + \left| \sum_{l=1}^L \frac{p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma(1 - \alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi_l)}{b^\alpha} - \sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi_l) \right|. \end{aligned}$$

Для обеспечения равномерной сходимости характеристических функций устойчивого случайного вектора и суммы S_n необходимо, чтобы каждый из модулей стремился к нулю. Рассмотрим каждый из них.

$$\left| \sum_{l=1}^L -\frac{p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma\left(1-\alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{b^\alpha} + \sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l \right| \rightarrow 0.$$

Отсюда можно получить выражение для b :

$$b^\alpha = \frac{1}{\sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l} \sum_{l=1}^L p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma\left(1-\alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8)$$

Второе подмодульное выражение также должно стремиться к нулю, то есть

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^L \frac{p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma\left(1-\alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}\right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi_l)}{b^\alpha} - \sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^\alpha w_l \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi_l) = \\ & - \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \left(\sum_{l=1}^L \frac{p_l |(t, \xi_l)|^\alpha r_l^\alpha \Gamma\left(1-\alpha, \frac{r_l^\alpha |(t, \xi_l)|^\alpha}{bn^{1/\alpha}}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sign}(t, \xi_l)}{b^\alpha} + \sum_{l=1}^L w_l |(t, \xi_l)|^\alpha \operatorname{sign}(t, \xi_l) \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Его необходимо использовать для подбора вектора сдвига $a \in R^d$ при α близких к 1, аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае.

Соответствующие веса w_l связаны с параметрами распределения Парето следующим образом: $w_l = p_l r_l^\alpha$.

Как видно, параметр b зависит от t и параметров распределения Парето. Необходимо выбрать единственное значение b . С этой целью уравнение (8) можно разрешить методом простой итерации до достижения точности

$$b = \{b_{k^*} : |b_{k^*} - b_{k^*-1}| \leq \varepsilon_b\}.$$

Затем из всех найденных b находим такое, которое обеспечивает равномерную сходимость последовательности характеристических функций (6) на конечной области D

$$b_{\text{опт}} = \arg \min_{b(t_j)} \max_{t_j \in D} |f_{S_n}(t_j) - f_Y(t_j)|.$$

Рассмотрим моделирование устойчивых случайных векторов в пространстве R^2 . Задаем $L > 0$ направлений спектральной меры, тогда $\xi_l = (\cos \varphi_l, \sin \varphi_l)$, $l = \overline{1, L}$ – вектор на единичной окружности в R^2 , φ_l – угол между направлением ξ_l и осью x . В области D выбираем сетку значений следующим образом. Задаем число $M_\eta > 0$ направлений $\eta_m = (\cos \psi_m, \sin \psi_m)$, $m = \overline{1, M_\eta}$ – вектор на единичной окружности в R^2 . Тогда $t_{m,j} = \eta_m \cdot \Delta t \cdot j$, $j = \overline{1, M_{|t|}}$, где $M_{|t|}$ – количество интервалов разбиения отрезка $[0, t_m]$ в направлении η_m . Пример выбора направлений дискретной спектральной меры и t представлен на Рис. 1.

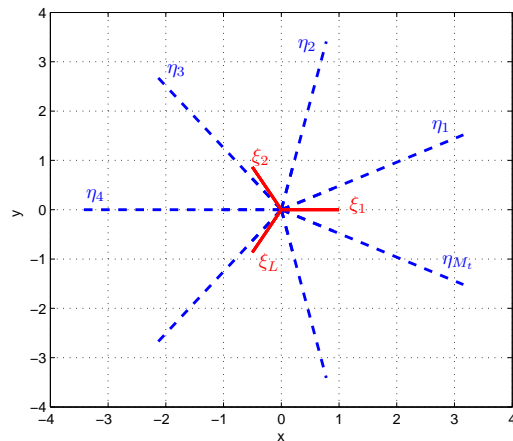


Рис. 1: Направления спектральной меры и t

Можно убедиться, что описанная методика моделирования многомерных устойчивых векторов применима также и для моделирования устойчивых случайных величин для одномерного случая.

На Рис. 2 представлен пример моделирования одномерного распределения для $\alpha = 0.4$, когда спектральная мера имеет два противоположных направления.

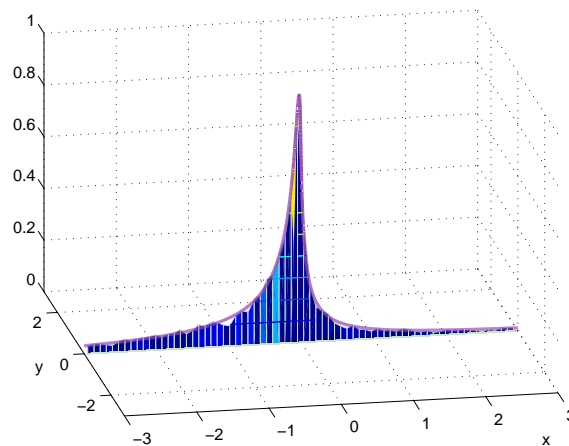


Рис. 2: Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 0.4$, $n = 10^4$, $K = 10^4$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$, $r_1 = r_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$

Для проверки корректности моделирования на Рис. 2 также размещен график плотности теоретической функции плотности одномерного устойчивого распределения.

Пример моделирования симметричного устойчивого вектора представлен на Рис. 3.

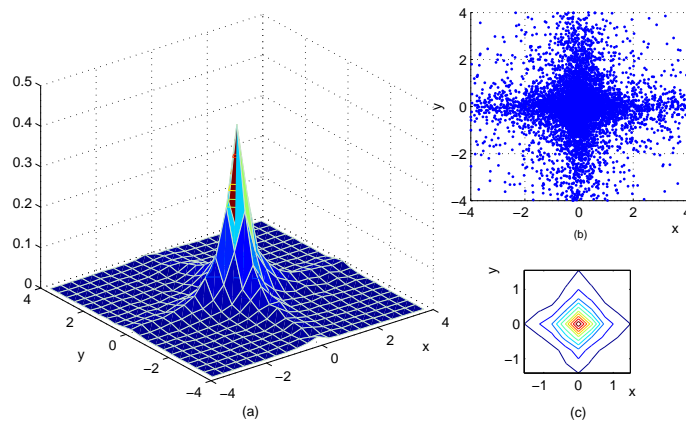


Рис. 3: а) Вид плотности распределения S_n при $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\alpha = 0.8$, $p_l = 1/4$, $l = \overline{1,4}$, б) точечное распределение, в) линии уровня

Пример моделирования одностороннего устойчивого распределения показан на Рис. 4.

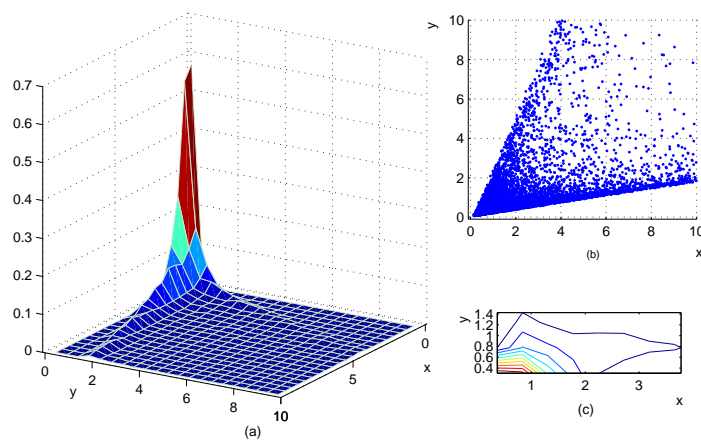


Рис. 4: а) Вид плотности распределения S_n при $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\alpha = 0.6$, $p_1 = 70$, $p_2 = 30$, $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 70^\circ$, б) распределение точек массы, в) линии уровня

Примеры работы датчика моделирования устойчивого случайного вектора с различным числом направлений дискретной спектральной меры при различных значениях α и весах p продемонстрированы на Рис. 5–7.

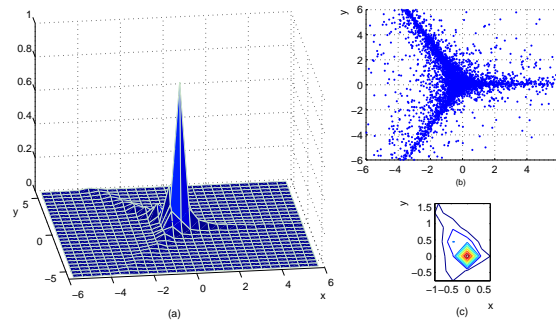


Рис. 5: а) Вид плотности распределения X_j при $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\alpha = 0.5$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.2$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$, $\varphi_3 = 2\pi$, б) точечное распределение, в) линии уровня

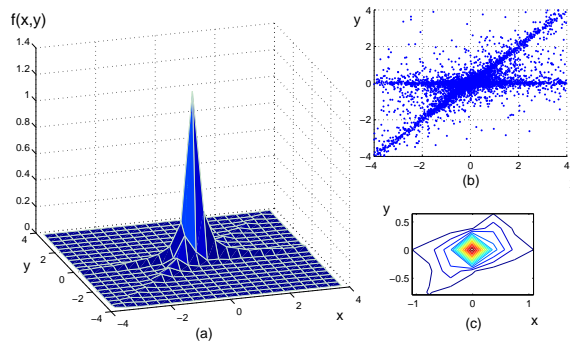


Рис. 6: а) Вид плотности распределения X_j при $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\alpha = 0.5$, $p_l = 0.25$, $l = \overline{1,4}$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = \frac{5\pi}{4}$, б) точечное распределение, в) линии уровня

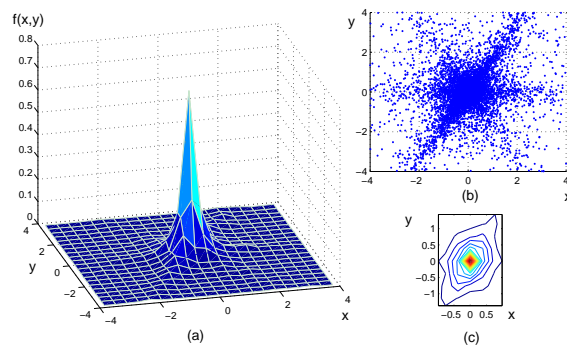


Рис. 7: а) Вид плотности распределения X_j при $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\alpha = 0.7$, $p_1 = p_3 = p_4 = p_6 = 0.125$, $p_2 = p_5 = 0.25$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_4 = \pi$, $\varphi_5 = \frac{4\pi}{3}$, $\varphi_6 = \frac{5\pi}{3}$, б) точечное распределение, в) линии уровня

3. Моделирование устойчивых случайных векторов при $\alpha \in (1, 2)$

Многомерное распределение Парето при $\alpha \in (1, 2)$ необходимо центрировать:

$$X_i = \sum_{l=1}^L p_l (Par_l - MPar_l),$$

где математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$MPar_l = \frac{\alpha r_l}{\alpha - 1} \xi_l, \quad \xi_l \in S^{d-1}.$$

Тогда аппроксимация характеристической функции суммы S_n при $n \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$f_{S_n}(t) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{p_l (-i(t, \xi_l))^{\alpha} r_l^{\alpha} \Gamma(2 - \alpha, \frac{r_l^{\alpha} |(t, \xi_l)|^{\alpha}}{bn^{1/\alpha}})}{b^{\alpha} (\alpha - 1)} \right\} + R_n(t), \quad (9)$$

где остаточный член имеет порядок $R_n(t) = O(\frac{1}{n})$.

Действуя аналогичным образом, как было описано выше, получено выражение для нахождения нормирующего параметра b :

$$b^{\alpha} = \frac{1}{-\sum_{l=1}^L |(t, \xi_l)|^{\alpha} w_l} \sum_{l=1}^L \frac{p_l |(t, \xi_l)|^{\alpha} r_l^{\alpha} \Gamma(2 - \alpha, \frac{r_l^{\alpha} |(t, \xi_l)|^{\alpha}}{bn^{1/\alpha}}) \cos \frac{\pi \alpha}{2}}{\alpha - 1}. \quad (10)$$

Для демонстрации работы алгоритма выберем пространство R^2 . Проверим работу алгоритма на примере моделирования одномерного распределения для $\alpha = 1.2$ и вероятностях $p_1 = 0.8$ и $p_2 = 0.2$. В этом случае спектральная мера имеет два направления: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ (Рис. 8).

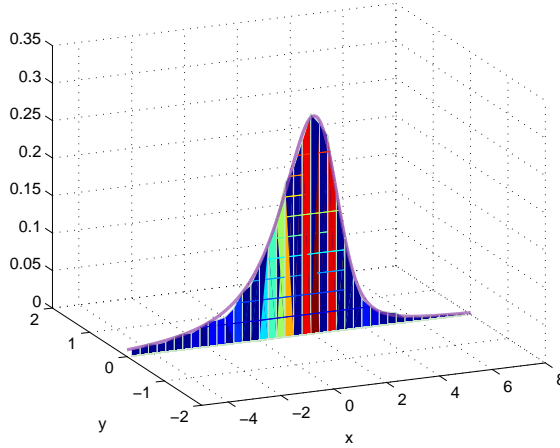


Рис. 8: Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 1.2$, $n = 10^4$, $K = 10^4$, $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.2$, $r_1 = r_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$

Для проверки корректности моделирования на Рис. 8 также размещен график плотности теоретической функции плотности одномерного устойчивого распределения с $\beta_A = p_1 - p_2 = 0.6$.

Рассмотрим моделирование симметричного устойчивого вектора для $\alpha = 1.9$ и заданных направлений спектральной меры $\varphi_l = l\pi/3$, $l = \overline{1, 6}$ на Рис. 9.

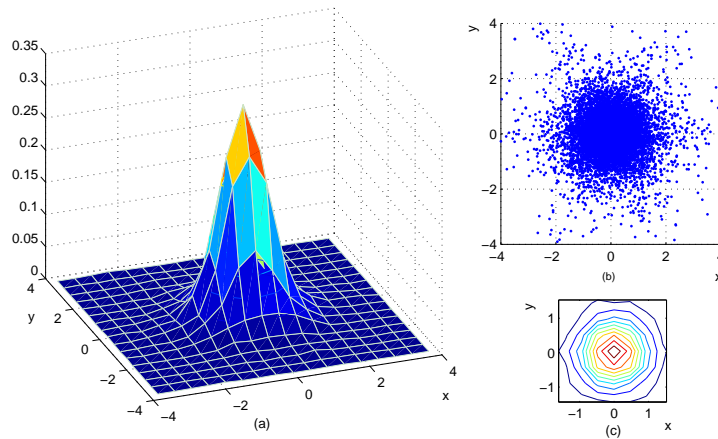


Рис. 9: а) Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 1.9$, $n = 10^3$, $K = 10^4$, $p_1 = 1/6$, $\varphi_l = l\pi/3$, $l = \overline{1, 6}$, б) точечное распределение, в) линии уровня

Покажем результаты моделирования устойчивого вектора для различных значений α и заданных направлений спектральной меры на Рис. 10–12.

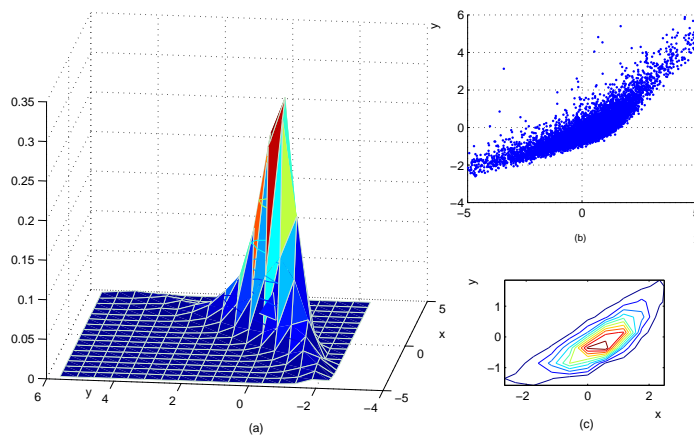


Рис. 10: а) Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 1.4$, $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\varphi_1 = 50^\circ$, $\varphi_2 = 200^\circ$, б) точечное распределение, в) линии уровня

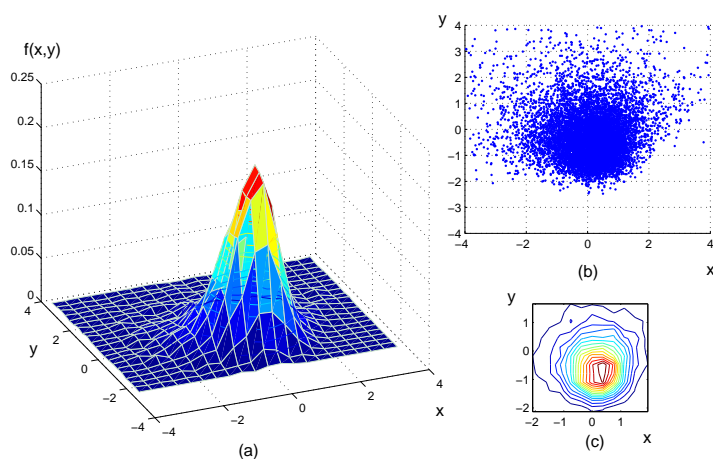


Рис. 11: а) Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 1.6$, $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\varphi_l = (l - 1)\frac{\pi}{5}$, $l = \overline{1, 5}$, $p_l = 0.2$, б) точечное распределение, в) линии уровня

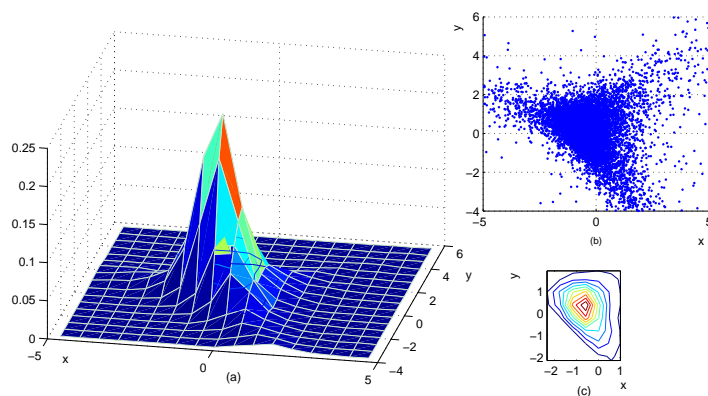


Рис. 12: а) Вид плотности распределения S_n при $\alpha = 1.3$, $n = 10^3$, $K = 10^4$, $\varphi_1 = 40^\circ$, $\varphi_2 = 160^\circ$, $\varphi_3 = 300^\circ$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.5$, б) точечное распределение, в) линии уровня

Заключение

Предложен подход к моделированию многомерного устойчивого распределения. Приведенные иллюстрации доказывают возможность моделирования многомерного устойчивого распределения с помощью датчика, основанного на применении обобщенной ЦПТ. Получены выражения для параметров, необходимых для генерации устойчивого случайного вектора при значениях характеристического показателя $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ для случая дискретной спектральной меры.

Список литературы

- [1] Золотарев В.М. Устойчивые законы и их применения. М.: Знание, 1984. 64 с.
- [2] Маслов О.Н. Устойчивые распределения и их применение в радиотехнике. М: Радио и связь, 1994. 152 с.
- [3] Samorodnitsky G., Taqqu M.S. Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman and Hall, 1994.
- [4] Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP, 1999. 594 p.
- [5] Архипов С.В., Багрова И.А. О моделировании двухсторонних устойчивых случайных чисел при α in $(0,1)$ // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1(24). С. 103–116.
- [6] Лукач Е. Характеристические функции. М: Наука, 1979. 249 с.

Библиографическая ссылка

Багрова И.А. О моделировании устойчивых случайных векторов с дискретной спектральной мерой // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 33–44.

Сведения об авторах**1. Багрова Инна Александровна**

доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: inna@tversu.ru.

ON MODELLING STABLE RANDOM VECTORS WITH A DISCRETE SPECTRAL MEASURE

Bagrova Inna Alexandrovna

Associate professor of Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: inna@tversu.ru

Received 05.12.2014, revised 28.12.2014.

In the paper we describe a generator for stable random vectors with characteristic exponent $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ and with discrete spectral measure. We use Generalized CLT for simulation and propose formulae for the generator parameters.

Keywords: modelling random vectors, multivariate stable distributions, Pareto distribution.

Bibliographic citation

Bagrova I.A. On modelling stable random vectors with a discrete spectral measure. *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 33–44. (in Russian)