СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 517.977.56

РЕГУЛЯТОРЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Черкай М.В.
Институт проблем машиностроения Российской академии наук,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 23.06.2014, после переработки 23.11.2014.

В работе рассматриваются системы диссипативных, эволюционных уравнений и системы связанных осцилляторов со случайными параметрами. Предлагается обобщенный подход для построения адаптивных регуляторов в этих системах.

Ключевые слова: системы реакция-диффузия, случайные параметры, регулятор, устойчивое функционирование.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 85–93.

Введение

Рассматриваются системы типа химической кинетики [3] со случайными параметрами. Данные системы являются важными моделями в задачах биологии, химии и физики. Они могут описывать такие физические явления как хаос, турбулентность и колебания. Применительно к биологии, известные математики М. Громов и А. Карбоне [7] сформулировали гипотезу о невозможности поддержания гомеостазиса в системах со случайными параметрами в течение бесконечного времени, и что «эволюция», которая может быть рассмотрена как изменение некоторых параметров систем со временем, может привести к устойчивому функционированию этих систем.

Математическая формулировка этой гипотезы была предложена в [14], и основана на идеях [1] и [12]. Вводится понятие области устойчивого функционирования $\Pi \subset H$. Говорят, что система устойчиво функционирует, если ее состояние не выходит за пределы Π, то есть $u(t) \in \Pi$. Предполагается, что аттрактор системы содержится в области Π. Количественной характеристикой устойчивого функционирования системы является вероятность $P(T, \Pi, u_0)$ того, что $u(t) \in \Pi$ для всех $t \in [0, T]$ при условии того что начальное состояние u_0 было в Π. В работе [13] было доказано, для некоторого класса систем типа химической кинетики с фиксированной структурой, что они действительно неустойчиво функционируют на больших временах: $P(T, \Pi, u_0) \to 0$ при $T \to \infty$. Здесь случайные параметры входят линейно и заданы векторными полями, которые находятся в общем положении. Этот результат основан на геометрической теории управления и на теореме трансверсальности Р. Тома [5].

Цель данной статьи – рассмотреть второе утверждение Громова-Карбоне и показать, что известный алгоритм управления типа скоростного градиента [4] может привести к удерживанию состояний системы в П. Чтобы достичь этой цели, мы рассматриваем общий формализм, позволяющий построить управление по методу скоростного градиента для некоторого общего класса динамических систем в гильбертовых пространствах. Данный результат может иметь практические приложения. В качестве приложения мы рассматриваем управление системой связанных осцилляторов.

1. Основная формулировка проблемы

Рассмотрим эволюционное уравнение со случайными параметрами ξ:

$$v_t = Av + F(v, \xi), \tag{1}$$

где $v(t) \in H$, H – гильбертово пространство, A – самосопряженный отрицательно определенный линейный оператор, возможно, неограниченный, F – нелинейный оператор, зависящий от случайных параметров $\xi \in B$, где B – некоторое банахово пространство с нормой $|\ |_B$. Если мы фиксируем случайные параметры, мы получим абстрактное эволюционное уравнение, которое исследовалось в [2, 3, 9] и во множестве других работ. При некоторых условиях на F данное уравнение определяет локальный полупоток. Сформулируем некоторые условия на F, ξ, которые гарантируют существование и единственность решений на некотором ограниченном промежутке времени в случае, возможно, нелинейно входящих, случайных параметров. Для $\alpha \in (0, 1)$ мы определяем пространство $H^\alpha = \{v : ||(-A)^\alpha v|| < \infty\}$. Норма $||(-A)^\alpha v||$ обозначается $||v||_\alpha$. Для каждого фиксированного ξ рассмотрим оператор $F(v, \xi(t))$ как отображение из H^α в H. Обозначим за $D_v F$ производную отображения F по v.

Предположим, что почти все реализации $\xi(t)$ являются гельдеровскими функциями времени t, такими что:

$$|\xi(t) - \xi(t')|_B \leqslant c|t - t'|^\delta, \quad \delta \in (0, 1],\ c > 0. \tag{2}$$

Также пусть

$$||F(v, \xi)|| < M(T), \quad ||F(v, \xi) - F(w, \xi)|| \leqslant L_1(T)||w - v||, \quad t \in [0, T] \tag{3}$$

для каждого $T > 0$, существуют $M, L_1 > 0$ и

$$||F(v, \xi) - F(v, \xi')|| \leqslant L_2(T)|\xi - \xi'|_B, \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Предположим, что оценки (3)-(4) выполнены равномерно по $v \in \mathcal{B}(R) \subset H^\alpha$, где $\mathcal{B}(R)$ – это шар в H^α с центром $v = 0$ и радиусом R. Теперь очевидно существование и единственность решений (1) для $t \in (0, T_0)$, где $T_0 > 0$ зависит от $v_0 \in \mathcal{B}(R)$, с помощью стандартных методов [2]. Пусть $\Pi \subset \mathcal{B}(R)$ – область устойчивого функционирования. Гипотеза неустойчивости функционирования в области П может быть сформулирована так:

$$P(T, \Pi, v_0) \to 0 \quad (T \to +\infty). \tag{5}$$

В работе [13] доказывается асимптотика (5) для некоторых систем реакция-диффузия. Такие системы описываются уравнениями (1) [2].

2. Общий подход в построении регуляторов для распределенных систем

Функционирование системы может быть устойчивым, если система будет подвергнута действию регулятора. Устойчивость по Громову-Карбоне означает, что:

$$P(T, \Pi, v_0) > \delta_0 > 0, \quad \forall\, T. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь эволюционное уравнение с регулятором u:

$$v_t = Av + F(v, u, \xi), \tag{7}$$

где $v(t) \in H$, H – гильбертово пространство, A – самосопряженный отрицательно определенный линейный оператор, F – нелинейный оператор, зависящий от $\xi \in B$, где B – банахово пространство с нормой $|\ |_B$, $u \in U$, U– открытое ограниченное множество в банаховом пространстве V с нормой $|\ |_V$. Для регулятора u мы рассмотрим следующее уравнение:

$$u_t = G(u, v), \tag{8}$$

причем функция G удовлетворяет следующим условиям:

$$||G(u, v)|| < M_1, \quad ||G(u, v) - G(u', w)|| \leqslant L_0(||v - w|| + ||u' - u||), \tag{9}$$

где M_1, L_0 – некоторые положительные константы. Конкретизируем регулятор u и будем искать его как решение уравнения:

$$u_t = -\lambda u + G(v), \quad \lambda >> 1. \tag{10}$$

Тогда для всех времен $t >> log\lambda$ решение уравнения (10) имеет асимптотику:

$$u = -\lambda^{-1} G(v) + O(\lambda^{-2}). \tag{11}$$

Для нахождения G применим алгоритм скоростного градиента [4]. Для этого рассмотрим целевую функцию $Q(v) = a_o||v||^2$ и пусть область устойчивого функционирования системы $\Pi = \{v \in B(R) \subset H : \quad ||v|| \leqslant R_0\}$. Тогда, чтобы состояние системы оставалось в Π достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$Q(v) \leqslant a_0 R_0^2. \tag{12}$$

Введем функционал ω, который играет ключевую роль в алгоритме синтеза искомого регулятора, а именно, он определяет скорость изменения целевой функции Q вдоль траекторий состояния системы (1):

$$\omega(u, v, \xi) = -\langle \nabla Q(v), v_t \rangle = -\langle \nabla Q(v), (Av + F(v, u, \xi)) \rangle. \tag{13}$$

В данном случае предполагается, что A – ограниченный линейный оператор. В случае, если оператор A неограничен, мы определяем ω с помощью соотношения:

$$\omega(u, v, \xi) = -\langle \nabla Q(v), F(v, u, \xi) \rangle. \tag{14}$$

Используя результаты работы [4], получаем функцию G в (8):

$$G = -\gamma \nabla_v \omega, \quad \gamma > 0.$$

Можно сформулировать следующее предложение, которое распространяет результаты [4] на случай неограниченных операторов.

Предложение 1. *Пусть F и G определены в $C^2 \subset H$, а A – самосопряженный оператор (возможно, неограниченный) в H. Для того, чтобы система (1) устойчиво функционировала на интервале $(0, \infty)$, достаточно существования $u(v, \xi)$, такого, что*

$$\omega(u(v, \xi), v, \xi) = 0 \tag{15}$$

для всех u, ξ.

Доказательство. В случае ограниченного оператора A в силу (17) мы имеем $dQ/dt = 0$. Следовательно, если в начальный момент состояние системы в П, оно там и остается.

В случае неограниченного оператора A, но отрицательно определенного оператора A, в силу (17) мы имеем $dQ/dt \leqslant 0$. Поскольку $Q \geqslant 0$, то снова, если в начальный момент состояние системы в П, оно там и остается. □

3. Построение регулятора для множества связанных осцилляторов

Рассмотрим систему из N связанных осцилляторов, определенных следующими уравнениями:

$$\ddot{\varphi}_i + \gamma\dot{\varphi}_i + {\omega_0}^2 \sin\varphi_i = \varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1} + \alpha_i \xi(t) + U_i(t), \tag{16}$$

где $(i = 1, 2, ..., N)$, $\xi(t)$ – случайные возмущения,

$$U_i = \delta_{i1} u(t), \tag{17}$$

$u(t)$ – регулятор с обратной связью, α_i – некоторые параметры. Поставим задачу управления – привести общую энергию системы к некоторому заранее заданному фиксированному значению на интервале времени $[0, T]$. Рассмотрим целевую функцию:

$$Q = 0.5(E(\dot{\varphi}, \varphi) - E^*)^2, \tag{18}$$

где $E(\dot{\varphi}, \varphi)$ – энергия системы,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (\dot{\varphi}_i^2 - (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2) - \omega_0 \cos\varphi_i,$$

и E^* заранее заданное фиксированное число (целевое значение энергии). Рассмотрим синтез регулятора с помощью подхода, описанного выше. Для этого преобразуем исходную систему к системе первого порядка, полагая $p_i = \dot{\varphi}_i$. Тогда получим

$$\omega = \nabla Q \cdot F = (E - E^*)(\dot{\varphi}_1 u - \mu), \tag{19}$$

где

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} (\gamma p_i^2 - \alpha_i \xi_i \dot{\varphi}_i).$$

В этом случае можно положить

$$u = -\mu \dot{\varphi}_1^{-1}.$$

При использовании такого регулятора необходимо учесть, что если $\dot{\varphi}_1 = 0$, то необходимо изменить номер осциллятора, на который действует регулятор:

$$u_i = \delta_{ik} u(t), \quad k(t) = argmax|\dot{\varphi}_k(t)|, \tag{20}$$

в этом случае получаем

$$u = -\mu \dot{\varphi}_k(t)^{-1}.$$

Теперь синтезируем регулятор с помощью алгоритма скоростного градиента. Напомним, что выше было показано, что при определенных условиях такой регулятор обеспечивает устойчивое функционирование системы на заданном интервале времени:

$$u(t) = -\gamma((E(\dot{\varphi}(t), \varphi(t)) - E^*)\dot{\varphi}_1(t)), \quad \gamma > 0. \tag{21}$$

Проведем некоторые теоретические оценки. Для нахождения их в случае (21) рассмотрим следующее уравнение для $Z = E - E^*$:

$$\frac{dZ}{dt} = \dot{\varphi}_1 u + \mu = -\gamma Z \dot{\varphi}_1^2 + \mu(t). \tag{22}$$

Пусть $Z(0) = 0$,

$$Z(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau \exp(-\gamma \int_\tau^t \dot{\varphi}_1^2(s) ds).$$

Тогда для больших γ и ограниченного μ получаем оценку:

$$|Z(t)| < \sup_{\tau \in [0,t]} |\mu(\tau)| \int_0^t d\tau \exp(-\gamma \int_\tau^t \dot{\varphi}_1^2(s) ds).$$

Обозначим $R_\delta = meas\{t : \varphi_1 > \delta\}$ и предположим, что $R_\delta \to 1$ при $\delta \to 0$. Тогда

$$|Z(t)| < \sup_{\tau \in [0,t]} |\mu| o(1),$$

где $\gamma \to 0$. Мы получили оценку отклонения общей энергии системы от заранее заданного состояния.

4. Численные эксперименты

Мы исследовали численно эффективность регулятора для динамики системы связанных осцилляторов, которая описывается совокупностью уравнений (16).

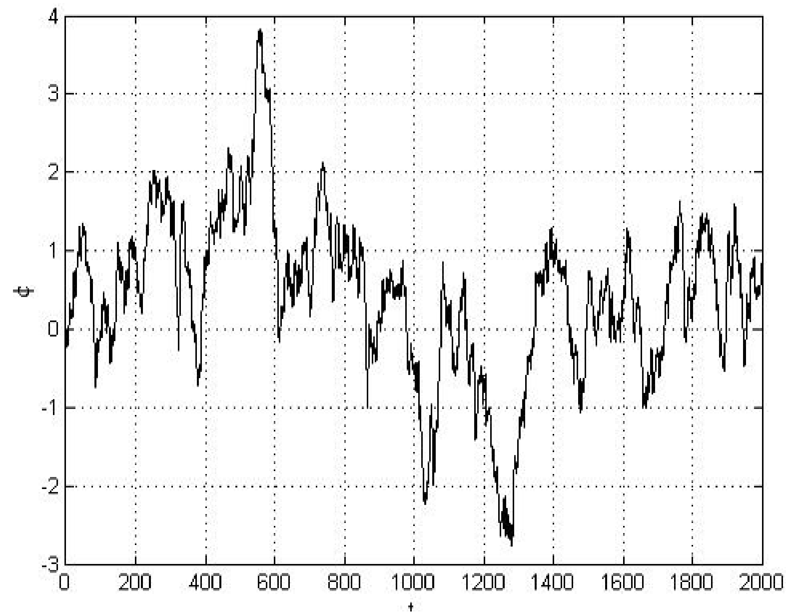

Рис. 1: Зависимость состояния системы (16) с оператором диффузии от времени t

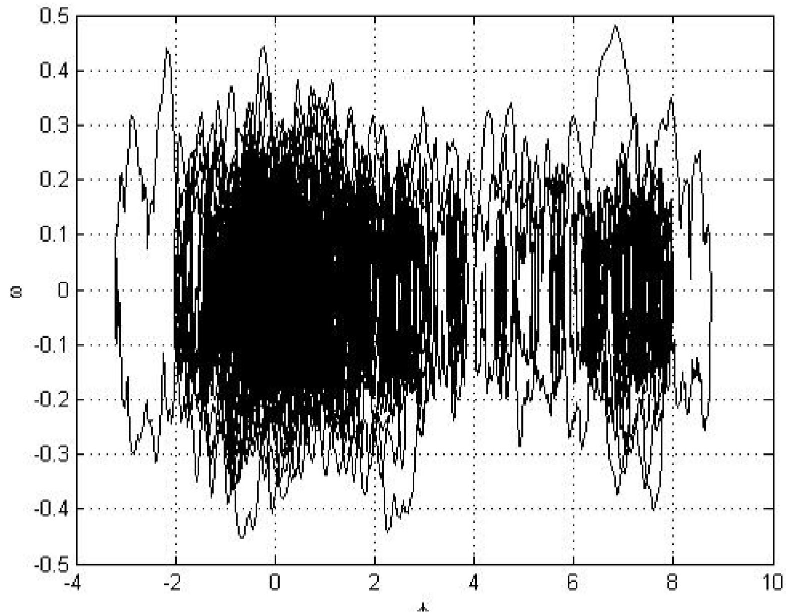

Рис. 2: Портрет $(\dot{\varphi}, \varphi)$ системы (16) с оператором диффузии

Рассматривалась система, состоящая из 100 осцилляторов, амплитуда которых менялась от 0.5 до 5. Внешний шумовой сигнал моделировался дискретным процессом Орнштейна–Уленбека с эффектом памяти 0.5. На систему действовал регулятор по алгоритму (20). При симуляциях моделировалось состояние системы $\varphi(t)$ и портрет системы на плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$ на отрезке времени [0,2000] с шагом 0.1.

На Рис. 1 показана качественная картина зависимости состояния случайно взятого произвольного осциллятора системы от времени t. Для более точного исследования эксперимент запускался 100 раз и в каждом случае для произвольного осциллятора зависимость была аналогичной, как на Рис. 1.

По результатам исследований было сделано заключение о том, что состояние системы на всем интервале ограничено заранее заданной областью П. Например, $\Pi = \{\varphi : |\varphi| \leqslant 4\}$. Из этого следует, что рассматриваемая система под действием случайных шумов будет устойчиво функционировать на $[0, 2000]$. На Рис. 2 показан фазовый срез траекторий системы на заданном интервале времени.

Заключение

В работе были рассмотрены абстрактные эволюционные уравнения со случайными параметрами и проблема управления ими в условиях шума. Был обобщен метод скоростного градиента и показано, что при некоторых условиях он позволяет адаптивно управлять системой, удерживая ее состояние в заданной области.

Численные исследования на примере системы связанных осцилляторов иллюстрируют эти результаты. Они показали, что время устойчивого функционирования системы увеличивается за счет применения построенного регулятора даже при учете флуктуаций большой амплитуды.

Список литературы

[1] Aubin J.P., Bayen A.A., Bonneuil N., Saint-Pierre P. Viability, Control and Games: Regulation of Complex Evolutionary Systems under Uncertainty and Viability Constraints. Springer-Verlag, 2005.

[2] Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981. Vol. 840.

[3] Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи математических наук. 1987. Т. 42, № 6. С. 25–60.

[4] Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.

[5] Lobry C. Une propriete generique des couples de champs de vecteurs // Czechoslovak Mathematical Journal. 1972. Vol. 22, № 2. Pp. 230–237.

[6] Mjolsness E., Sharp D.H., Reinitz J. A connectionist model of development // Journal of Theoretical Biology. 1991. Vol. 152. Pp. 429–453.

[7] Gromov M., Carbone A. Mathematical slices of molecular biology. Preprint IHES/M/01/03, 2001.

[8] Sussmann H.J. A general theorem on local controllability // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25, № 1. Pp. 158–194.

[9] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1998. 673 p.

[10] Хирш М. Дифференциальная топология. ИО НФМИ, 1979. 280 с.

[11] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer, 1983.

[12] Ventsel A.D., Freidlin M.I. Random Perturbations of Dynamic Systems. New York: Springer, 1984.

[13] Вакуленко С.А., Черкай М.В. Разрушение диссипативных структур при случайных воздействиях // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 165, № 1. С. 177–192.

[14] Vakulenko S., Grigoriev D. Instability, Evolution and Morphogenesis // In: Progress in Mathematical Biology Research. Nova Science Publishers, 2008. Pp. 55–100.

Библиографическая ссылка

Черкай М.В. Регуляторы в распределенных системах со случайными параметрами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 85–93.

Сведения об авторах

1. **Черкай Михаил Васильевич**
институт проблем машиностроения Российской Академии наук.

*Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61, ИПМаш РАН.
E-mail: chmv2007@rambler.ru.*

THE REGULATORS IN DISTRIBUTED SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS

Cherkay Mikhail Vasilievich
Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences
Russia, 199178, Saint Petersburg, V.O., 61 Bolshoj avenue.
E-mail: chmv2007@rambler.ru.

Received 23.06.2014, revised 23.11.2014.

In this work, we consider dissipative system, evolution equations and system with coupled oscillators with random parameters. We propose generalized approach for constructing adaptive regulators in this system.

Keywords: system of reaction-diffusion, random parameters, stable functioning.

Bibliographic citation

Cherkay M.V. The regulators in distributed systems with random parameters. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 85–93. (in Russian)