УДК 517.8

ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТОТ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СТРУНЫ С ФИКСИРОВАННЫМ КОНЦОМ

Ханыгин М.А., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 16.06.2009, после переработки 23.06.2009.

Для струны с одним массивным и одним фиксированным концами исследованы произвольные малые возмущения равномерного вращения прямолинейной струны. Два класса таких возмущений с различными спектрами собственных частот соответствуют колебаниям струны в плоскости вращения и в ортогональном направлении. Выведены уравнения спектра частот малых возмущений и доказано, что эти частоты являются вещественными простыми корнями соответствующих уравнений. Это подтверждает вывод об устойчивости равномерного вращения струны относительно малых возмущений.

For the open relativistic string with one massive end and one fixed end arbitrary small disturbances of uniform rotations are studied. There are two classes of these disturbances with different spectra of frequencies. They correspond to string oscillations in the rotational plane and in the orthogonal direction. Equations for spectra of small disturbances are deduced. It is shown that their roots (frequencies of small disturbances) are real simple roots. This fact confirms stability of string uniform rotations with respect to small disturbances.

Ключевые слова: струна с массивными концами, малые возмущения, устойчивость, спектр частот.
Keywords: string with massive ends, small disturbances, stability, spectrum of frequencies.

1. Введение

Ротационные состояния струны с массивными концами, соответствующие равномерному вращению прямолинейной струны, широко используются различными авторами для описания возбужденных состояний мезонов и барионов на ведущих траекториях Редже [1, 2, 3]. Однако состояния адронов, лежащие на так называемых дочерних траекториях Редже, требуют для описания в рамках струнной модели привлечения более широкого класса движений, в частности, возмущений равномерно вращающейся прямолинейной струны. Малые возмущения данного вида описаны в работах [4, 5], однако сделанный в них вывод об устойчивости ротационных состояний струны с массивными концами представляется недостаточно обоснованным.

Целью настоящей работы является анализ уравнений спектра частот малых возмущений данных ротационных состояний, доказательство вещественности и простоты корней этих уравнений. Это позволяет обосновать вывод об устойчивости ротационных состояний струны с массивными концами.

2. Динамика и ротационные состояния

Рассмотрим струну с натяжением γ с массами m_1 и m_2 на концах. Мировая поверхность, заметаемая такой струной в пространстве Минковского $R^{1,3}$, с параметризацией $X^\mu(\tau,\sigma)$, $\sigma\in[\sigma_1(\tau),\sigma_2(\tau)]$ без ограничения общности [1] допускает такой выбор координат τ, σ, в которых выполняются условия ортонормальности

$$(\dot X \pm X')^2 = 0, \tag{1}$$

вследствие чего уравнения движения для струны

$$\ddot X^\mu + X''^\mu = 0, \tag{2}$$

и для массивных концов (краевые условия)

$$m_j\frac{d}{d\tau}U_j^\mu(\tau) + (-1)^j\gamma X'^\mu(\tau,\sigma_j) = 0, \quad j = 1,2 \tag{3}$$

принимают простейший вид. Здесь $\dot X^\mu\equiv\partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu\equiv\partial_\sigma X^\mu$, в уравнениях (3) используется обозначение

$$U_j^\mu(\tau) = \frac{\dot X^\mu(\tau,\sigma_j)}{\sqrt{\dot X^2(\tau,\sigma_j)}} \tag{4}$$

для единичного вектора скорости j-го конца струны, причем внутренние координаты этих концов без потери общности [1] выбраны в виде

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = \pi. \tag{5}$$

Мировую поверхность струны с массами на концах, отвечающую ротационному состоянию, зададим в виде [3, 4, 5]

$$X^\mu = \underline{X}^\mu(\tau,\sigma) = \Omega^{-1}\big[\theta\tau e_0^\mu + \cos(\theta\sigma+\phi_1)\cdot e^\mu(\tau)\big], \qquad \sigma\in[0,\pi], \tag{6}$$

удовлетворяющем условиям (1) и уравнениям (2), (3). Здесь e_0^μ — единичный времениподобный вектор скорости центра масс, в то время как сонаправленный со струной вращающийся единичный ($e^2=-1$) вектор $e^\mu(\tau)$ в совокупности с $\acute e^\mu$

$$e^\mu(\tau) = e_1^\mu\cos\theta\tau + e_2^\mu\sin\theta\tau, \qquad \acute e^\mu = \theta^{-1}\frac{d}{d\tau}e^\mu(\tau) = -e_1^\mu\sin\theta\tau + e_2^\mu\cos\theta\tau$$

образуют подвижный базис в плоскости вращения. Четыре вектора e_0^μ, $e^\mu(\tau)$, $\acute e^\mu(\tau)$, e_3^μ ниже будут использованы в качестве ортонормированного репера в $R^{1,3}$. Постоянные скорости концов струны v_j связаны с параметрами θ, ϕ_1 и с угловой частотой вращения Ω соотношениями:

$$v_1 = \cos\phi_1, \qquad v_2 = -\cos(\pi\theta+\phi_1), \qquad m_j\Omega/\gamma = v_j^{-1} - v_j. \tag{7}$$

Используя общее решение уравнения (2)

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\big[\Psi_+^\mu(\tau+\sigma) + \Psi_-^\mu(\tau-\sigma)\big], \tag{8}$$

мы можем свести уравнения (3) для концов струны к виду [4, 5]

$$\dot U_1^\mu(\tau) \;=\; \gamma m_1^{-1}\big[\delta_\nu^\mu - U_1^\mu(\tau)\,U_{1\nu}(\tau)\big]\,\dot\Psi_+^\nu(\tau), \tag{9}$$

$$\dot U_2^\mu(\tau) \;=\; \gamma m_2^{-1}\big[\delta_\nu^\mu - U_2^\mu(\tau)\,U_{2\nu}(\tau)\big]\,\dot\Psi_-^\nu(\tau-\pi). \tag{10}$$

Точка здесь и ниже означает производную по τ. Если один из концов струны имеет бесконечно большую массу, например, $m_2 \to \infty$, то из уравнения (10) следует равенство $U_2^\mu(\tau) = U_2^\mu = \text{const}$, то есть бесконечно тяжелый конец движется с постоянной скоростью или покоится в некоторой системе отсчета. В этом случае, упомянутый конец струны можно считать фиксированным, краевое условие (3) или (10) для него принимает вид

$$\dot\Psi_\pm^\mu(\tau) = B_\nu^\mu \dot\Psi_\mp^\nu(\tau\mp 2\pi), \qquad \text{где} \qquad B_\lambda^\nu \equiv 2U_2^\mu U_{2\nu} - \delta_\nu^\mu = \text{const}, \quad m_2 \to \infty,$$

а система уравнений (9), (10) сведется к одному уравнению

$$\dot U_1^\mu(\tau) = (\delta_\nu^\mu - U_1^\mu U_{1\nu})\,B_\kappa^\nu\Big[\sqrt{-\dot U_1^2(-)}\,U_1^\kappa(-) - \dot U_1^\kappa(-)\Big]. \tag{11}$$

Здесь и ниже $(-) \equiv (\tau - 2\pi)$, аргумент (τ) может быть опущен.

Заметим, что для системы с безмассовым концом $m_2 = 0$, $0 < m_1 < \infty$ соответствующее уравнение отличается от (11) лишь заменой B_κ^ν на δ_κ^ν.

Уравнение (11) полностью определяет динамику струны с $m_2 \to \infty$. А именно, если задана функция $U_1^\mu(\tau)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$ и величины m_1/γ, $U_2^\mu = \text{const}$, то, проинтегрировав уравнение (11) и получив вектор-функцию $U_1^\mu(\tau)$ при всех значениях τ, мы можем определить мировую поверхность струны $X^\mu(\tau,\sigma)$ с помощью равенств (8) и формул [5]

$$\dot\Psi_\pm^\mu(\tau) = m_1\gamma^{-1}\Big[\sqrt{-\dot U_1^2(\tau)}\;U_1^\mu(\tau) \pm \dot U_1^\mu(\tau)\Big], \tag{12}$$

следующих из уравнений (3). Сказанное верно и для системы (9), (10) при $m_2 < \infty$.

Для ротационного движения (6) единичный вектор U_1^μ имеет вид

$$U_1^\mu(\tau) = \underline{U}_1^\mu(\tau) = \Gamma_1\big[e_0^\mu + v_1 \acute e^\mu(\tau)\big], \qquad \text{где} \quad \Gamma_1 = (1 - v_1^2)^{-1/2}. \tag{13}$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (11) при $m_2 \to \infty$, если параметры v_1, m_1, θ связаны соотношениями (7).

3. Малые возмущения ротационного состояния

Для описания *произвольного* близкого к ротационному (квазиротационного) движения системы с $m_2 \to \infty$ зададим вектор-функцию $U_1^\mu(\tau)$ близкую к $\underline{U}_1^\mu$ в виде

$$U_1^\mu(\tau) = \underline{U}_1^\mu(\tau) + u^\mu(\tau), \qquad |u^\mu| \ll 1. \tag{14}$$

Возмущение $u^\mu(\tau)$ считаем малым, опуская квадратичные по u слагаемые. В силу единичности как вектор-функции $U_1^\mu(\tau)$, так и $\underline{U}_1^\mu(\tau)$ в выражении (14) получаем в силу малости u^2 условие

$$\big(\underline{U}_1(\tau), u(\tau)\big) = 0. \tag{15}$$

Для вывода уравнений, описывающих эволюцию малого возмущения $u^\mu(\tau)$ струны с $m_2 \to \infty$, подставим выражения (14), (13) (полагая $\underline{U}_2^\mu = e_0^\mu = \text{const}$) в уравнение (11), описывающее динамику данной системы. В результате в первом линейном приближении получим уравнение эволюции для u^μ

$$\begin{aligned}\dot u^\mu + Q_1 u^\mu + \underline{U}_1^\mu(\dot{\underline{U}}_1, u) = (\delta^\mu_\nu - \underline{U}_1^\mu \underline{U}_{1\nu})\, B^\nu_\kappa \big[Q_1 u_1^\kappa(-) - \dot u^\kappa(-)\big] + \\ + Q_1^{-1}\big[(1+2v_1^2)\,\underline{U}_1^\mu - B^\mu_\nu \underline{U}_1^\nu(-)\big](\dot{\underline{U}}_1(-), \dot u(-)),\end{aligned}$$

где

$$Q_1 = \sqrt{-\bar U_1'^2} = \Gamma_1 \theta v_1 = \frac{v_1 \arcsin v_1}{\pi\sqrt{1-v_1^2}} = \text{const}, \qquad (v_2 = 0). \tag{16}$$

Обозначим три независимые проекции вектор-функции (возмущения) u^μ на базисные векторы e_0^μ, $e^\mu(\tau)$, $\acute e^\mu(\tau)$, e_3^μ, следующим образом:

$$u_0(\tau) = (e_0, u), \qquad u_e(\tau) = (e, u), \qquad u_z(\tau) = (e_3, u). \tag{17}$$

Четвертая проекция $(\acute e, u)$ в силу равенства (15) выражается через u_0. Проекции уравнения (16) на эти же базисные векторы приводят его с учетом обозначений (17) к следующей системе:

$$\dot u_0 + Q_1 u_0 - \Gamma_1 Q_1 u_e = \dot u_0(-) - Q_1 u_{0(-)} - \Gamma_1 Q_1 u_e(-), \tag{18}$$
$$\dot u_e + Q_1 u_e + \theta v_1^{-1} u_0 = \dot u_e(-) + Q_1 u_e(-) + \theta(v_1^{-1} + 2v_1)\, u_0(-) - 2\Gamma_1^{-1}\dot u_0(-), \tag{19}$$
$$\dot u_z + Q_1 u_z = \dot u_z(-) - Q_1 u_z(-). \tag{20}$$

Уравнение (20) для возмущений вдоль оси Oz или вектора e_0^μ, ортогональных плоскости вращения струны Oxy (в которой лежат векторы e_1^μ, e_2^μ, e^μ, $\acute e^\mu$) не связано с остальными.

Ищем решение уравнения (20) в виде гармоники $u_z(\tau) = \exp(-i\omega\tau)$. Подстановка показывает, что такое решение существует, если безразмерная частота ω (частота этого колебания по отношению к τ) удовлетворяет соотношению

$$\omega / Q_1 = \operatorname{ctg} \pi\omega, \tag{21}$$

Из свойств функции $\operatorname{ctg} x$ следует, что данное уравнение имеет счетный набор простых вещественных корней. Покажем, что уравнение (21) не имеет корней с ненулевой мнимой частью.

Положим $\omega = \eta + i\xi$ и, используя соотношения $\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta - i \sin\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta$, $\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta + i\cos\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta$, запишем равенство нулю вещественной и мнимой частей уравнения (21) при $\xi \neq 0$ в виде системы

$$\begin{cases} \eta \operatorname{tg}(\pi\eta) = \xi \operatorname{th}(\pi\xi) + Q_1, \\ \eta \operatorname{ctg}(\pi\eta) = -\xi \operatorname{cth}(\pi\xi) - Q_1. \end{cases}$$

Перемножив уравнения этой системы, получим следующее уравнение:

$$\eta^2 + \xi^2 + Q_1^2 = -Q_1\chi(\xi). \tag{22}$$

Здесь $\chi(\xi) = \xi[\operatorname{th}(\pi\xi) + \operatorname{cth}(\pi\xi)]$ — положительная функция.

Левая часть уравнения (22) всегда положительна, в то время как правая часть уравнения всегда отрицательна. Следовательно, решений с $\xi \neq 0$ не существует и уравнение (21) имеет счетный набор вещественных корней $\omega = \omega_n$, $n-1 < \omega_n < n$.

Корни ω_n уравнения (21) при $n > 1$ описывают квазиротационные состояния — возмущения ротационного движения $\underline{X}^\mu$ в виде

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \underline{X}^\mu(\tau,\sigma) + e_3^\mu A_n \cos(\omega_n\sigma + \phi_n)\cdot\cos(\omega_n\tau + \varphi_0), \tag{23}$$

где $\phi_n = \operatorname{arctg}(\omega_n/Q_1)$. Амплитуды A_n малы по сравнению с Ω^{-1}.

Квазиротационное состояние (23) представляет собой колебание вращающейся струны в направлении e_3^μ (ортогональном плоскости вращения) в виде стоячей волны с $n-1$ узлами. Форма данной волны $F = A_n\cos(\omega_n\sigma + \phi_n)$ отличается от синусоидальной, если в качестве аргумента этой функции рассматривать расстояние $s = s(\sigma) = \Omega^{-1}\cos(\theta\sigma + \phi_1)$ до центра вращения. Форма $F = F(s)$ имеет вид

$$F(s) = A_n\sin(\omega_n\theta^{-1}\arcsin\Omega s), \qquad 0 \le s \le R_1 = v_1/\Omega. \tag{24}$$

Случай $n = 1$ тривиален, так как в силу равенства $\omega_1 = \theta$ зависимость (24) линейна, следовательно, движение (23) оказывается по-прежнему ротационным, но с наклоном плоскости вращения струны. Однако квазиротационные колебания струны (23) с частотами ω_n при $n = 2, 3, \ldots$ нетривиальны и способны моделировать физические состояния системы.

Квазиротационные возмущения в плоскости вращения рассматриваемой струны определяются системой уравнений (18), (19). Ее решение в виде гармоники

$$u_0 = b_0\exp(-i\tilde\omega\tau), \qquad u_e = b_1\exp(-i\tilde\omega\tau)$$

существует только в том случае, если "частота" $\tilde\omega$ удовлетворяет условию

$$\frac{\tilde\omega^2 - q_1}{2Q_1\tilde\omega} = \operatorname{ctg}\pi\tilde\omega, \tag{25}$$

Здесь $q_1 = Q_1^2(1 + v_1^{-2})$.

Покажем, что уравнение (25) имеет счетный набор вещественных простых корней. Положим $\tilde\omega = \eta + i\xi$, тогда равенство нулю вещественной и мнимой частей уравнения (25) можно записать в виде

$$\begin{cases} (\eta^2 - \xi^2 - q_1)\operatorname{tg}(\pi\eta) - 2Q_1\eta = 2\xi\big[Q_1\operatorname{tg}(\pi\eta) + \eta\big]\operatorname{th}(\pi\xi), \\ (\eta^2 - \xi^2 - q_1)\operatorname{ctg}(\pi\eta) + 2Q_1\eta = 2\xi\big[Q_1\operatorname{ctg}(\pi\eta) - \eta\big]\operatorname{cth}(\pi\xi). \end{cases}$$

Покажем, что при $\xi \neq 0$ эта система не имеет решений. Перемножив уравнения системы и приведя подобные слагаемые, получаем уравнение

$$4\eta^2(\xi^2 + Q_1^2) = -2Q_1\chi(\xi)(\xi^2 + \eta^2 + q_1),$$

Правая часть этого уравнения имеет отрицательный знак, левая положительна, следовательно уравнение (25) не имеет мнимых корней.

Корни трансцендентного уравнения (25) $\tilde{\omega}_n \in (n-1, n)$, $n \geq 1$ ведут себя подобно корням ω_n уравнения (21), но $\tilde{\omega}_n > \omega_n$.

Покажем, что корни уравнения (25) являются простыми. Для этого рассмотрим систему, состоящую из этого уравнения и его производной по $\tilde{\omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\omega}^2 - q_1)\sin(\pi\tilde{\omega}) - 2Q_1\omega\cos(\pi\tilde{\omega}) = 0 \\ 2\tilde{\omega}(1+\pi Q_1)\sin(\pi\tilde{\omega}) + \left[\pi(\tilde{\omega}^2 - q_1) - 2Q_1\right]\cos(\pi\tilde{\omega}) = 0, \end{array} \right. \tag{26}$$

и покажем, что она не имеет решений.

Исключив из системы (26) $\operatorname{tg}\pi\tilde{\omega}$ и обозначив $x = \tilde{\omega}^2 - q_1$, получим уравнение

$$\pi x^2 + 2Q_1(1 + 2\pi Q_1)\,x + 4Q_1 q_1(1+\pi Q_1) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$\Delta = \frac{4Q_1^2}{v_1^2}\left[v_1^2 - 4\pi Q_1 - 4\pi^2 Q_1^2\right] = \frac{4Q_1^2}{v_1^2}\left[v_1^2 - 4\frac{v_1 \arcsin v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} - 4\pi^2 Q_1^2\right],$$

учитывая выражение (16) получаем следующую оценку:

$$\Delta < -\frac{4Q_1^2}{v_1^2}\left[3v_1^2 + 4\pi^2 Q_1^2\right] < 0.$$

Как видим, система (26) не имеет решений, следовательно все корни уравнения (25) — простые.

Заключение

Возмущения (14) $u^\mu = b^\mu \exp(-i\tilde{\omega}_n\tau)$ отвечают малым колебаниям струны с фиксированным концом в плоскости вращения, имеющим более сложный вид, чем колебания (23). В работе [5] было показано, что произвольное малое возмущение ротационного движения (6) (квазиротационное состояние) можно разложить в ряд Фурье, включающий гармоники как в направлении e_3 (23), так и в плоскости вращения:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \underline{X}^\mu(\tau,\sigma) + \sum_{n\neq 0}\Big\{e_3^\mu A_n\cos(\omega_n\sigma + \phi_n)\exp(-i\omega_n\tau) +$$
$$+ B_n\left[e_0^\mu f_n^0(\sigma) + \acute{e}^\mu(\tau) f_n^\perp(\sigma) + ie^\mu(\tau) f_n^\parallel(\sigma)\right]\exp(-i\tilde{\omega}_n\tau)\Big\}.$$

Здесь

$$f_n^0(\sigma) = 2(\theta^2 - \tilde{\omega}_n^2)\cos\tilde{\omega}_n\check{\sigma}, \qquad \check{\sigma} = \pi - \sigma,$$
$$f_n^\perp(\sigma) = (\tilde{\omega}_n + \theta)^2\sin(\tilde{\omega}_n - \theta)\,\check{\sigma} - (\tilde{\omega}_n - \theta)^2\sin(\tilde{\omega}_n + \theta)\,\check{\sigma},$$
$$f_n^\parallel(\sigma) = (\tilde{\omega}_n + \theta)^2\sin(\theta - \tilde{\omega}_n)\,\check{\sigma} - (\tilde{\omega}_n - \theta)^2\sin(\tilde{\omega}_n + \theta)\,\check{\sigma}.$$

Из вещественности и простоты корней уравнений (21) и (25) для частот возмущений следует устойчивость ротационных движений струны с массивным и фиксированным концами, что крайне важно для приложений этой модели в адронной спектроскопии [5] .

Список литературы

[1] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.

[2] Кобзарев И.Ю., Мартемьянов Б.В., Щепкин М.Г. Орбитальные возбуждения адронов Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. №4. С. 1 – 41.

[3] Шаров Г.С. Струнные модели бариона и траектории Редже Ядерная физика. 1999. Т. 62. №10. С. 1831 – 1843.

[4] Sharov G.S. Quasirotational motions and stability problem in dynamics of string hadron models Physical Review D. 2000. V. 62. №9. P. 094015, hep-ph/0004003.

[5] Шаров Г.С. Возмущенные состояния вращающейся релятивистской струны Теоретич. и математич. физика. 2004. Т. 140. №2. С. 256 – 268.