УДК 519.216

СРЕДНЯЯ ДОЛЯ ПОТЕРЯННОЙ НАГРУЗКИ В МОДЕЛИ ТРАФИКА С НЕОДНОРОДНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Сидорова О.И.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 04.12.2014, после переработки 24.12.2014.

В данной работе анализируется асимптотическое поведение средней доли потерянной нагрузки в модели трафика, порождаемого ON/OFF–процессом с неоднородными длинами активных периодов, поступающего на сервер с буфером ограниченного объема.

Ключевые слова: долговременная зависимость, распределения с тяжелыми хвостами, ON/OFF–процесс, очередь с ограниченным накопителем, средняя доля потерянной нагрузки.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 45–56.

Введение

Самоподобная структура и присутствие *долгой памяти* у потоков данных в современных телекоммуникационных системах были подтверждены в ходе многочисленных эмпирических и аналитических исследований. Наличие этих свойств обычно объясняют тем, что времена передачи сообщений имеют распределения с тяжелыми хвостами [5, 6, 8, 12]. К настоящему времени предложены модели трафика, приводящие к самоподобным процессам, наиболее популярными из которых являются Дробное Броуновское Движение и Устойчивое Движение Леви [10, 11].

В условиях самоподобного трафика стандартные методы расчета характеристик систем связи, включая, емкость накопителей, число каналов и их пропускную способность и прочее, требуют кардинального пересмотра из-за существенной недооценки предлагаемой нагрузки.

В силу того, что потоки данных, передаваемых в рамках одного сеанса связи, могут иметь крайне неоднородную структуру и различные требования к качеству обслуживания (QoS), особый интерес представляют модели, в которых допускается различные распределения длин активных периодов. В традиционных моделях такого типа предполагается «равноправие» всех типов источников, вследствие чего асимптотически свойства трафика и параметры QoS определяются источниками с самым длинным активным периодом [11].

В работах [1–4] было показано, что при соответствующем выборе частот появления источников с различными длинами активных периодов, любой из них способен оказывать нетривиальное влияние на поведение трафика и характеристики QoS, в частности на вероятность переполнения буфера.

В данной работе анализируется асимтотическое поведение средней доли потерянной нагрузки в модели трафика, порождаемого ON/OFF–процессом с неоднородными длинами активных периодов, поступающего на сервер с буфером ограниченного объема.

1. ON/OFF–модель входящего потока

1.1 Однородный случай

Следуя работе [10], дадим описание ON/OFF–модели входящего потока, порождаемого одним источником. Обозначим u – скорость генерации трафика: $u > 1$ для ON–периода, $u = 0$ для OFF–периода.

Пусть $\{X_{on}, X_1, X_2, \ldots\}$ есть н.о.р. неотрицательные случайные величины (общее обозначение X), представляющие собой длины ON–периодов и $\{Y_{off}, Y_1, Y_2, \ldots\}$ – н.о.р. неотрицательные случайные величины (общее обозначение Y), характеризующие длины OFF–периодов. Случайные величины X и Y предполагаются независимыми с распределениями F_1 и F_2 такими, что

$$\bar{F}_1(x) = x^{-\alpha_1} \cdot L_1(x), \quad \bar{F}_2(x) = x^{-\alpha_2} \cdot L_2(x)\ , \quad x > 0, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ и $L_1(x), L_2(x)$ есть медленно меняющиеся на бесконечности функции. Таким образом ON–период имеет более «тяжелый» хвост.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2)$. Тогда распределения F_1 и F_2 имеют конечные средние μ_1 и μ_2 и бесконечные дисперсии.

Таким образом, мы рассматриваем некоторый **процесс восстановления**, порожденный чередованием ON– и OFF–периодов. Все восстановления происходят в начале ON– периодов, **промежутки между восстановлениями** есть н.о.р.с.в.

$$Z_i = X_i + Y_i,\ i \geqslant 1,$$

с распределением $F_1 * F_2$ и средним временем восстановления

$$\mu = E(Z_1) = \mu_1 + \mu_2.$$

Чтобы сделать последовательность стационарной, введем вспомогательную случайную величину T_0, которая не зависит от X_i и Y_i. Стационарная версия последовательности восстановления $\{T_n,\, n \geqslant 0\}$ задается по правилу

$$T_0,\ T_n = T_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i\ ,\ n \geqslant 1. \tag{2}$$

Определим случайную величину T_0. Пусть B, $X_{on}^{(0)}$, $Y_{off}^{(0)}$ есть независимые случайные величины, которые независимы также от $\left\{Y_{off}, \{X_n\}, \{Y_n\}\right\}$.

Случайная величина (далее – с.в.) B имеет распределение Бернулли:

$$p_{on} = P(B = 1) = \mu_1/\mu \tag{3}$$

и при $x \to \infty$

$$\bar{F}_1^{(0)}(x) = P\Big(X_{on}^{(0)} > x\Big) = \frac{1}{\mu_1}\int\limits_x^\infty \bar{F}_1(s)\,ds \sim \mu_1^{-1}\cdot x^{-\alpha_1+1}\cdot \tilde{L}_1(x), \tag{4}$$

$$\bar{F}_2^{(0)}(x) = P\Big(Y_{off}^{(0)} > x\Big) = \frac{1}{\mu_2}\int\limits_x^\infty \bar{F}_2(s)\,ds \sim \mu_2^{-1}\cdot x^{-\alpha_2+1}\cdot \tilde{L}_2(x), \tag{5}$$

где функции $\tilde{L}_1(x)$ и $\tilde{L}_2(x)$ медленно меняются на бесконечности.

Замечание 1. С.в. $X_{on}^{(0)}$ и $Y_{off}^{(0)}$ представляют собой так называемые *«остаточные времена жизни»*.

Если положить

$$T_0 = B\cdot\Big(X_{on}^{(0)} + Y_{off}\Big) + (1-B)\cdot Y_{off}^{(0)}, \tag{6}$$

то **последовательность восстановления** (2) **будет стационарной**.

ON/OFF– процесс для одного источника определяется как

$$W_t = u\cdot\Big(B\cdot 1_{[0,X_{on}^{(0)})}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[T_n, T_n+X_{n+1})}(t)\Big),\ t\geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом,

$$W_t = \begin{cases} u, & \text{если } t \text{ попадает на } ON\text{–период},\\ 0, & \text{если } t \text{ попадает на } OFF\text{–период}.\end{cases}$$

Так как последовательность восстановления (2) стационарна, то **процесс** W_t **строго стационарен** со средним

$$E(W_t) = u\cdot P(W_t = u) = u\cdot \mu_1/\mu.$$

При условии (1) ковариационная функция $\gamma_W(k)$ процесса W_t имеет вид

$$\gamma_W(k) \sim \frac{\mu_2^2}{(\alpha_1-1)\mu^3}\cdot k^{-(\alpha_1-1)}\cdot L_1(k),\quad k\to\infty.$$

Поскольку

$$\sum_k |\gamma_W(k)| = \infty, \tag{8}$$

процесс W_t **обладает «долгой» памятью**.

Рассмотрим теперь суперпозицию M независимых ON/OFF источников

$$W_t^{(m)},\ t\geqslant 0,\ m = 1,\ldots,M,$$

подающих нагрузку на один и тот же сервер.

Число активных в момент t источников равно

$$N(t) := N(M,t) = \sum_{m=1}^{M} W_t^{(m)},\ t \geqslant 0.$$

$N(t)$ есть интенсивность входного потока для сервера в момент времени t и может рассматриваться как **процесс мгновенной нагрузки**.

Полная входящая работа для сервера к моменту времени t определяется как

$$A(t) := A(M,t) = \int_0^t N(s)\,ds,\ t \geqslant 0. \tag{9}$$

Определим семейство **агрегированных процессов полной нагрузки**

$$A(Tt) := A(M,Tt), \tag{10}$$

где $T > 0$ есть масштабный параметр, а число ON/OFF–процессов $M = M(T)$ – некоторая неубывающая по T целочисленная функция такая, что

$$\lim_{T\to\infty} M(T) = \infty.$$

Замечание 2. Для компактной записи формул зависимость M от T в дальнейшем может опускаться.

Определим функцию квантилей

$$b(t) = (1/\bar{F}_1)^{\leftarrow}(t) = \inf\Big\{x > 0 :\ 1/\bar{F}_1(x) \geqslant t\Big\},\ t > 0.$$

Функция $b(t)$ является непрерывной слева и неубывающей. Из теории правильно меняющихся функций следует, что $b(t)$ правильно меняется с показателем $1/\alpha$, то есть

$$b(t) = t^{1/\alpha}L(t),$$

где $L(t)$ есть некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Пусть рассматриваемая система функционирует в режиме «медленного роста числа соединений» (Slow Growth Condition, SGC)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b(MT)}{T} = 0. \tag{11}$$

Теорема 1. ([10]) *Пусть F_1 и F_2 удовлетворяют условию (1). Тогда в режиме SGC процесс $A(Tt)$, $t \geqslant 0$, описывающий полную работу в системе на интервале $[0,Tt]$, удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению*

$$\frac{A(Tt) - TM\mu^{-1}\mu_{on}t}{b(MT)} \Rightarrow c\cdot X_{\alpha,\sigma,1}(t),$$

где $X_{\alpha,\sigma,1}(t)$ есть α устойчивое движение Леви, а $\Rightarrow$ означает сходимость конечномерных распределений.

1.2 Неоднородный случай

Рассмотрим суперпозицию M независимых стационарных процессов $W_t^{(m)}$, распределения $ON-$ и $OFF-$периодов которых имеют тяжелые хвосты и *принадлежат конечным множествам $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, состоящим из $2 \leqslant r < \infty$ различных распределений.* Это соответствует ситуации, когда в некоторой среде, например, локальной сети, существует конечное число различных типов источников.

Пусть, как и ранее, $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ есть функции распределения для $ON-$ и $OFF-$периодов источников k–го типа, которые удовлетворяют условию

$$\bar{F}_1^{(k)}(x) = x^{-\alpha_1^{(k)}} \cdot L_1^{(k)}(x), \quad \bar{F}_2^{(k)}(x) = x^{-\alpha_2^{(k)}} \cdot L_2^{(k)}(x), \quad x > 0, \tag{12}$$

где $1 < \alpha_1^{(k)} < \alpha_2^{(k)} < 2$, а функции $L_1^{(k)}(x)$ и $L_2^{(k)}(x)$ медленно меняются на бесконечности.

Поскольку $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)} \in (1,2)$ для всех k распределения $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ имеют конечные средние $\mu_1^{(k)}$ и $\mu_2^{(k)}$ и бесконечные дисперсии. Обозначим через $\mu^{(k)} = \mu_1^{(k)} + \mu_2^{(k)}$.

Также положим $\alpha_1^{(1)} < \alpha_1^{(2)} < \ldots < \alpha_1^{(r)}$.

Пусть $M^{(k)} = M^{(k)}(T)$ есть число появлений распределения k–го типа среди первых $M = M(T)$ членов последовательности процессов $W_t^{(m)}$. Мы предполагаем, что для всех k при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} M^{(k)}(T) = \infty.$$

Если все $\alpha_1^{(k)}$, $k = \overline{1,r}$ различны и для любого k существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{M^{(k)}(T)}{M(T)} > 0,$$

то в пределе получается $\alpha_1^{(1)}$–устойчивое движение Леви [11]. Иными словами, в трафике доминирует один источник с самыми «тяжелыми» активными периодами.

В [1] рассмотрен более интересный случай, *когда несколько различных источников оказывают влияние на поведение трафика.*

Пусть как и ранее $b^{(k)}(t)$ есть функция квантилей. Напомним, что $b^{(r)}(t)$ является правильно меняющейся функцией с показателем $1/\alpha_1^{(r)}$, то есть

$$b^{(r)}(t) = t^{1/\alpha_1^{(r)}} \cdot L_0(t),$$

где $L_0(t)$ есть некоторая медленно меняющаяся функция.

Определим целочисленные функции $M^{(k)}(T)$ по правилу:

$$\begin{aligned} M^{(k)}(T) &\sim c^{(k)} \cdot \frac{(MT)^{\alpha^{(k)}/\alpha^{(r)}} \cdot [L_0(MT)]^{\alpha^{(k)}}}{T \cdot [L^{(k)} b^{(r)}(MT)]}, \ k < r, \\ M^{(r)}(T) &= M(T) - M^{(1)}(T) - \ldots - M^{(r-1)}(T), \end{aligned} \tag{13}$$

где константы $c^{(k)} > 0$.

Легко видеть, что при $T \to \infty$

$$M^{(r)}(T)/M(T) \to 1; \quad M^{(k)}(T)/M(T) \to 0, \ k < r.$$

Теорема 2. ([1]) *Если* $F_1^{(k)}$ *и* $F_2^{(k)}$ *удовлетворяют условию (12) и режим SGC выполняется для всех* k *и* $M^{(k)}(T)$, *определенных в (13), то при некоторой нормировке предельный процесс для* $A(Tt)$ *существует и является суммой независимых устойчивых движений Леви с показателями* $\alpha_1^{(1)} < \alpha_1^{(2)} < \ldots < \alpha_1^{(r)}$.

2. Средняя доля потерянной нагрузки

Как отмечалось выше, трафик в современных мультисервисных сетях имеет интегральный характер, поскольку он состоит из множества потоков заявок, сгенерированных различными приложениями, предъявляющими разные требования к обслуживанию и рабочим характеристикам сети. В таких условиях трафик данных является трудно предсказуемым, в силу чего, невозможно заранее резервировать необходимые сетевые ресурсы для его эффективного обслуживания. В связи с этим возникает проблема оценки производительности системы, на вход которой поступает такой трафик.

Далее мы рассматриваем систему связи, состоящую из одного сервера, на который поступает нагрузка от других узлов сети – пользователей. Предполагается, что сервер имеет буфер размера h, что является типичной ситуацией для современной системы связи. Подобная модель рассматривается в литературе как базовая математическая модель коммутатора или маршрутизатора, которая позволяет с достаточной степенью точности воспроизводить реальные процессы и, что очень важно, является доступной для анализа даже в случае потоков нагрузки с очень сложной структурой.

В данной работе в качестве оценки производительности системы рассматривается *величина потерянной нагрузки.*

Пусть на вход некоторой СМО, имеющей буфер размера h, подается нагрузка порождаемая одним *ON/OFF*–источником. Обозначим через $Z(t)$ величину заполнения буфера в момент времени t. Предполагается, что в начальный момент $Z(0) = 0$ и применяется дисциплина обслуживания *FIFO.*

Пусть $u > 1$ и $c > u$ есть скорости поступления и обслуживания нагрузки. Тогда величины поступившей и обслуженной нагрузки в течение n–го активного периода будут равны, соответственно

$$\begin{array}{ll} A_n = (u-c)\cdot X_n, & m_1 = E(A_n) = (u-c)\cdot \mu_1, \\ C_n = c\cdot Y_n, & m_2 = E(C_n) = c\cdot \mu_2. \end{array}$$

Хорошо известно, что длина очереди $\{W_n = Z(T_n),\ n \geqslant 0\}$ в системе с конечным накопителем подчиняется рекуррентному соотношению

$$W_{n+1} = \min\Big[\big(W_n + A_n - C_n\big)^+,\, h\Big], \tag{14}$$

где $(x)^+ = \max(0, x)$, а $(T_n,\ n \geqslant 0)$ есть определенный в (6) стационарный процесс восстановления.

Пусть $L(0,t)$ есть величина нагрузки, потерянной на интервале $(0,t)$. **Средняя (по времени) доля потерянной нагрузки** определяется как

$$\lambda_{loss}^h := \lim_{t\to\infty} \frac{L(0,t)}{t}. \tag{15}$$

Нас интересует асимптотическое поведение величины λ_{loss}^h при $h \to \infty$.

Теорема 3. *Для стационарного процесса* $\{W_n,\ n \geqslant 0\}$ *предел в (15) существует и при* $h \to \infty$

$$\lambda_{loss}^h = \frac{E(W_n + A_n - C_n - h)^+}{\mu_1 + \mu_2} \sim \frac{(u-c)^{\alpha_1}}{\mu_1 + \mu_2} \cdot h^{-\alpha_1+1} \cdot \tilde{L}_1 \left(\frac{h}{u-c} \right). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $L_n := E(W_n + A_n - C_n - h)^+$ есть средняя величина потерянной нагрузки на интервале $[T_n, T_{n+1})$, $n \geqslant 0$, а $N_t = \sup\{n : T_n < t\}$ – число восстановлений до момента t. Тогда

$$\sum_{n=0}^{N_t - 1} L_n(0,t) \leqslant L(0,t) \leqslant \sum_{n=0}^{N_t} L_n(0,t). \tag{17}$$

Усиленный закон больших чисел для процессов восстановления и усиленный закон больших чисел гарантируют, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{п.н.}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{N_t} L_n}{N_t} = E(L_1) \quad \text{п.н.}$$

Поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{N_t-1} L_n(0,t)}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{N_t} L_n(0,t)}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t} = \frac{E(L_1)}{\mu_1 + \mu_2},$$

следовательно

$$\lambda_{loss}^h = \lim_{t\to\infty} \frac{L(0,t)}{t} = \frac{E(W_n + A_n - C_n - h)^+}{\mu_1 + \mu_2}. \tag{18}$$

Заметим, что

$$E(A-B)^+ = \int\limits_0^\infty P(A - B > s)^+ \, ds = \int\limits_B^\infty P(A > s) \, ds = E(A) \cdot P(A_e > B),$$

где A_e – остаточное время жизни.

Поскольку распределения с правильно меняющимися хвостами являются субэкспоненциальными, при $h \to \infty$ имеем [7]

$$E(W_n + A_n - C_n - h)^+ \sim E\Big((u-c)X - h\Big)^+ = m_1 \cdot P\left(X_e > \frac{h}{u-c}\right), \tag{19}$$

где $X_e \stackrel{d}{=} X_{on}^{(0)}$ есть остаточное время жизни.

Требуемый результат получается из (19) с учетом (4) и (18). $\square$

Теперь рассмотрим систему, в которой присутствуют источники $2 \leqslant r < \infty$ разных типов. Таким образом распределения длин $ON-$ и OFF–периодов принадлежат конечным множествам $\mathcal{F}_1 = \left\{F_1^{(1)}, \ldots, F_1^{(r)}\right\}$ и $\mathcal{F}_2 = \left\{F_2^{(1)}, \ldots, F_2^{(r)}\right\}$, где $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$ определены в (12).

Чтобы свести данную модель к однородному случаю предположим, что в системе присутствует только один источник, попеременно находящийся в $ON-$ и $OFF-$ состоянии, причем длины X_n^* и Y_n^* его активного периода и периода покоя имеют распределения F_1^* и F_2^* такие, что

$$
\begin{aligned}
F_1^*(x) &= \sum_{k=1}^{r} \frac{M^{(k)}(T)}{M(T)} \cdot F_1^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{r} \omega_T^{(k)} \cdot F_1^{(k)}(x), \;\; \mu_1^* = \mu_1^*(T) = E(X_n^*), \\
F_2^*(x) &= \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{M}^{(k)}(T)}{M(T)} \cdot F_2^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\omega}_T^{(k)} \cdot F_2^{(k)}(x), \;\; \mu_2^* = \mu_2^*(T) = E(Y_n^*),
\end{aligned} \tag{20}
$$

где $M^{(k)}(T)$ заданы в (13). Величины $\tilde{M}^{(k)}(T)$ определяются аналогично.

Стационарный процесс восстановления $(T_n,\, n \geqslant 0)$ определим, аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.

Величины поступившей и обслуженной нагрузки в течение n–го активного периода будут равны, соответственно

$$
\begin{array}{ll}
A_n^* = (u-c) \cdot X_n^*, & m_1^* = m_1^*(T) = M(A_n^*) = (u-c) \cdot \mu_1^*, \\
C_n^* = c \cdot Y_n^*, & m_2^* = m_2^*(T) = M(C_n^*) = c \cdot \mu_2^*.
\end{array}
$$

Если хвосты распределений $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ удовлетворяют условию (12), а величины $M^{(k)}(T)$ выбраны по правилу (13), то при $T \to \infty$ справедлив следующий **основной результат**.

Теорема 4. *Пусть $u > c$ и $m_1^*/m_2^* < 1$, тогда при $h \to \infty$*

$$
\lambda_{loss}^h \sim \frac{(u-c)^{\alpha^{(r)}}}{\mu_1^{(r)} + \mu_2^{(r)}} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} \cdot \tilde{L}_1^{(r)} \left(\frac{h}{u-c} \right). \tag{21}
$$

Доказательство. В силу определения величин $M^{(k)}(T)$ при $T \to \infty$ мы имеем:

$$
\omega_T^{(k)}, \tilde{\omega}_T^{(k)} \;\; \to \;\; 0, \quad k = \overline{1, r-1}; \quad \omega_T^{(r)}, \tilde{\omega}_T^{(r)} \to 1.
$$

Таким образом, для $x > 0$ при $T \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_1(x) &= \sum_{n=1}^{r-1} \omega_T^{(k)} \cdot \bar{F}_1^{(k)}(x) + \bar{F}_1^{(r)}(x) \cdot \omega_T^{(r)} \sim \bar{F}_1^{(r)}(x) = x^{-\alpha_1^{(r)}} L_1^{(r)}(x), \\
\bar{F}_2(x) &= \sum_{n=1}^{r-1} \tilde{\omega}_T^{(k)} \cdot \bar{F}_2^{(k)}(x) + \bar{F}_2^{(r)}(x) \cdot \tilde{\omega}_T^{(r)} \sim \bar{F}_2^{(r)}(x) = x^{-\alpha_2^{(r)}} L_2^{(r)}(x), \\
\mu_1^* &= E(X_n^*) \sim \mu_1^{(r)}, \\
\mu_2^* &= E(Y_n^*) \sim \mu_2^{(r)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для распределений случайных величин A_n^* и C_n^* при $T \to \infty$ справедливо

$$\begin{array}{lcll} P(A_n^* > x) & \sim & (u-c)^{\alpha_1^{(r)}} \cdot x^{-\alpha_1^{(r)}} \cdot L_1^{(r)}(x), & m_1^* = E(A_n^*) \sim (u-c) \cdot \mu_1^{(r)}, \\ P(C_n^* > x) & \sim & c^{\alpha_2^{(r)}} \cdot x^{-\alpha_2^{(r)}} \cdot L_2^{(r)}(x), & m_2^* = E(C_n^*) \sim c \cdot \mu_2^{(r)}. \end{array}$$

В силу закона больших чисел

$$\lambda_{loss}^h = \lim_{T\to\infty} \frac{L(0,Tt)}{Tt} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{N_T(t)} L_n(0,Tt)}{N_T(t)} \cdot \frac{N_T(t)}{Tt} = \frac{E(W_n + A_n^* - C_n^* - h)^+}{\mu_1^* + \mu_2^*},$$

где $N_T(t) = \sup\{n :\, T_n < Tt\}$.

Поскольку

$$E(W_n + A_n^* - C_n^* - h)^+ \sim E\Big((u-c)X^* - h\Big)^+ = m_1^* \cdot P\left(X_e^* > \frac{h}{u-c}\right)$$

и остаточное время жизни X_e^* имеет распределение с правильно меняющимся хвостом

$$P\left(X_e^* > \frac{h}{u-c}\right) \sim \left(\mu_1^{(r)}\right)^{-1} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} \cdot \tilde{L}_1^{(r)}\left(\frac{h}{u-c}\right), \quad h \to \infty$$

в силу теоремы 3 получаем

$$\lambda_{loss}^h \sim \frac{(u-c)^{\alpha^{(r)}}}{\mu_1^{(r)} + \mu_2^{(r)}} \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} \cdot \tilde{L}_1^{(r)}\left(\frac{h}{u-c}\right).$$

□

Заключение

В данной статье исследовалось асимптотическое поведение средней доли потерянной нагрузки в модели трафика, порождаемого ON/OFF–процессом с неоднородными длинами активных периодов. Было показано, что при соответствующем выборе частот появления активных периодов с различными распределениями их длин любой источник способен нетривиальным образом влиять на производительность телекоммуникационной системы.

Список литературы

[1] Хохлов Ю.С., Сидорова О.И. Аппроксимация вероятности переполнения буфера для случая различных распределений длины активных периодов // Сложные системы: Обработка информации, моделирование и оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 2. Тверь: Тверской государственный университ, 2004. С. 68–77.

[2] D'Apice C., Khokhlov Yu.S., Sidorova O.I. Bounds to buffer–overflow probability in the case of different distributions of system active periods // Transactions of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Peterburg, Russia, 2005. Pp. 223–226.

[3] Сидорова О.И. Верхняя и нижняя границы для вероятности потери пакета и вероятности переполнения буфера в модели с неоднородными источниками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 11. С. 53–61.

[4] Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Вероятность переполнения буфера в модели с различными распределениями длины активных периодов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14, № 1. С. 78–79.

[5] Crovella M., Bestavros A. Self–similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases // Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems. 1996. Vol. 4. Pp. 160–169.

[6] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self–similar network traffic // Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols (ICNP'96). 1996. Pp. 171–180.

[7] Jelenkovic P.R. Subexponential loss rates in a $GI/GI/1$ queue with applications // Queueing Systems. 1999. Vol. 33. Pp. 91–123.

[8] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V. On the self–similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2. Pp. 1–15.

[9] Levy J.B., Taqqu M.S. Renewal reward processes with heavy–tailed inter–arrival times and heavy tailed rewards // Bernoulli: a journal of mathematical statistics and probability. 2000. Vol. 6, № 1. Pp. 23–44.

[10] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Annals of Applied Probability. 2002. Vol. 12, № 1. Pp. 23–68.

[11] Taqqu M.S., Willinger W., Serman R. Proof of a fundamental result in self–similar traffic modeling // Computer Communication Review. 1997. Vol. 27, № 2. Pp. 5–23.

[12] Taqqu M.S., Teverovsky V., Willinger W. Is network traffic self–similar or multifractal? // Fractals. 1997. Vol. 5, № 1. Pp. 63–73.

Библиографическая ссылка

Сидорова О.И. Средняя доля потерянной нагрузки в модели трафика с неоднородными источниками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 45–56.

Сведения об авторах

1. **Сидорова Оксана Игоревна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

AVERAGE LOSS RATE IN TRAFFIC MODEL WITH HETEROGENOUS SOURCES

Sidorova Oksana Igorevna
Associate professor of Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 04.12.2014, revised 24.12.2014.

The paper is devoted to investigation of asymptotic behavior of the average loss rate in the finite buffer queue fed by a single *ON/OFF*–process with a heterogenous distributions of active period lengthes.

Keywords: long–range dependency, heavy–tailed distributions, finite buffer queue, ON/OFF–process, average loss rate.

Bibliographic citation

Sidorova O.I. Average loss rate in traffic model with heterogenous sources. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 45–56. (in Russian)