МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 517.958, 533, 532

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В БАРОТРОПНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 10.06.2009, после переработки 20.06.2009.

Получены априорные оценки решений начально–краевой задачи в ограниченной области для трехмерных нестационарных квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении без учета внешних сил. Доказана абсолютная устойчивость равновесных решений этих уравнений.

A priori estimates of the solutions of initial boundary–value problem in bounded domain for three–dimensional non–stationary quasi–hydrodynamic equations in barotropic approximation are obtained. Absolute stability of equilibrium solutions of this system is proved.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, баротропное приближение, уравнения Навье–Стокса, устойчивость решений.
Keywords: quasi-hydrodynamic equations, barotropic approximation, Navier–Stokes equations, stability of solutions.

Введение

Квазигидродинамическая (КГД) система и ее линеаризованная форма были выведены автором в [1]–[3]. Существенное отличие от теории Навье–Стокса заключалось в использовании процедуры пространственно–временного осреднения для определения основных макропараметров сплошной среды, что привело к появлению в классических уравнениях гидродинамики дополнительных дивергентных членов, пропорциональных временному масштабу осреднения τ. В книге [3] найдены глубокие и разветвленные связи КГД системы с классической системой Навье–Стокса. Положено начало исследованию свойств КГД уравнений, даны доказательства теорем о существовании решений и условиях их единственности для некоторых задач.

В статье А.А. Злотника [4] установлены условия параболичности и равномерной параболичности по Петровскому полных квазигидродинамических уравнений, доказана локальная по времени теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Аналогичные результаты получены для КГД системы в баротропном приближении, которая в этой статье рассматривалась впервые. Для линеаризованных КГД систем доказаны глобальные по времени теоремы о существовании и единственности решений начально–краевых задач, выписаны соответствующие априорные оценки. Ранее единственность классического решения линеаризованной одномерной нестационарной КГД системы была доказана в [2].

В настоящей работе для трехмерной нестационарной КГД системы в баротропном приближении поставлена начально–краевая задача в ограниченной области с регулярной границей. Выведено основное энергетическое равенство, с помощью которого получены априорные оценки, в частности, неравенства для плотности, скорости и давления. Доказана абсолютная устойчивость равновесных решений этой системы.

1. Начально–краевая задача для квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении

Квазигидродинамическая система в баротропном приближении без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u}) = \mathrm{div}\ (\rho \vec{w}), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi_{NS} + \mathrm{div}\ [(\rho \vec{w} \otimes \vec{u}) + (\rho \vec{u} \otimes \vec{w})], \tag{1.2}$$

$$p = p(\rho). \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Pi_{NS} = \eta \Big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T - \frac{2}{3}\ I\ \mathrm{div}\ \vec{u} \Big), \tag{1.4}$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} \big(\rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p \big). \tag{1.5}$$

Необходимо присоединить также зависимости

$$\eta = \eta(\rho), \quad \tau = \tau(\rho) \tag{1.6}$$

коэффициента динамической вязкости η и характерного времени релаксации τ от плотности ρ.

Будем считать, что функции $p(\rho) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\eta(\rho) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\tau(\rho) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежат соответственно классам гладкости $C^2(\mathbb{R}_+)$, $C^1(\mathbb{R}_+)$, $C^1(\mathbb{R}_+)$. Здесь $\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел. Предположим также, что при всех $\rho > 0$ для производной $p'(\rho)$ выполнено условие

$$p'(\rho) > 0. \tag{1.7}$$

В случае идеального политропного газа функции (1.3), (1.6) имеют вид

$$p(\rho) = p_a \Big(\frac{\rho}{\rho_a} \Big)^{\gamma}, \tag{1.8}$$

$$\eta(\rho) = \eta_a \Big(\frac{\rho}{\rho_a} \Big)^{\omega(\gamma-1)}, \tag{1.9}$$

$$\tau(\rho) = \frac{\eta(\rho)}{Sc\ p(\rho)} = \tau_a \Big(\frac{\rho_a}{\rho}\Big)^{\gamma(1-\omega)+\omega}, \tag{1.10}$$

где p_a и η_a – известные положительные значения давления и коэффициента динамической вязкости соответственно при $\rho = \rho_a > 0$, $\tau_a = \eta_a/(Sc\ p_a)$, γ – показатель адиабаты из промежутка $[1,\ 3]$, ω – показатель степенной зависимости вязкости от температуры, принадлежащий отрезку $[0,\ 1]$, Sc – число Шмидта. В частности, для одноатомного газа твердых шаров $\gamma = 5/3$, $\omega = 0.5$, $Sc = 0.77$ (см. [3]). Заметим, что для функции (1.8) условие (1.7) выполняется.

Система (1.1) – (1.3) замкнута относительно неизвестных функций – плотности $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Здесь t – время, $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ – вектор в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, характеризуемый своими компонентами $x_1,\ x_2,\ x_3$ в правом ортонормированном декартовом базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. При $\tau \to 0$ система (1.1) – (1.3) переходит в классическую систему Навье–Стокса в баротропном приближении.

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к $\partial\Omega$ в точке $\vec{x} \in \partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0,\ T]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,\ T]$ – его замыкание, T – заданное положительное число или символ $+\infty$ соответственно. Добавим к (1.1) – (1.3) начальные условия

$$\rho\Big|_{t=0} = \rho_0(\vec{x}), \quad \vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad p\Big|_{t=0} = p_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}, \tag{1.11}$$

а также граничные условия

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,\ T]. \tag{1.12}$$

Здесь $\rho_0(\vec{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\vec{u}_0(\vec{x}) \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, $p_0(\vec{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ – заданные функции, причем $\rho_0(\vec{x}) > 0$ при всех $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. Для них выполняются равенства

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{u}_0\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), f_3(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Определение. *Решением начально–краевой задачи* (1.1) – (1.3), (1.11) – (1.12) *назовем функции* $\rho = \rho(\vec{x},\ t) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, *удовлетворяющие уравнениям* (1.1) – (1.3), *начальным условиям* (1.11), *краевым условиям* (1.12), *и такие, что* $\rho(\vec{x},\ t) > 0$ *при всех* $(\vec{x},\ t) \in \overline{Q}$.

Изучим свойства этого решения, предполагая, что при некоторых ρ_0, $\vec{u}_0$, p_0 оно существует.

2. Закон сохранения массы

Простейшим является свойство сохранения массы

$$\mathcal{M}(t) = \int\limits_{\Omega} \rho(\vec{x}, t)\ d\Omega \tag{2.1}$$

сплошной среды в рассматриваемом объеме с течением времени. Продифференцируем (2.1) по t и воспользуемся правилом Лейбница:

$$\frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial\rho}{\partial t}\ d\Omega. \tag{2.2}$$

Исключим в (2.2) частную производную $\partial\rho/\partial t$ с помощью (1.1), а затем полученный интеграл преобразуем с помощью формулы Гаусса–Остроградского. Это дает

$$\frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial\Omega} \rho(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n}\ dS = 0. \tag{2.3}$$

Здесь dS – элемент площади поверхности $\partial\Omega$ около единичного вектора $\vec{n}$. Второе слагаемое в левой части (2.3) равно нулю в силу граничных условий (1.12) и свойств гладкости функций ρ, $\vec{u}$, p. Поэтому

$$\frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} = 0 \tag{2.4}$$

и для всех t из промежутка $[0,\ T]$ выполняется равенство

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}(0) = \rho_*|\Omega|, \tag{2.5}$$

выражающее закон сохранения массы. Здесь $|\Omega|$ – лебегова мера множества Ω,

$$\rho_* = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \rho_0\ d\Omega \tag{2.6}$$

– положительная средняя плотность в начальный момент времени.

3. Основное энергетическое равенство

Справедливы формулы

$$\rho\vec{u} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{3.1}$$

$$\rho\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\vec{u} = \rho(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{3.2}$$

$$\vec{u} \cdot \mathrm{div}\ \Pi_{NS} = \sum_{i,j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\Pi_{NS})_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j(\Pi_{NS})_{ij}\Big) -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3}(\Pi_{NS})_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\mathrm{div}\,(\Pi_{NS}\cdot\vec{u})-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(\Pi_{NS})_{ij}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)=$$
$$=\mathrm{div}\,(\Pi_{NS}\cdot\vec{u})-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(\Pi_{NS})_{ij}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\,\vec{u}\Big)=$$
$$=\mathrm{div}\,(\Pi_{NS}\cdot\vec{u})-\varPhi_{NS}, \tag{3.3}$$

$$\vec{u}\cdot\mathrm{div}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{w})=\sum_{i,j=1}^{3}u_j\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i w_j)=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i w_j u_j)-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{3}w_j\rho u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\mathrm{div}\,\Big(\rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big)-\vec{w}\cdot\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\varPhi_{NS}=\frac{1}{2\eta}(\Pi_{NS}):(\Pi_{NS})=\frac{1}{2\eta}\sum_{i,j=1}^{3}(\Pi_{NS})_{ij}(\Pi_{NS})_{ij} \tag{3.5}$$

– неотрицательная диссипативная функция системы Навье–Стокса, $\vec{u}^2=|\vec{u}|^2=(\vec{u}\cdot\vec{u})=\sum_{i=1}^{3}u_i^2$ – скалярный квадрат вектора $\vec{u}$, δ_{ij} – символ Кронекера. При проведении формальных выкладок (3.3) учтено, что матрица $(\Pi_{NS})_{ij}$ является симметрической и имеет нулевой след.

Принимая во внимание (1.1), представим (1.2) в недивергентной форме

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\vec{u}+\nabla p=\mathrm{div}\,\Pi_{NS}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{3.6}$$

Умножим обе части (3.6) скалярно на $\vec{u}$ и преобразуем результат с помощью выражений (3.1) – (3.5). Будем иметь

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+\rho(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+(\vec{u}\cdot\nabla p)=$$
$$=\mathrm{div}\,\Big((\Pi_{NS}\cdot\vec{u})+\rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big)-\vec{w}\cdot\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}-\varPhi_{NS}. \tag{3.7}$$

Если учесть (1.1) и (1.5), то равенство (3.7) может быть приведено к эквивалентному виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+\mathrm{div}\,\Big[\rho(\vec{u}-\vec{w})\frac{\vec{u}^2}{2}-(\Pi_{NS}\cdot\vec{u})-\rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big]+$$
$$+(\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla p=-\varPhi, \tag{3.8}$$

где

$$\varPhi=\varPhi_{NS}+\frac{\rho\vec{w}^2}{\tau} \tag{3.9}$$

– неотрицательная диссипативная функция системы (1.1) – (1.3).

Для $\rho>0$ введем функцию

$$P_*(\rho)=\int_{\rho_*}^{\rho}\Big(\frac{\rho}{s}-1\Big)p'(s)\,ds, \tag{3.10}$$

где средняя плотность ρ_* в момент времени $t = 0$ определена формулой (2.6). Подобная функция рассматривалась, например, А.А. Злотником в работе [5]. Она обладает следующими свойствами:

$$P_*(\rho) > 0 \text{ при всех } \rho \in \mathbb{R}_+, \text{ таких, что } \rho \neq \rho_*; \tag{3.11}$$

$$P_*(\rho_*) = 0; \tag{3.12}$$

$$P'_*(\rho) = \int\limits_{\rho_*}^{\rho} \frac{p'(s)}{s}\, ds, \quad P''_*(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho}. \tag{3.13}$$

Запишем уравнение (1.1) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\Big[\rho(\vec{u} - \vec{w})\Big] = 0. \tag{3.14}$$

Умножим (3.14) на $P'_*(\rho)$ и преобразуем результат к виду

$$\frac{\partial P_*(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\Big[\rho P'_*(\rho)(\vec{u} - \vec{w})\Big] - \rho(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big(P'_*(\rho)\big) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial P_*(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\Big[\rho P'_*(\rho)(\vec{u} - \vec{w})\Big] - \rho P''_*(\rho)(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\rho = 0. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание (3.13), имеем

$$\nabla p = p'(\rho)\nabla\rho = \rho P''_*(\rho)\nabla\rho. \tag{3.16}$$

Следствием (3.15), (3.16) является соотношение

$$\frac{\partial P_*(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\Big[\rho P'_*(\rho)(\vec{u} - \vec{w})\Big] - (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla p = 0. \tag{3.17}$$

Сложим (3.8) и (3.17). Получим основное энергетическое равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2} + P_*(\rho)\Big) + \operatorname{div}\Big[\rho(\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + P'_*(\rho)\Big) -$$

$$-(\Pi_{NS} \cdot \vec{u}) - \rho\vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})\Big] = -\varPhi, \tag{3.18}$$

которое выполняется на решениях начально–краевой задачи (1.1) – (1.3), (1.11) – (1.12)

4. Априорные оценки

На промежутке $[0,\ T]$ определим неотрицательную функцию

$$\varphi(t) = \int\limits_{\Omega} \Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2} + P_*(\rho)\Big)\, d\Omega. \tag{4.1}$$

Дифференцирование (4.1) по t дает

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2} + P_*(\rho)\Big)\ d\Omega. \tag{4.2}$$

Из (4.2) с помощью (3.18) и формулы Гаусса–Остроградского получаем

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial\Omega} (\vec{A}\cdot\vec{n})\ dS = -\int\limits_{\Omega} \varPhi\ d\Omega, \tag{4.3}$$

где

$$\vec{A} = \rho(\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + P'_*(\rho)\Big) - (\Pi_{NS}\cdot\vec{u}) - \rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u}).$$

Заметим, что непрерывно дифференцируемое в Ω векорное поле $\vec{A}$ непрерывно продолжается на границу $\partial\Omega$ и в силу граничных условий (1.12) его поток через указанную границу равен нулю. Поэтому (4.3) может быть записано в виде

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\int\limits_{\Omega} \varPhi\ d\Omega. \tag{4.4}$$

Принимая во внимание неотрицательность $\varPhi$, приходим к неравенству

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leqslant 0. \tag{4.5}$$

Отсюда следует, что при всех $t \in [0,\ T]$ выполняется априорная оценка

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0), \tag{4.6^1}$$

которая может быть записана в эквивалентном виде

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2} + P_*(\rho)\Big)\ d\Omega \leqslant \int\limits_{\Omega}\Big(\rho_0\frac{\vec{u}_0^2}{2} + P_*(\rho_0)\Big)\ d\Omega. \tag{4.6^2}$$

Следствием (4.6), (3.11), (3.12) являются оценки

$$0 \leqslant \mathcal{E}(t) \leqslant \varphi(0), \quad 0 \leqslant \mathcal{F}(t) \leqslant \varphi(0), \quad t \in [0,\ T], \tag{4.7}$$

где

$$\mathcal{E}(t) = \int\limits_{\Omega} \rho\frac{\vec{u}^2}{2}\ d\Omega \tag{4.8}$$

– полная кинетическая энергия среды в объеме Ω,

$$\mathcal{F}(t) = \int\limits_{\Omega} P_*(\rho)\ d\Omega \tag{4.9}$$

– функция, связанная с уравнением состояния (1.3). Итак, неотрицательные величины $\mathcal{E}(t)$ и $\mathcal{F}(t)$ ограниченны сверху на промежутке $[0,\ T]$.

Пусть

$$\vec{\mathcal{I}}(t) = \int\limits_{\Omega} \rho\vec{u}\; d\Omega \tag{4.10}$$

– полный импульс среды в области Ω. Имеем

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \vec{u}\; d\Omega\Big|^2 = \sum_{i=1}^{3}\Big(\int\limits_{\Omega} u_i\; d\Omega\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{3}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_i|\; d\Omega\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Omega} |u_i|\; d\Omega\Big)^2 \leqslant \Big(3\int\limits_{\Omega} |\vec{u}|\; d\Omega\Big)^2.$$

Отсюда

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \vec{u}\; d\Omega\Big| \leqslant 3\int\limits_{\Omega} |\vec{u}|\; d\Omega. \tag{4.11}$$

При любом $t \in [0,\ T]$ справедливы оценки

$$|\vec{\mathcal{I}}(t)| \leqslant 3\int\limits_{\Omega} \rho|\vec{u}|\; d\Omega \leqslant 3\sqrt{2}\Big(\int\limits_{\Omega} \rho d\Omega\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega} \frac{\rho\vec{u}^2}{2}\; d\Omega\Big)^{1/2} \leqslant 3\sqrt{2\rho_*|\Omega|\varphi(0)}. \tag{4.12}$$

При выводе (4.12) использованы формулы (4.11), (4.7), (2.5), а также неравенство Коши–Буняковского. Таким образом, полный импульс $\vec{\mathcal{I}}(t)$ есть ограниченная вектор–функция на $[0,\ T]$.

Проинтегрируем теперь (4.4) по промежутку $[0,\ T]$. Принимая во внимание неотрицательность $\varphi(T)$, получим

$$\varphi(T) = \varphi(0) - \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\Omega} \Phi\; d\Omega \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\int\limits_{Q} \Phi\; d\Omega\; dt \leqslant \varphi(0). \tag{4.13^1}$$

Сведение повторного интеграла к интегралу по цилиндру Q для неотрицательных функций законно. Эквивалентная запись (4.13^1) такова:

$$\int\limits_{Q} \Big[\Phi_{NS} + \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)^2\Big] d\Omega\; dt \leqslant \varphi(0). \tag{4.13^2}$$

Следствиями (4.13) являются неравенства

$$\int\limits_{Q} \Phi_{NS}\; d\Omega\; dt \leqslant \varphi(0) \tag{4.14}$$

и

$$\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p\big)^2\ d\Omega\ dt \leqslant \varphi(0). \tag{4.15}$$

Заметим, что все выведенные априорные оценки, кроме (4.15), справедливы и для соответствующей системы Навье–Стокса в аналогично поставленной начально–краевой задаче. Неравенство (4.15) является следствием более сложной структуры диссипативного функционала Φ и дает дополнительную информацию о свойствах решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении.

Для получения дальнейших оценок сделаем дополнительное предположение о существовании таких положительных постоянных ρ_1, ρ_2 и M, что при всех $(\vec{x},t)\in Q$ выполнены условия

$$\rho_1 \leqslant \rho(\vec{x},t) \leqslant \rho_2, \tag{4.16}$$

$$\Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{x},t)\Big| \leqslant M. \tag{4.17}$$

Эти неравенства не очевидны лишь в случае $T=+\infty$, поскольку при конечном $T>0$ существование указанных констант вытекает из теоремы Вейерштрасса. Наложим также ограничения на функции (1.3), (1.6):

$$p''(\rho) \geqslant 0, \tag{4.18}$$

$$\eta'(\rho) \geqslant 0, \tag{4.19}$$

$$\tau'(\rho) \leqslant 0. \tag{4.20}$$

Заметим, что для зависимостей (1.8) – (1.10) условия (4.18) – (4.20) выполняются.

Справедлива цепочка равенств и неравенств

$$\int\limits_Q \Phi_{NS}\ d\Omega\ dt = \frac{1}{2}\int\limits_Q \eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\ \vec{u}\Big)^2\ d\Omega\ dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\eta_1}{2}\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\ d\Omega\ dt =$$

$$= \frac{\eta_1}{2}\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\ d\Omega\ dt =$$

$$= \frac{\eta_1}{2}\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2\ d\Omega\ dt - \frac{2}{3}\eta_1\int\limits_Q(\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt =$$

$$= \eta_1\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ d\Omega\ dt + \eta_1\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ d\Omega\ dt - \frac{2}{3}\eta_1\int\limits_Q(\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt =$$

$$= \eta_1\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ d\Omega\ dt + \eta_1\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\ d\Omega\ dt -$$

$$-\eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}\, d\Omega\ dt - \frac{2}{3}\eta_1 \int\limits_Q (\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt =$$

$$= \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt + \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\, d\Omega\ dt -$$

$$-\eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i}\, d\Omega\ dt - \frac{2}{3}\eta_1 \int\limits_Q (\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt =$$

$$= \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt + \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\, d\Omega\ dt -$$

$$-\eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)\, d\Omega\ dt + \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, d\Omega\ dt -$$

$$-\frac{2}{3}\eta_1 \int\limits_Q (\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt = \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt + \frac{1}{3}\eta_1 \int\limits_Q (\mathrm{div}\ \vec{u})^2 d\Omega\ dt +$$

$$+\eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big) d\Omega\ dt \geqslant \eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt +$$

$$+\eta_1 \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \Big(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\, n_i\ dS. \tag{4.21}$$

Последний интеграл в (4.21) равен нулю в силу краевых условий (1.12) и свойств гладкости векторного поля $\vec{u}$. Здесь $\eta_1 = \eta(\rho_1)$. Мы учли также условия (4.16) и вытекающее из (4.19) свойство монотонного возрастания функции $\eta(\rho)$. Проведенные рассуждения аналогичны тем, которые использовались В.А. Кондратьевым и О.А. Олейник [6] при получении простого доказательства неравенства А. Корна.

Таким образом, имеет место неравенство

$$\eta_1 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt \leqslant \int\limits_Q \Phi_{NS}\ d\Omega\ dt. \tag{4.22}$$

Следствием (4.14), (4.22) является априорная оценка

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega\ dt \leqslant \frac{\varphi(0)}{\eta_1}. \tag{4.23}$$

Чтобы вывести еще одну оценку для скорости, воспользуемся известным (см. [7]) неравенством К. Фридрихса

$$\int\limits_\Omega \vec{u}^2\ d\Omega \leqslant c_F \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega, \tag{4.24}$$

в котором $c_F = c_F(\Omega)$ – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик области Ω. Интегрирование (4.24) по промежутку $[0,\ T]$ дает

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\, d\Omega\, dt \leqslant c_F \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\, d\Omega\, dt. \tag{4.25}$$

Следствием (4.23), (4.25) является неравенство

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\, d\Omega\, dt \leqslant \frac{\varphi(0)\ c_F}{\eta_1}. \tag{4.26}$$

Приступим к получению априорных оценок для давления и плотности. Имеем

$$\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}(\nabla p)^2\, d\Omega\, dt = \int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p - \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)^2\, d\Omega\, dt =$$

$$= \int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)^2\, d\Omega\, dt + \int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)^2\, d\Omega\, dt -$$

$$-2\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)\cdot\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)^2\, d\Omega\, dt + 2\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)^2\, d\Omega\, dt. \tag{4.27}$$

Из (4.15), (4.27) получаем

$$\int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}(\nabla p)^2\, d\Omega\, dt \leqslant 2\varphi(0) + 2\int\limits_Q \tau\rho\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)^2\, d\Omega\, dt. \tag{4.28}$$

Принимая во внимание ограничения (4.16), (4.17), (4.20), с помощью (4.28) находим

$$\frac{\tau_2}{\rho_2}\int\limits_Q (\nabla p)^2\, d\Omega\, dt \leqslant \int\limits_Q \frac{\tau}{\rho}(\nabla p)^2\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0) + 2\int\limits_Q \tau\rho\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)^2\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0) + 2\tau_1\rho_2 \int\limits_Q \sum_{i,k=1}^{3} u_i u_k \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0) + 2\tau_1\rho_2 \int\limits_Q \sum_{i,k=1}^{3} |u_i||u_k| \sum_{j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Big|\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0) + 6M^2\tau_1\rho_2 \int\limits_Q \sum_{i,k=1}^{3} |u_i||u_k| d\Omega\ dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0) + 6M^2\tau_1\rho_2 \int\limits_Q \sum_{i,k=1}^{3} \Big(\frac{u_i^2}{2} + \frac{u_k^2}{2}\Big) d\Omega\ dt =$$

$$= 2\varphi(0) + 18M^2\tau_1\rho_2 \int\limits_Q \vec{u}^2 d\Omega\ dt. \qquad (4.29)$$

Здесь $\tau_1 = \tau(\rho_1)$, $\tau_2 = \tau(\rho_2)$. Учет (4.26) в (4.29) дает

$$\int\limits_Q (\nabla p)^2\ d\Omega\ dt \leqslant \frac{2\varphi(0)\rho_2}{\tau_2}\Big(1 + \frac{9M^2 c_F \tau_1 \rho_2}{\eta_1}\Big). \qquad (4.30)$$

Воспользовавшись условиями (4.16), (4.18), можем записать

$$\big(p'(\rho_1)\big)^2 \int\limits_Q (\nabla\rho)^2\ d\Omega\ dt \leqslant \int\limits_Q \big(p'(\rho)\big)^2 (\nabla\rho)^2\ d\Omega\ dt =$$

$$= \int\limits_Q (\nabla p)^2\ d\Omega\ dt \leqslant \frac{2\varphi(0)\rho_2}{\tau_2}\Big(1 + \frac{9M^2 c_F \tau_1 \rho_2}{\eta_1}\Big).$$

Отсюда

$$\int\limits_Q (\nabla\rho)^2\ d\Omega\ dt \leqslant \frac{2\varphi(0)\rho_2}{\big(p'(\rho_1)\big)^2\tau_2}\Big(1 + \frac{9M^2 c_F \tau_1 \rho_2}{\eta_1}\Big). \qquad (4.31)$$

Теперь нам потребуется классическое неравенство А. Пуанкаре

$$\int\limits_\Omega \psi^2\ d\Omega \leqslant c_P^* \int\limits_\Omega (\nabla\psi)^2\ d\Omega + c_P^{**}\Big(\int\limits_\Omega \psi\ d\Omega\Big)^2, \qquad (4.32)$$

справедливое для любой функции $\psi = \psi(\vec{x}) \in C^1(\overline{\Omega})$ (см. [7]). Здесь $c_P^* = c_P^*(\Omega)$ и $c_P^{**} = c_P^{**}(\Omega)$ – положительные постоянные, зависящие только от геометрических характеристик Ω. Подставляя в (4.32) вместо ψ функцию $\rho - \rho_*$, получим

$$\int\limits_\Omega (\rho - \rho_*)^2\ d\Omega \leqslant c_P^* \int\limits_\Omega (\nabla\rho)^2\ d\Omega + c_P^{**}\Big(\int\limits_\Omega (\rho - \rho_*)\ d\Omega\Big)^2. \qquad (4.33)$$

Последний интеграл в (4.33) равен нулю в силу закона сохранения массы (2.5). Поэтому выполняется оценка

$$\int\limits_\Omega (\rho - \rho_*)^2\ d\Omega \leqslant c_P^* \int\limits_\Omega (\nabla\rho)^2\ d\Omega. \qquad (4.34)$$

Интегрирование (4.34) по промежутку $[0,\ T]$ дает

$$\int\limits_Q (\rho - \rho_*)^2\ d\Omega\ dt \leqslant c_P^* \int\limits_Q (\nabla\rho)^2\ d\Omega\ dt. \qquad (4.35)$$

Комбинация (4.31) и (4.35) приводит к неравенству

$$\int\limits_Q (\rho-\rho_*)^2\ d\Omega\ dt \leqslant 2\varphi(0)\frac{c_P^*\rho_2}{\big(p'(\rho_1)\big)^2\tau_2}\Big(1+\frac{9M^2c_F\tau_1\rho_2}{\eta_1}\Big). \tag{4.36}$$

Пусть $p_*=p(\rho_*)$. По формуле конечных приращений Лагранжа

$$p-p_*=p(\rho)-p(\rho_*)=p'(\widetilde{\rho})(\rho-\rho_*),$$

где $\widetilde{\rho}$ принадлежит отрезку с концами ρ и ρ_*. Отсюда с учетом (4.16), (4.18) выводим оценку

$$(p-p_*)^2\leqslant \big(p'(\rho_2)\big)^2\ (\rho-\rho_*)^2. \tag{4.37}$$

Интегририруя (4.36) по цилиндру Q, находим

$$\int\limits_Q (p-p_*)^2\ d\Omega\ dt\leqslant \big(p'(\rho_2)\big)^2\int\limits_Q (\rho-\rho_*)^2\ d\Omega\ dt. \tag{4.38}$$

Из (4.36) и (4.38) следует, что

$$\int\limits_Q (p-p_*)^2\ d\Omega\ dt\leqslant 2\varphi(0)\Big(\frac{p'(\rho_2)}{p'(\rho_1)}\Big)^2\frac{c_P^*\rho_2}{\tau_2}\Big(1+\frac{9M^2c_F\tau_1\rho_2}{\eta_1}\Big). \tag{4.39}$$

5. Устойчивость равновесных решений

Для функции $\psi=\psi(\vec{x})\in C^1(\overline{\Omega})$ и вектор–функции $\vec{v}=\vec{v}(\vec{x})\in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ определим нормы по формулам

$$||\psi||_{W_2^1(\Omega)}=\Big(\int\limits_\Omega \psi^2\ d\Omega+\int\limits_\Omega (\nabla\psi)^2\ d\Omega\Big)^{1/2},$$

$$||\vec{v}||_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}=\Big(\int\limits_\Omega \vec{v}^2\ d\Omega+\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2\ d\Omega\Big)^{1/2}.$$

Теорема. *Пусть функции ρ, $\vec{u}$, p, η, τ удовлетворяют перечисленным выше условиям, $(\rho,\vec{u},p)$ – решение поставленной начально–краевой задачи при $T=+\infty$. Тогда*

$$||\rho-\rho_*||_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \tag{5.1}$$

$$||p-p_*||_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \tag{5.2}$$

$$||\vec{u}||_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\to 0 \tag{5.3}$$

при $t\to+\infty$.

Доказательство. Принимая во внимание неравенства (4.23), (4.26), (4.30), (4.31), (4.36) и (4.39), убеждаемся в существовании таких чисел A_1, A_2 и A_3, что

$$\int\limits_0^{+\infty} ||\rho-\rho_*||^2_{W_2^1(\Omega)}\ dt\leqslant A_1, \tag{5.4}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} ||p - p_*||^2_{W_2^1(\Omega)}\ dt \leqslant A_2, \quad (5.5)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} ||\vec{u}||^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\ dt \leqslant A_3. \quad (5.6)$$

Формулы (5.1) – (5.3) вытекают их сходимости несобственных интегралов (5.4) – (5.6) от неотрицательных функций.

Таким образом, плотность ρ и давление p при $t \to +\infty$ стремятся к своим равновесным значениям ρ_* и p_* в смысле среднего квадратичного, а все производные от ρ, $\vec{u}$, p по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 стремятся к нулю в том же смысле. Это свидетельствует об абсолютной устойчивости равновесных решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении для поставленной начально–краевой задачи.

Заключение

Открытым остается вопрос о существовании и единственности классического или обобщенного решения поставленной начально–краевой задачи. Проблемам корректности постановок посвящена обзорная статья Р.Х. Зейтуняна [8], где есть упоминание и о КГД системе для слабосжимаемой жидкости. Трудности доказательств глобальных теорем о существовании решений трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости подробно проанализированы О.А. Ладыженской [9]. Не исключено, что аналогично поставленные задачи для соответствующего варианта КГД системы могут быть решены проще вследствие более богатой структуры диссипативного функционала.

Отметим, что физические принципы построения систем гидродинамики с неклассическим уравнением неразрывности и теоремы о существовании, условиях единственности и свойствах решений этих систем в последнее время активно обсуждаются за рубежом [10]–[12].

Список литературы

[1] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун–т, 1997. — С. 127–155.

[2] Шеретов Ю.В. Анализ задачи о распространении звука для линеаризованных КГД–систем // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун–т, 2001. — С. 178–191.

[3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — М.– Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 400 с.

[4] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, Вып. 5. — С. 667–682.

[5] Злотник А.А. О некоторых свойствах уравнений двумерной квазигазодинамической модели транстпортных потоков // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 373–381.

[6] Кондратьев В.А., Олейник А.А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, Вып 5. — С. 55–98.

[7] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.

[8] Зейтунян Р.Х. Корректность задач динамики жидкостей (гидродинамическая точка зрения) // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, Вып 3. — С. 3–92.

[9] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, Вып 2. — С. 45–78.

[10] Brenner H. Fluid mechanics revisited // Physica A. — 2006. — Vol. 370. P. 190–224.

[11] Brenner H. Bi-velocity hydrodynamics // Physica A. — 2009. — Vol. 388. P. 3391–3398.

[12] Feireisl E., Vasseur A. New perspectives in fluid dynamics: mathematical analysis of a model proposed by Howard Brenner: Preprint of Nečas Center for Mathematical Modeling. — Prague, 2008. — 31 p.