

УДК 532.5, 517.958, 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЗВУКОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ВБЛИЗИ ШАРА

Семенов М.В., Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа
Yurii.Sheretov@tversu.ru

Предложен новый алгоритм расчета осесимметричных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в окрестности шара. В качестве математической модели используется полная система уравнений Навье–Стокса. Алгоритм строится на основе квазигидродинамических уравнений.

New algorithm for numerical modeling of axis-symmetric viscous compressible heat conducting gas flows in vicinity of sphere is proposed. As main mathematical model the Navier–Stokes system is used. Numerical algorithm is constructed on the base Quasi-Hydrodynamic equations.

Ключевые слова: обтекание шара; численный метод; квазигидродинамические уравнения.

Keywords: flow round a sphere; numerical method; Quasi-Hydrodynamic equations.

Введение. Дозвуковое обтекание сферы жидкостью или газом было предметом многочисленных теоретических [1–5], экспериментальных [6–10] и численных [11–20] исследований. Первые опубликованные результаты измерений сопротивления сфер принадлежат И.Ньютону. Еще один важный шаг был сделан в середине XIXв. Дж.Стоксом, который построил точное решение стационарных линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости в задаче об обтекании шара внешним однородным потоком с условием прилипания скорости на границе шара. Это решение отвечает простому протеканию и адекватно описывает течения жидкости и газа вблизи шара для чисел Re , не превосходящих единицы, при условии, что размеры шара не слишком малы. Здесь $Re = (U_\infty R)/\nu$ — число Рейнольдса, U_∞ — скорость набегающего потока, R — радиус шара, ν — коэффициент кинематической вязкости. При изучении медленного обтекания микросфер газом в диапазоне чисел Кнудсена от 0.01 до 0.1 возникает необходимость постановки максвелловских граничных условий скольжения. Аналитическое решение системы Стокса в этом случае было найдено А.Бассетом [3; 5]. Получена уточненная формула для силы сопротивления, согласующаяся с эмпирическими данными Р.Милликена. Вывод поправки к силе сопротивления, учитывающей влияние числа Рейнольдса, был дан К.Озееном [1].

Большинство экспериментальных исследований посвящено определению коэффициентов сопротивления сфер при обтекании их жидкостью. В некоторых из этих работ (см. [6–10]) изучается вихревой след за сферой, который образуется

при числах $Re \simeq 10$. С ростом числа Re от 10 до 100 течение сохраняет осевую симметрию, а длина зоны рециркуляционного течения увеличивается. При $Re \simeq 100$ происходит спонтанное нарушение осевой симметрии. За телом наблюдается стационарный двухнитевой след, обладающий уже зеркальной симметрией по отношению к некоторой плоскости. Начиная с $Re \simeq 135$ имеет место нестационарный периодический отрыв вихревых петель. Дальнейшее увеличение числа Re приводит к еще более сложной картине обтекания. При высоких числах Рейнольдса результаты экспериментальных исследований разных авторов отчасти противоречат друг другу. В качестве основной математической модели при численном моделировании задачи обтекания шара использовалась преимущественно система уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [11–20]. С помощью техники параллельных вычислений удалось проанализировать режимы обтекания до чисел Рейнольдса порядка 500.

Система квазигидродинамических (КГД) уравнений для несжимаемой среды была предложена в [21], а для сжимаемой – в [22]. Феноменологический вывод КГД-уравнений из интегральных законов сохранения массы, импульса, момента импульса, полной энергии и энтропии для подвижного индивидуального объема дан в [24; 26]. Там же построены семейства точных физически осмысленных решений этой системы. Существенное отличие от теории Навье-Стокса заключалось в использовании процедуры пространственно-временного осреднения при определении основных гидродинамических величин. Специфика пространственно-временных средних по сравнению с мгновенными локальными средними по пространству привела к необходимости пересмотра классической схемы построения уравнений гидродинамики.

Квазигидродинамические уравнения успешно использовались для построения численных методов решения уравнений Навье-Стокса в различных приближениях [23; 25; 26; 28–30]. В [23; 29] проведено моделирование течений несжимаемой жидкости в каверне в двумерной и трехмерной постановках соответственно. Работа [25] посвящена исследованию стационарных и нестационарных конвективных движений жидкости в прямоугольных полостях при малых числах Прандтля. В [28] рассмотрены ламинарные и турбулентные течения газа за обратным уступом. Дополнительную информацию можно найти в книгах [26; 30]. Близкие по виду регуляризаторы для решения уравнений Навье-Стокса позднее были предложены в [27].

В статье [31] построено точное аналитическое решение КГД-системы в приближении Стокса для задачи об обтекании шара однородным потоком газа с условиями максвелловского скольжения скорости на его поверхности. В [32] приведено доказательство теоремы о существовании и единственности обобщенного решения стационарной краевой задачи для КГД-системы в приближении Стокса. Свойства эллиптичности указанной системы по Петровскому и по Дуглису-Ниренбергу установлены в [33]. Работы [34; 35] посвящены численному моделированию на основе КГД-уравнений осесимметричных течений слабосжимаемой жидкости в окрестности шара при низких и умеренных числах Рейнольдса.

В настоящей работе на базе полных квазигидродинамических уравнений построен новый алгоритм расчета дозвуковых течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа вблизи шара в осесимметричной постановке. Проанализированы режимы как простого протекания, так и отрывного.

1. Постановка задачи об обтекании шара для уравнений Навье-Стокса.

Система Навье-Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа в сферических координатах (r, φ, θ) без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho u_\theta) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta u_r \sin \theta) - \\ & - \frac{\rho u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Pi_{\theta r}) - \\ & - \frac{\Pi_{\theta\theta} + \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta^2 \sin \theta) + \\ & + \frac{\rho u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Pi_{\theta\theta}) + \\ & + \frac{\Pi_{\theta r} - \Pi_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho u_r \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \rho u_\theta \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta q_\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 (\Pi_{rr} u_r + \Pi_{r\theta} u_\theta) \right] + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta (\Pi_{\theta r} u_r + \Pi_{\theta\theta} u_\theta) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты тензора вязких напряжений Π и вектора теплового потока \vec{q} вычисляются по формулам

$$\Pi_{rr} = 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right],$$

$$\Pi_{r\theta} = \Pi_{\theta r} = \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right],$$

$$\Pi_{\theta\theta} = 2\eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right] - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right],$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = 2\eta \left[\frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right] - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right],$$

$$q_r = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\frac{\varkappa}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности определяются с помощью выражений

$$\eta = \eta_{\infty} \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\omega}, \quad \varkappa = \frac{c_p \eta}{Pr}. \quad (6)$$

Добавим также уравнения состояния идеального политропного газа

$$p = \rho \mathfrak{R} T, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \quad (7)$$

Здесь символами η_{∞} и T_{∞} обозначены вязкость и температура газа в набегающем потоке, ω – показатель температурной зависимости, Pr – число Прандтля, \mathfrak{R} – газовая постоянная, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты Пуассона, c_p и c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно.

Система (1)–(7) замкнута относительно неизвестных функций – плотности $\rho = \rho(r, \theta, t)$, проекций вектора скорости $u_r = u_r(r, \theta, t)$, $u_{\theta} = u_{\theta}(r, \theta, t)$ и давления $p = p(r, \theta, t)$. Составляющая скорости u_{φ} положена равной нулю. Зависимостью остальных макропараметров среды от угла φ пренебрегаем. Связь декартовых координат (x_1, x_2, x_3) со сферическими (r, φ, θ) задается соотношениями $x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$, $x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$, $x_3 = r \cos \theta$.

Задача обтекания шара радиуса R с центром в начале координат, направленным вдоль оси ox_3 внешним однородным потоком вязкого сжимаемого теплопроводного газа, имеющим при $r \rightarrow +\infty$ плотность ρ_{∞} , скорость U_{∞} и давление p_{∞} , состоит в отыскании функций ρ , u_r , u_{θ} и p , удовлетворяющих в области $G = \{(r, \theta) : R < r < +\infty, 0 < \theta < \pi\}$ уравнениям (1)–(7), начальным условиям

$$\rho(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = \rho_{\infty}, \quad (8)$$

$$u_r(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = U_{\infty} \cos \theta, \quad u_{\theta}(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = -U_{\infty} \sin \theta, \quad (9)$$

$$p(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = p_{\infty}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad R < r < +\infty, \quad (10)$$

отвечающим мгновенному помещению шара в однородный поток, а также граничным условиям

$$\rho(+\infty, \theta, t) = \rho_{\infty}, \quad p(+\infty, \theta, t) = p_{\infty}, \quad (11)$$

$$u_r(R, \theta, t) = 0, \quad u_r(+\infty, \theta, t) = U_{\infty} \cos \theta; \quad (12)$$

$$u_{\theta}(R, \theta, t) = \frac{2 - \xi}{\xi} \lambda \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}(R, \theta, t), \quad u_{\theta}(+\infty, \theta, t) = -U_{\infty} \sin \theta, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R, \theta, t) = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Здесь ρ_{∞} и p_{∞} – соответственно плотность и давление в набегающем потоке. Первое из равенств (13) представляет собой условие скольжения для вектора скорости. Равенство (14) характеризует отсутствие теплового потока на поверхности шара.

2. Постановка задачи об обтекании шара для квазигидродинамических уравнений. Система квазигидродинамических уравнений была выведена

феноменологически в [24; 26]. В рассматриваемых сферических координатах без учета внешних сил она может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho u_\theta) = \\ & = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho w_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho w_\theta) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta u_r \sin \theta) - \\ & - \frac{\rho u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Pi_{\theta r}) - \\ & - \frac{\Pi_{\theta\theta} + \Pi_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho w_r u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta u_r \sin \theta) + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_r u_\theta \sin \theta) - 2 \cdot \frac{\rho u_\theta w_\theta}{r} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta^2 \sin \theta) + \\ & + \frac{\rho u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Pi_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Pi_{\theta\theta}) + \\ & + \frac{\Pi_{\theta r} - \Pi_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho w_r u_\theta) + \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta u_\theta \sin \theta) + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho w_\theta u_r) + \rho \frac{w_\theta u_r + w_r u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho u_r \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \rho u_\theta \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta q_\theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 (\Pi_{rr} u_r + \Pi_{r\theta} u_\theta) \right] + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta (\Pi_{\theta r} u_r + \Pi_{\theta\theta} u_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho w_r \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \rho w_\theta \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho u_r (w_r u_r + w_\theta u_\theta) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \rho u_r (w_r u_r + w_\theta u_\theta) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$w_r = \tau \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (19)$$

$$w_\theta = \tau \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right). \quad (20)$$

Компоненты тензора Π и вектора \vec{q} определим с помощью выражений (5). Добавим также уравнения (6)–(7). Неизвестными функциями являются плотность $\rho = \rho(r, \theta, t)$, проекции вектора скорости $u_r = u_r(r, \theta, t)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta, t)$ и давление $p = p(r, \theta, t)$. КГД-система (15)–(20) трактуется как аппроксимирующая система для уравнений Навье-Стокса. Дополнительные слагаемые, содержащие малый положительный параметр τ , интерпретируются как искусственные регуляризаторы. При построении разностных схем величина τ зависит от шагов сетки и макропараметров среды. Начальные условия запишем в виде

$$\rho(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = \rho_\infty, \quad (21)$$

$$u_r(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = U_\infty \cos \theta, \quad u_\theta(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = -U_\infty \sin \theta, \quad (22)$$

$$p(r, \theta, t) \Big|_{t=0} = p_\infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad R < r < +\infty. \quad (23)$$

Граничные условия зададим следующим образом:

$$u_r(R, \theta, t) = 0, \quad u_r(+\infty, \theta, t) = U_\infty \cos \theta; \quad (24)$$

$$u_\theta(R, \theta, t) = \frac{2-\xi}{\xi} \lambda \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(R, \theta, t), \quad u_\theta(+\infty, \theta, t) = -U_\infty \sin \theta; \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(R, \theta, t) = 0, \quad p(+\infty, \theta, t) = p_\infty, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r}(R, \theta, t) = 0, \quad \rho(+\infty, \theta, t) = \rho_\infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Здесь ξ – доля диффузно отраженных молекул, которая близка к единице. В нашем случае полагаем $\xi = 0.9$. Среднюю длину свободного пробега молекул λ будем вычислять по формуле Чепмена

$$\lambda = \nu \sqrt{\frac{\pi}{2\Re T}}.$$

Дополнительное граничное условие для давления

$$\frac{\partial p}{\partial r}(R, \theta, t) = 0 \quad (28)$$

связано с более высоким порядком квазигидродинамической системы по сравнению с соответствующей нестационарной системой Навье-Стокса. В совокупности с краевыми условиями для скорости оно обеспечивает отсутствие потока массы через границу шара. Равенство

$$\frac{\partial \rho}{\partial r}(R, \theta, t) = 0$$

получается как следствие (14), (30), если воспользоваться уравнением Менделеева-Клапейрона $p = \rho \mathcal{R}T$.

3. Вычислительный алгоритм. Приведем квазигидродинамическую систему к безразмерному виду, выбрав в качестве единиц измерения $r, t, u_r, u_\theta, p, \rho, T, w_r, w_\theta, \varepsilon, \Pi_{rr}, \Pi_{\theta r}, \Pi_{\theta\theta}, \Pi_{\varphi\varphi}, q_r, q_\theta, \lambda, \tau$ соответственно величины $R, R/U_\infty, U_\infty, U_\infty, U_\infty^2 \rho_\infty, \rho_\infty, T_\infty, U_\infty, U_\infty, U_\infty^2, \rho_\infty U_\infty^2, \rho_\infty U_\infty^2, \rho_\infty U_\infty^2, \rho_\infty U_\infty^2, \rho_\infty U_\infty^3, \rho_\infty U_\infty^3, R, R/U_\infty$. После указанной процедуры во всех выписанных выше формулах следует положить $R = 1, U_\infty = 1$. Введем в области $G_* = \{(r, \theta) : 1 < r < R_\infty, 0 < \theta < \pi\}$ равномерную сетку

$$\begin{aligned} \omega_{h_r, h_\theta} &= \{(r_i, \theta_j) : r_i = 1 + (i - 0.5)h_r, \theta_j = (j - 0.5)h_\theta, \\ h_r &= (R_\infty - 1)/N_r, h_\theta = \pi/N_\theta, i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\theta}\}. \end{aligned}$$

Здесь N_r, N_θ – заданные натуральные числа, $R_\infty \gg 1$ – фиксированное положительное число. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{h_r, h_\theta} &= \{(r_i, \theta_j) : r_i = 1 + (i - 0.5)h_r, \theta_j = (j - 0.5)h_\theta, \\ h_r &= (R_\infty - 1)/N_r, h_\theta = \pi/N_\theta, i = \overline{0, N_r + 1}, j = \overline{0, N_\theta + 1}\}. \end{aligned}$$

Узлы $\gamma_{h_r, h_\theta} = \bar{\omega}_{h_r, h_\theta} \setminus \omega_{h_r, h_\theta}$ назовем фиктивными. Аппроксимируем дифференциальные уравнения (15)–(20) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2, j}(u_r)_{i+1/2, j} - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2, j}(u_r)_{i-1/2, j}) + \\ & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i, j+1/2}(u_\theta)_{i, j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \rho_{i, j-1/2}(u_\theta)_{i, j-1/2}) = \\ & \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2, j}(w_r)_{i+1/2, j} - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2, j}(w_r)_{i-1/2, j}) + \\ & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i, j+1/2}(w_\theta)_{i, j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \rho_{i, j-1/2}(w_\theta)_{i, j-1/2}), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\widehat{\rho}_{ij}(\widehat{u}_r)_{ij} - \rho_{ij}(u_r)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j}(u_r^2)_{i+1/2,j} - \\
 & - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j}(u_r^2)_{i-1/2,j}) + \frac{1}{r_i \sin \theta \cdot h_\theta} (\rho_{i,j+1/2}(u_\theta)_{i,j+1/2}(u_r)_{i,j+1/2} \cdot \\
 & \cdot \sin \theta_{j+1/2} - \rho_{i,j-1/2}(u_\theta)_{i,j-1/2}(u_r)_{i,j-1/2} \sin \theta_{j-1/2}) - \frac{\rho_{ij}(u_\theta^2)_{ij}}{r_i} + \\
 & + \frac{1}{h_r} (p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j}) = \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (\Pi_{rr})_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (\Pi_{rr})_{i-1/2,j}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (\Pi_{\theta r})_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (\Pi_{\theta r})_{i,j-1/2}) - \\
 & - \frac{(\Pi_{\theta\theta})_{ij} + (\Pi_{\varphi\varphi})_{ij}}{r_i} + \frac{2}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j}(w_r)_{i+1/2,j}(u_r)_{i+1/2,j} - \\
 & - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j}(w_r)_{i-1/2,j}(u_r)_{i-1/2,j}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \cdot (\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2}(w_\theta)_{i,j+1/2}(u_r)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \cdot \\
 & \cdot \rho_{i,j-1/2}(w_\theta)_{i,j-1/2}(u_r)_{i,j-1/2}) + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2}(w_r)_{i,j+1/2} \cdot \\
 & \cdot (u_\theta)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \rho_{i,j-1/2}(w_r)_{i,j-1/2}(u_\theta)_{i,j-1/2}) - \frac{2 \rho_{i,j}(u_\theta)_{ij}(w_\theta)_{ij}}{r_i}, \tag{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\widehat{\rho}_{ij}(\widehat{u}_\theta)_{ij} - \rho_{ij}(u_\theta)_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j}(u_r)_{i+1/2,j}(u_\theta)_{i+1/2,j} - \\
 & - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j}(u_r)_{i-1/2,j}(u_\theta)_{i-1/2,j}) + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} ((u_\theta)_{i,j+1/2}^2 \rho_{i,j+1/2} \cdot \\
 & \cdot \sin \theta_{j+1/2} - (u_\theta)_{i,j-1/2}^2 \rho_{i,j-1/2} \sin \theta_{j-1/2}) + \frac{\rho_{ij}(u_\theta)_{ij}(u_r)_{ij}}{r_i} + \\
 & + \frac{1}{r_i h_\theta} (p_{i,j+1/2} - p_{i,j-1/2}) = \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 (\Pi_{r\theta})_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (\Pi_{r\theta})_{i-1/2,j}) + \\
 & + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} (\Pi_{\theta\theta})_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (\Pi_{\theta\theta})_{i,j-1/2}) + \\
 & + \frac{(\Pi_{\theta r})_{ij} - (\Pi_{\varphi\varphi})_{ij} \operatorname{ctg} \theta_j}{r_i} + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j}(w_r)_{i+1/2,j}(u_\theta)_{i+1/2,j} - \\
 & r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j}(w_r)_{i-1/2,j}(u_\theta)_{i-1/2,j}) + \frac{2}{r_i \sin \theta_j h_\theta} (\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2} \cdot \\
 & \cdot (w_\theta)_{i,j+1/2}(u_\theta)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} \rho_{i,j-1/2}(w_\theta)_{i,j-1/2}(u_\theta)_{i,j-1/2}) + \\
 & + \frac{1}{r_i^2 h_r} (r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j}(w_\theta)_{i+1/2,j}(u_r)_{i+1/2,j} - \\
 & - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j}(w_\theta)_{i-1/2,j}(u_r)_{i-1/2,j}) + \rho \cdot \frac{(w_\theta)_{ij}(u_r)_{ij} + (w_r)_{ij}(u_\theta)_{ij}}{r_i}. \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\widehat{\rho}_{ij} \left(\frac{(\widehat{u}_r)_{ij}^2 + (\widehat{u}_\theta)_{ij}^2}{2} + \widehat{\varepsilon}_{ij} \right) - \rho_{ij} \left(\frac{(u_r)_{ij}^2 + (u_\theta)_{ij}^2}{2} + \varepsilon_{ij} \right) \right] + \frac{1}{r_i^2 h_r} \left[r_{i+1/2}^2 \cdot \right. \\
& \cdot \rho_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j} \left(\frac{(u_r)_{i+1/2,j}^2 + (u_\theta)_{i+1/2,j}^2}{2} + \varepsilon_{i+1/2,j} + p_{i+1/2,j} / \rho_{i+1/2,j} \right) - \\
& - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j} \left(\frac{(u_r)_{i-1/2,j}^2 + (u_\theta)_{i-1/2,j}^2}{2} + \varepsilon_{i-1/2,j} + \right. \\
& \left. + p_{i-1/2,j} / \rho_{i-1/2,j} \right) \left. \right] + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \left[\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{(u_r)_{i,j+1/2}^2 + (u_\theta)_{i,j+1/2}^2}{2} + \varepsilon_{i,j+1/2} + p_{i,j+1/2} / \rho_{i,j+1/2} \right) - \sin \theta_{j-1/2} \cdot \\
& \cdot \rho_{i,j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2} \left(\frac{(u_r)_{i,j-1/2}^2 + (u_\theta)_{i,j-1/2}^2}{2} + \varepsilon_{i,j-1/2} + p_{i,j-1/2} / \rho_{i,j-1/2} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{r_i^2 h_r} \left[r_{i+1/2}^2 (q_r)_{i+1/2,j} - r_{i-1/2}^2 (q_r)_{i-1/2,j} \right] + \\
& + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \left[\sin \theta_{j+1/2} (q_\theta)_{i,j+1/2} - \sin \theta_{j-1/2} (q_\theta)_{i,j-1/2} \right] = \\
& = \frac{1}{r_i^2 h_r} \left[r_{i+1/2}^2 \left((\Pi_{rr})_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j} + (\Pi_{r\theta})_{i+1/2,j} (u_\theta)_{i+1/2,j} \right) - \right. \\
& - r_{i-1/2}^2 \left((\Pi_{rr})_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j} + (\Pi_{r\theta})_{i-1/2,j} (u_\theta)_{i-1/2,j} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{r_i \sin \theta h_\theta} \left[\sin \theta_{j+1/2} \left((\Pi_{r\theta})_{i,j+1/2} (u_r)_{i,j+1/2} + (\Pi_{\theta\theta})_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} \right) - \right. \\
& - \sin \theta_{j-1/2} \left((\Pi_{r\theta})_{i,j-1/2} (u_r)_{i,j-1/2} + (\Pi_{\theta\theta})_{i,j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2} \right) \left. \right] \\
& + \frac{1}{r_i^2 h_r} \left[r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j} (w_r)_{i+1/2,j} \left(\frac{(u_r)_{i+1/2,j}^2 + (u_\theta)_{i+1/2,j}^2}{2} + \varepsilon_{i+1/2,j} + \right. \right. \\
& \left. \left. + p_{i+1/2,j} / \rho_{i+1/2,j} \right) - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j} (w_r)_{i-1/2,j} \left(\frac{(u_r)_{i-1/2,j}^2 + (u_\theta)_{i-1/2,j}^2}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon_{i-1/2,j} + p_{i-1/2,j} / \rho_{i-1/2,j} \right) \right] + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \left[\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2} (w_\theta)_{i,j+1/2} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{(u_r)_{i,j+1/2}^2 + (u_\theta)_{i,j+1/2}^2}{2} + \varepsilon_{i,j+1/2} + p_{i,j+1/2} / \rho_{i,j+1/2} \right) - \sin \theta_{j-1/2} \cdot \\
& \cdot \rho_{i,j-1/2} (w_\theta)_{i,j-1/2} \left(\frac{(u_r)_{i,j-1/2}^2 + (u_\theta)_{i,j-1/2}^2}{2} + \varepsilon_{i,j-1/2} + p_{i,j-1/2} / \rho_{i,j-1/2} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{r_i^2 h_r} \left[r_{i+1/2}^2 \rho_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j} \left((w_r)_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j} + (w_\theta)_{i+1/2,j} \cdot \right. \right. \\
& \cdot (u_\theta)_{i+1/2,j} \left. \right) - r_{i-1/2}^2 \rho_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j} \left((w_r)_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j} + \right. \\
& \left. + (w_\theta)_{i-1/2,j} (u_\theta)_{i-1/2,j} \right) \left. \right] + \frac{1}{r_i \sin \theta_j h_\theta} \left[\sin \theta_{j+1/2} \rho_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} \cdot \right. \\
& \cdot \left((w_r)_{i,j+1/2} (u_r)_{i,j+1/2} + (w_\theta)_{i,j+1/2} (u_\theta)_{i,j+1/2} \right) - \sin \theta_{j-1/2} \rho_{i,j-1/2} \cdot \\
& \cdot (u_\theta)_{i,j-1/2} \left((w_r)_{i,j-1/2} (u_r)_{i,j-1/2} + (w_\theta)_{i,j-1/2} (u_\theta)_{i,j-1/2} \right) \left. \right]. \tag{32}
\end{aligned}$$

Здесь

$$(w_r)_{ij} = \tau_{ij} \left[(u_r)_{ij} \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{ij}}{r_i} \cdot \frac{(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{i,j-1}}{2h_\theta} - \frac{(u_\theta)_{ij}^2}{r_i} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h_r \rho_{ij}} \right],$$

$$(w_r)_{i+1/2,j} = \tau_{i+1/2,j} \left[(u_r)_{i+1/2,j} \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i,j}}{h_r} + \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} \cdot \frac{(u_r)_{i+1/2,j+1} - (u_r)_{i+1/2,j-1}}{2h_\theta} - \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}^2}{r_{i+1/2}} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_r \rho_{i+1/2,j}} \right],$$

$$(w_r)_{i-1/2,j} = \tau_{i-1/2,j} \left[(u_r)_{i-1/2,j} \frac{(u_r)_{i,j} - (u_r)_{i-1,j}}{h_r} + \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} \cdot \frac{(u_r)_{i-1/2,j+1} - (u_r)_{i-1/2,j-1}}{2h_\theta} - \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}^2}{r_{i-1/2}} + \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_r \rho_{i-1/2,j}} \right],$$

$$(w_r)_{i,j+1/2} = \tau_{i,j+1/2} \left[(u_r)_{i,j+1/2} \frac{(u_r)_{i+1,j+1/2} - (u_r)_{i-1,j+1/2}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} \cdot \frac{(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{i,j}}{h_\theta} - \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}^2}{r_i} + \frac{p_{i+1,j+1/2} - p_{i-1,j+1/2}}{2h_r \rho_{i,j+1/2}} \right],$$

$$(w_r)_{i,j-1/2} = \tau_{i,j-1/2} \left[(u_r)_{i,j-1/2} \frac{(u_r)_{i+1,j-1/2} - (u_r)_{i-1,j-1/2}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} \cdot \frac{(u_r)_{i,j} - (u_r)_{i,j-1}}{h_\theta} - \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}^2}{r_i} + \frac{p_{i+1,j-1/2} - p_{i-1,j-1/2}}{2h_r \rho_{i,j-1/2}} \right],$$

$$(w_\theta)_{ij} = \tau_{ij} \left[(u_r)_{ij} \frac{(u_\theta)_{i+1,j} - (u_\theta)_{i-1,j}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{ij}}{r_i} \frac{(u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j-1}}{2h_\theta} + \frac{(u_\theta)_{ij} (u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h_\theta r_i \rho_{ij}} \right],$$

$$(w_\theta)_{i+1/2,j} = \tau_{i+1/2,j} \left[(u_r)_{i+1/2,j} \frac{(u_\theta)_{i+1,j} - (u_\theta)_{i,j}}{h_r} + \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} \cdot \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j+1} - (u_\theta)_{i+1/2,j-1}}{2h_\theta} + \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j} (u_r)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} + \frac{p_{i+1/2,j+1} - p_{i+1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i+1/2} \rho_{i+1/2,j}} \right],$$

$$\begin{aligned}
(w_\theta)_{i-1/2,j} &= \tau_{i-1/2,j} \left[(u_r)_{i-1/2,j} \frac{(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i-1,j}}{h_r} + \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} \cdot \right. \\
&\cdot \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j+1} - (u_\theta)_{i-1/2,j-1}}{2h_\theta} + \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j} (u_r)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} + \\
&\left. + \frac{p_{i-1/2,j+1} - p_{i-1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i-1/2} \rho_{i-1/2,j}} \right], \\
(w_\theta)_{i,j+1/2} &= \tau_{i,j+1/2} \left[(u_r)_{i,j+1/2} \frac{(u_\theta)_{i+1,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1,j+1/2}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} \cdot \right. \\
&\cdot \frac{(u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j}}{h_\theta} + \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2} (u_r)_{i,j+1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_\theta r_i \rho_{i,j+1/2}} \left. \right], \\
(w_\theta)_{i,j-1/2} &= \tau_{i,j-1/2} \left[(u_r)_{i,j-1/2} \frac{(u_\theta)_{i+1,j-1/2} - (u_\theta)_{i-1,j-1/2}}{2h_r} + \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} \cdot \right. \\
&\cdot \frac{(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i,j-1}}{h_\theta} + \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2} (u_r)_{i,j-1/2}}{r_i} + \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{h_\theta r_i \rho_{i,j-1/2}} \left. \right]. \tag{33}
\end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений определим по формулам

$$\begin{aligned}
(\Pi_{rr})_{i+1/2,j} &= 2\eta_{i+1/2,j} \frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i,j}}{h_r} - \frac{2}{3} \eta_{i+1/2,j} \left[\frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i,j}}{h_r} + \right. \\
&\left. + \frac{2(u_r)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} + \frac{\sin \theta_{j+1} (u_\theta)_{i+1/2,j+1} - \sin \theta_{j-1} (u_\theta)_{i+1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i+1/2} \sin \theta_j} \right], \\
(\Pi_{rr})_{i-1/2,j} &= 2\eta_{i-1/2,j} \frac{(u_r)_{i,j} - (u_r)_{i-1,j}}{h_r} - \frac{2}{3} \eta_{i-1/2,j} \left[\frac{(u_r)_{i,j} - (u_r)_{i-1,j}}{h_r} + \right. \\
&\left. + \frac{2(u_r)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} + \frac{\sin \theta_{j+1} (u_\theta)_{i-1/2,j+1} - \sin \theta_{j-1} (u_\theta)_{i-1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i-1/2} \sin \theta_j} \right], \\
(\Pi_{\theta\theta})_{ij} &= 2\eta_{ij} \left[\frac{1}{r_i} \frac{(u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j-1}}{2h_\theta} + \frac{(u_r)_{ij}}{r_i} \right] - \frac{2}{3} \eta_{ij} \cdot \tag{34} \\
&\cdot \left[\frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2h_r} + \frac{2(u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{\sin \theta_{j+1} (u_\theta)_{i,j+1} - \sin \theta_{j-1} (u_\theta)_{i,j-1}}{2h_\theta r_i \sin \theta_j} \right], \\
(\Pi_{\theta\theta})_{i,j+1/2} &= 2\eta_{i,j+1/2} \left[\frac{1}{r_i} \frac{(u_\theta)_{i,j+1} - (u_\theta)_{i,j}}{h_\theta} + \frac{(u_r)_{i,j+1/2}}{r_i} \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3}\eta_{i,j+1/2} \left[\frac{(u_r)_{i+1,j+1/2} - (u_r)_{i-1,j+1/2}}{2h_r} + \frac{2(u_r)_{i,j+1/2}}{r_i} \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \theta_{j+1} (u_\theta)_{i,j+1} - \sin \theta_j (u_\theta)_{i,j}}{h_\theta r_i \sin \theta_{j+1/2}} \right], \\
 (\Pi_{\theta\theta})_{i,j-1/2} &= 2\eta_{i,j-1/2} \left[\frac{1}{r_i} \frac{(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i,j-1}}{h_\theta} + \frac{(u_r)_{i,j-1/2}}{r_i} \right] - \\
 & -\frac{2}{3}\eta_{i,j-1/2} \left[\frac{(u_r)_{i+1,j-1/2} - (u_r)_{i-1,j-1/2}}{2h_r} + \frac{2(u_r)_{i,j-1/2}}{r_i} \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \theta_j (u_\theta)_{i,j} - \sin \theta_{j-1} (u_\theta)_{i,j-1}}{h_\theta r_i \sin \theta_{j-1/2}} \right], \\
 (\Pi_{\varphi\varphi})_{ij} &= 2\eta_{ij} \left[\frac{(u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{(u_\theta)_{ij} \operatorname{ctg} \theta_j}{r_i} \right] - \frac{2}{3}\eta_{ij} \left[\frac{(u_r)_{i+1,j} - (u_r)_{i-1,j}}{2h_r} + \right. \\
 & \left. + \frac{2(u_r)_{ij}}{r_i} + \frac{\sin \theta_j (u_\theta)_{i,j+1} - \sin \theta_j (u_\theta)_{i,j-1}}{2h_\theta r_i \sin \theta_j} \right], \\
 (\Pi_{\theta r})_{ij} &= \eta_{ij} \left[\frac{(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{i,j-1}}{2h_\theta r_i} + \frac{(u_\theta)_{i+1,j} - (u_\theta)_{i-1,j}}{2h_r} - \right. \\
 & \left. - \frac{(u_\theta)_{ij}}{r_i} \right], \\
 (\Pi_{\theta r})_{i+1/2,j} &= \eta_{i+1/2,j} \left[\frac{(u_r)_{i+1/2,j+1} - (u_r)_{i+1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i+1/2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{(u_\theta)_{i+1,j} - (u_\theta)_{i,j}}{h_r} - \frac{(u_\theta)_{i+1/2,j}}{r_{i+1/2}} \right], \\
 (\Pi_{\theta r})_{i-1/2,j} &= \eta_{i-1/2,j} \left[\frac{(u_r)_{i-1/2,j+1} - (u_r)_{i-1/2,j-1}}{2h_\theta r_{i-1/2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{(u_\theta)_{i,j} - (u_\theta)_{i-1,j}}{h_r} - \frac{(u_\theta)_{i-1/2,j}}{r_{i-1/2}} \right], \\
 (\Pi_{\theta r})_{i,j+1/2} &= \eta_{i,j+1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j+1} - (u_r)_{i,j}}{h_\theta r_i} + \right. \\
 & \left. + \frac{(u_\theta)_{i+1,j+1/2} - (u_\theta)_{i-1,j+1/2}}{2h_r} - \frac{(u_\theta)_{i,j+1/2}}{r_i} \right], \\
 (\Pi_{\theta r})_{i,j-1/2} &= \eta_{i,j-1/2} \left[\frac{(u_r)_{i,j} - (u_r)_{i,j-1}}{h_\theta r_i} + \right. \\
 & \left. + \frac{(u_\theta)_{i+1,j-1/2} - (u_\theta)_{i-1,j-1/2}}{2h_r} - \frac{(u_\theta)_{i,j-1/2}}{r_i} \right], \tag{35}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\eta_{ij} &= \frac{(p_{ij} \gamma M^2 / \rho_{ij})^\omega}{Re}, \\ \eta_{i\pm 1/2,j} &= \frac{(p_{i\pm 1/2,j} \gamma M^2 / \rho_{i\pm 1/2,j})^\omega}{Re}, \\ \eta_{i,j\pm 1/2} &= \frac{(p_{i,j\pm 1/2} \gamma M^2 / \rho_{i,j\pm 1/2})^\omega}{Re},\end{aligned}\quad (36)$$

$Re = (\rho_\infty U_\infty R) / \eta_\infty$ – число Рейнольдса, $M = U_\infty / (c_s)_\infty$ – число Маха, $(c_s)_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ – скорость звука на бесконечном удалении от тела. Значения проекций вектора теплового потока имеют вид

$$\begin{aligned}(q_r)_{i+1/2,j} &= -\eta_{i+1/2,j} \frac{\gamma(p_{i+1,j} / \rho_{i+1,j} - p_{i,j} / \rho_{i,j})}{(\gamma - 1) Pr h_r}, \\ (q_r)_{i-1/2,j} &= -\eta_{i-1/2,j} \frac{\gamma(p_{i,j} / \rho_{i,j} - p_{i-1,j} / \rho_{i-1,j})}{(\gamma - 1) Pr h_r}, \\ (q_\theta)_{i,j+1/2} &= -\eta_{i,j+1/2} \frac{\gamma(p_{i,j+1} / \rho_{i,j+1} - p_{i,j} / \rho_{i,j})}{(\gamma - 1) Pr h_\theta r_i}, \\ (q_\theta)_{i,j-1/2} &= -\eta_{i,j-1/2} \frac{\gamma(p_{i,j} / \rho_{i,j} - p_{i,j-1} / \rho_{i,j-1})}{(\gamma - 1) Pr h_\theta r_i}.\end{aligned}\quad (37)$$

Удельную внутреннюю энергию в узлах сетки вычислим с помощью выражений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{p_{ij}}{\rho_{ij}(\gamma - 1)}, \quad \varepsilon_{i\pm 1/2,j} = \frac{p_{i\pm 1/2,j}}{\rho_{i\pm 1/2,j}(\gamma - 1)}, \quad \varepsilon_{i,j\pm 1/2} = \frac{p_{i,j\pm 1/2}}{\rho_{i,j\pm 1/2}(\gamma - 1)}.\quad (38)$$

Положим

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \alpha \sqrt{\frac{\rho_{ij}(h_r^2 + h_\theta^2)}{\gamma p_{ij}}}, \\ \tau_{i\pm 1/2,j} &= \alpha \sqrt{\frac{\rho_{i\pm 1/2,j}(h_r^2 + h_\theta^2)}{\gamma p_{i\pm 1/2,j}}}, \\ \tau_{i,j\pm 1/2} &= \alpha \sqrt{\frac{\rho_{i,j\pm 1/2}(h_r^2 + h_\theta^2)}{\gamma p_{i,j\pm 1/2}}},\end{aligned}\quad (39)$$

где α – числовой коэффициент, подбираемый в процессе вычислений для обеспечения устойчивости схемы. Заметим, что значение τ_{ij} по порядку величины равно характерному времени прохождения звуком разностной ячейки.

Значения произвольной функции ψ из множества $\{u_r, u_\theta, p, \rho\}$ в точках $(r_{i\pm 1/2}, \theta_j)$, $(r_i, \theta_{j\pm 1/2})$, $(r_{i+1/2}, \theta_{j\pm 1/2})$, $(r_{i-1/2}, \theta_{j\pm 1/2})$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_{i\pm 1/2, j} &= 0.5(\psi_{i\pm 1, j} + \psi_{ij}), & \psi_{i, j\pm 1/2} &= 0.5(\psi_{i, j\pm 1} + \psi_{ij}), \\ \psi_{i+1/2, j\pm 1/2} &= 0.25(\psi_{i+1, j\pm 1} + \psi_{i, j\pm 1} + \psi_{i+1, j} + \psi_{ij}), \\ \psi_{i-1/2, j\pm 1/2} &= 0.25(\psi_{i-1, j\pm 1} + \psi_{i, j\pm 1} + \psi_{i-1, j} + \psi_{ij}).\end{aligned}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положим

$$\rho_{ij} = 1, \quad (u_r)_{ij} = \cos \theta_j, \quad (u_\theta)_{ij} = \sin \theta_j, \quad p_{ij} = 1/(\gamma M^2), \quad (r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}. \quad (40)$$

Аппроксимация граничных условий (24)–(27) обеспечивается автоматически, если определить сеточные функции ρ_{ij} , $(u_r)_{ij}$, $(u_\theta)_{ij}$ и p_{ij} в фиктивных узлах с помощью выражений

$$\begin{aligned}\rho_{0, j} &= \rho_{1, j}, & \rho_{N_r+1, j} &= 2 - \rho_{N_r, j}, \\ \rho_{i, 0} &= \rho_{i, 1}, & \rho_{i, N_\theta+1} &= \rho_{i, N_\theta}, \\ \rho_{0, 0} &= \rho_{1, 1}, & \rho_{0, N_\theta+1} &= \rho_{1, N_\theta}, \\ \rho_{N_r+1, 0} &= 2 - \rho_{N_r, 1}, \\ \rho_{N_r+1, N_\theta+1} &= 2 - \rho_{N_r, N_\theta}, & i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\theta},\end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}p_{0, j} &= p_{1, j}, & p_{N_r+1, j} &= 2/(\gamma M^2) - p_{N_r, j}, \\ p_{i, 0} &= p_{i, 1}, & p_{i, N_\theta+1} &= p_{i, N_\theta}, \\ p_{0, 0} &= p_{1, 1}, & p_{0, N_\theta+1} &= p_{1, N_\theta}, \\ p_{N_r+1, 0} &= 2/(\gamma M^2) - p_{N_r, 1}, \\ p_{N_r+1, N_\theta+1} &= 2/(\gamma M^2) - p_{N_r, N_\theta}, & i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\theta},\end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}(u_r)_{0, j} &= -(u_r)_{1, j}, & (u_r)_{N_r+1, j} &= 2 \cos \theta_j - (u_r)_{N_r, j}, \\ (u_r)_{i, 0} &= -(u_r)_{i, 1}, & (u_r)_{i, N_\theta+1} &= (u_r)_{i, N_\theta}, \\ (u_r)_{0, 0} &= -(u_r)_{0, 1}, & (u_r)_{0, N_\theta+1} &= (u_r)_{0, N_\theta}, \\ (u_r)_{N_r+1, 0} &= 4 - 2 \cos \theta_1 - (u_r)_{N_r, 1}, \\ (u_r)_{N_r+1, N_\theta+1} &= -4 - 2 \cos \theta_{N_\theta} - (u_r)_{N_r, N_\theta}, & i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\theta},\end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}(u_\theta)_{0, j} &= (u_\theta)_{1, j} \frac{2(2 - \xi) M \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}} - 1}{\xi \rho_{1/2, j} h_r Re \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}} + 1}, \\ (u_\theta)_{N_r+1, j} &= -2 \sin \theta_j - (u_\theta)_{N_r, j}, \\ (u_\theta)_{i, 0} &= -(u_\theta)_{i, 1}, & (u_\theta)_{i, N_\theta+1} &= -(u_\theta)_{i, N_\theta}, \\ i &= \overline{0, N_r + 1}, j = \overline{1, N_\theta}.\end{aligned} \quad (44)$$

Соотношения (41)–(44) должны выполняться и на следующем временном слое.

Явная условно–устойчивая разностная схема (31)–(44) аппроксимирует начально–краевую задачу (1)–(14) с первым порядком по времени и по пространству. Течение считается установившимся, если

$$\sum_{(r_i, \theta_j) \in \omega_{h_r, h_\theta}} \left[\left(\frac{(\hat{u}_r)_{ij} - (u_r)_{ij}}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{(\hat{u}_\theta)_{ij} - (u_\theta)_{ij}}{\Delta t} \right)^2 \right] < \varepsilon_u, \quad (45)$$

где ε_u – заданная точность.

4. Результаты расчетов. Алгоритм (31)–(45) был реализован на сетках размеров $N_r \times N_\theta = 100 \times 30, 100 \times 50, 200 \times 20, 300 \times 30, 400 \times 40$. Величина R_∞ полагалась равной 25, 30, 50, 100. Числа Рейнольдса и Маха принимали значения 1, 10, 15, 25, 56.5, 50, 75, 100 и 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 соответственно. Газ считался одноатомным ($\gamma = 5/3, Pr = 2/3$). Показатель температурной зависимости $\omega = 0.5, \varepsilon_u = 0.0001$. Регуляризирующий параметр $\alpha = 0.5$ обеспечивал устойчивость вычислений с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

На рис. 1 символами C1 и C2 помечены кривые, соответствующие результатам расчета течений на основе КГД–системы для несжимаемой жидкости [35] при $Re = 1$ и полной КГД–системы при $Re = 1, M = 0.01$ соответственно. Как видно из графиков, совпадение практически полное, что и должно быть при малых числах Маха. На рис. 2 представлены поле скорости, а также линии уровня давления, плотности и температуры при $Re = 0.01, M = 0.01$, отвечающие простому протеканию. Рис. 3 и рис. 4 отвечают отрывным течениям при $Re = 30, M = 0.5$ и $Re = 75, M = 0.5$ соответственно.

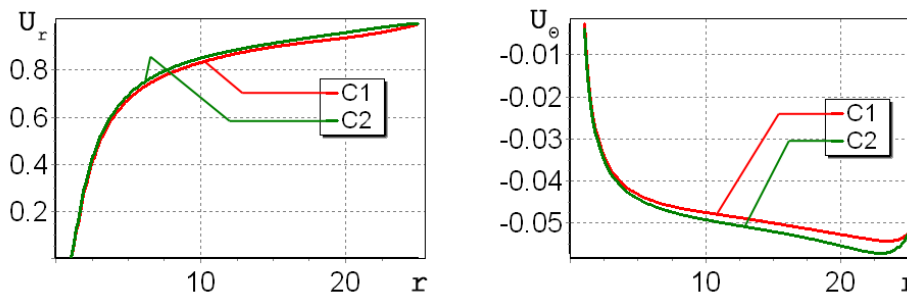


Рис. 1. Распределения составляющих скорости u_r и u_θ вдоль луча $r \geq 1, \theta = 0.052$ при $Re = 1, M = 0.01, R_\infty = 25$ на сетке 300×30 : а) составляющая u_r , б) составляющая u_θ

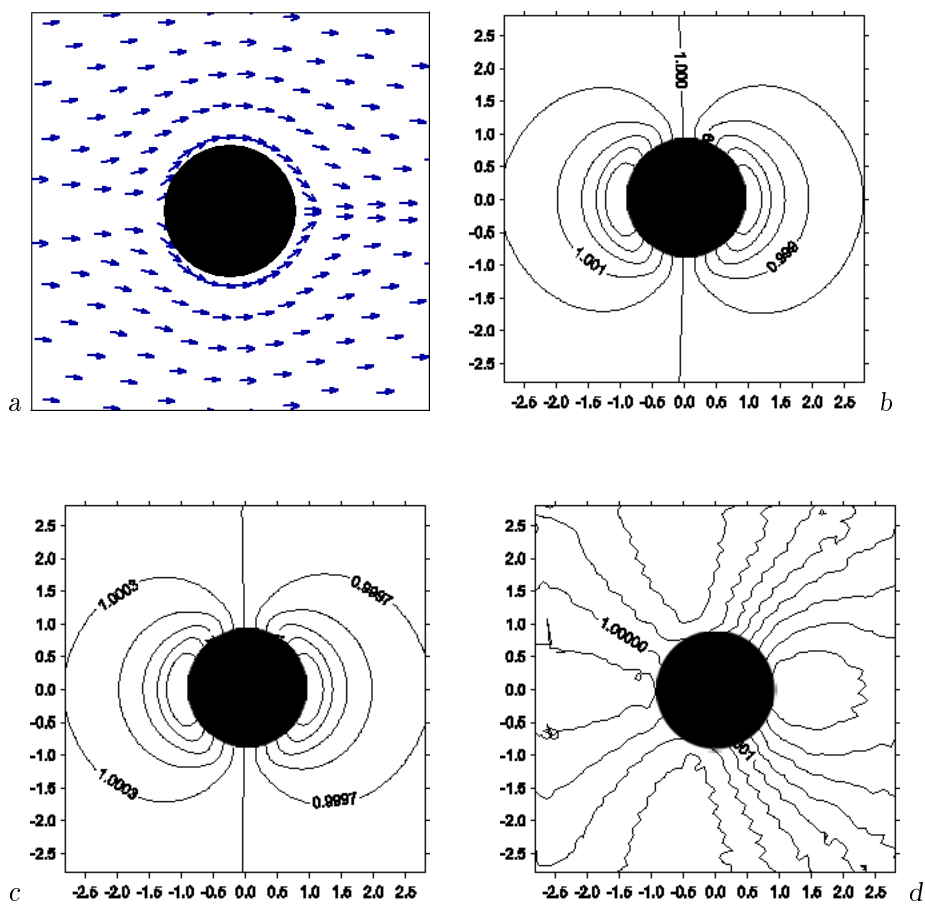
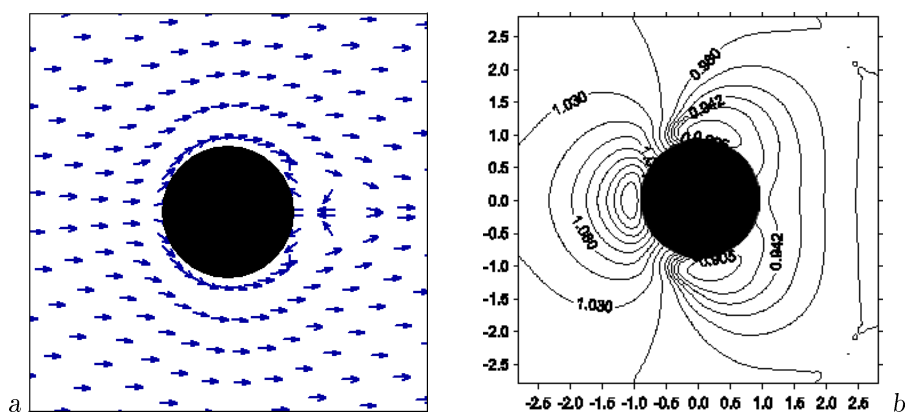


Рис. 2. Расчет при $Re = 0.1$, $M = 0.01$, $R_\infty = 25$ на сетке 100×30 : а) картина течения, б) линии уровня давления, с) линии уровня плотности, д) линии уровня температуры



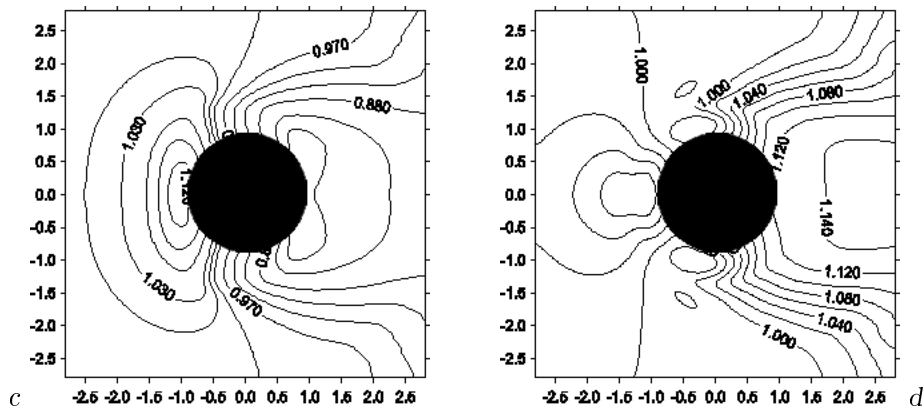


Рис. 3. Расчет при $Re = 30$, $M = 0.5$, $R_\infty = 25$ на сетке 100×50 : а) картина течения, б) линии уровня давления, с) линии уровня плотности, д) линии уровня температуры

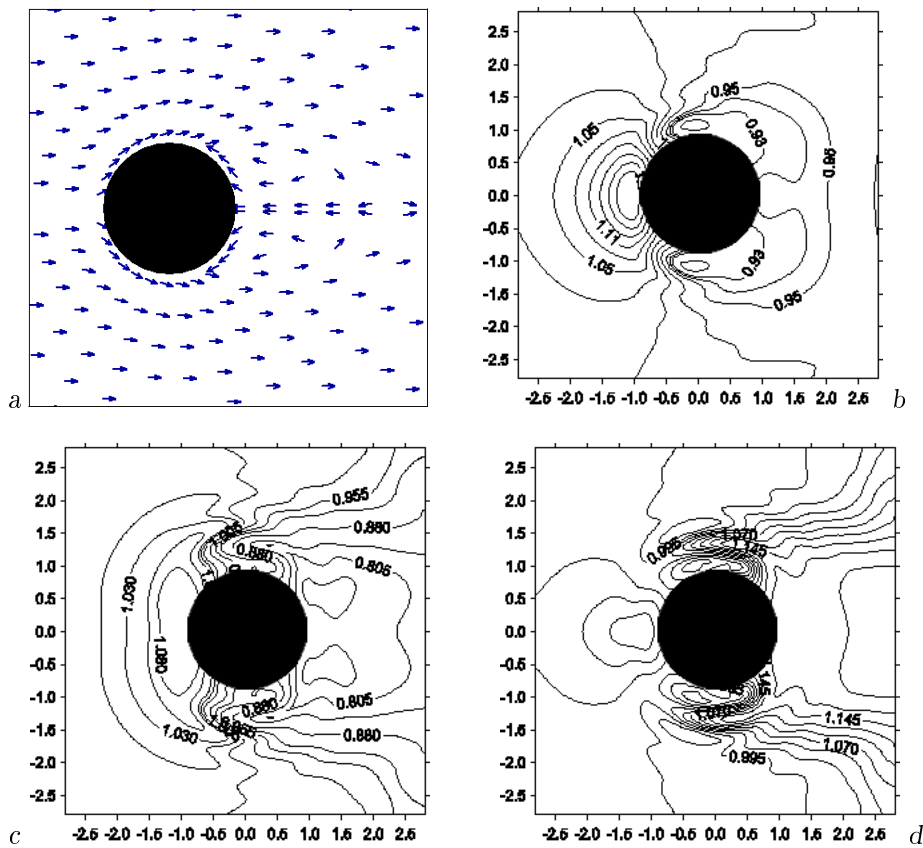


Рис. 4. Расчет при $Re = 75$, $M = 0.5$, $R_\infty = 25$ на сетке 100×60 : а) картина течения, б) линии уровня давления, с) линии уровня плотности, д) линии уровня температуры

Заклучение. Таким образом, предложенный алгоритм хорошо описывает осесимметричные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа около шара. Он

является явным и однородным, сравнительно простым в реализации, может использоваться для решения ряда практических задач, связанных с движением тел сферической формы в атмосфере.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды. М., 1976.
- [3] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., 1991.
- [4] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М., 1967.
- [5] Emerson D.R., Barber R.W. Analytical Solution of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Sphere: Technical Report DL-TR-00-001. Daresbury Laboratory, 2000.
- [6] Taneda S. Experimental Investigation of the Wake Behind a Sphere at a Low Reynolds Numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1956. V. 11, № 10. P. 1104–1108.
- [7] Magarvey R.H., Bishop R.L. Transitional Ranges for Three-Dimensional Wakes // Can. J. Phys. 1961. V. 39. P. 1418–1422.
- [8] Nakamura I. Steady Wake Behind a Sphere // Phys. of Fluids. 1976. V. 19. P. 5–8.
- [9] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М., 1986.
- [10] Sakamoto H., Haniu H. Study a Vortex Shedding from Spheres in a Uniform Flow // J. Fluids Eng. 1990. V. 112. P. 386–392.
- [11] Jenson V.G. Viscous Flow Rounds a Sphere at Low Reynolds Numbers (<40) // Proc. Roy. Soc. 1959. V. 245, Ser. A. P. 346–366.
- [12] Shirayama S., Kuwahara K. Flow Past a Sphere: Topological Transitions of the Vorticity Field // AIAA-90-3105, 1990.
- [13] Гущин В.А., Матюшин П.В. Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 9. С. 1122–1137.
- [14] Kalro V., Tezduyar T. 3D Computation of Unsteady Flow Past a Sphere with a Parallel Finite Element Method // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1998. V. 151. P. 267–276.
- [15] Johnson T.A., Patel V.C. Flow Past a Sphere up to a Reynolds Number of 300 // J. Fluid Mech. 1999. V. 378, № 1. P. 19–70.
- [16] Lee S. A Numerical Study of Unsteady Wake Behind a Sphere in a Uniform Flow at Moderate Reynolds Numbers // Computers and Fluids. 2000. V. 29. P. 636–667.

- [17] Tomboulides A.G., Orszag S.A. Numerical Investigations of Transitional Weak Turbulent Flow Past a Sphere // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 416. P. 47–73.]
- [18] Emerson D.R., Barber R.W. Numerical Simulation of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Confined Microsphere: Technical Report DL-TR-01-001. Daresbury Laboratory, 2001.
- [19] Гуцин В.А., Матюшин П.В. Классификация режимов отрывных течений жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса. Математическое моделирование. Проблемы и результаты. М., 2003. С. 199–235.
- [20] Constantinescu G., Chapelet M., Squires K. Turbulence Modelling Applied to Flow Over a Sphere // *AIAA J.* 2003. V. 41, № 9. P. 1733–1742.
- [21] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // *Мат. моделирование.* 1994. Т. 6, № 10. P. 35–45.
- [22] Шеретов Ю.В. Об одной новой математической модели в гидродинамике // *Применение функционального анализа в теории приближений.* Тверь, 1996. С. 124–134.
- [23] Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // *Мат. моделирование.* 1996. Т. 8, № 7. С. 33–44.
- [24] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // *Применение функционального анализа в теории приближений.* Тверь, 1997. С. 127–155.
- [25] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1998. Т. 38, № 10. С. 1732–1742.
- [26] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
- [27] Fedoseyev A.I. A Regularization Approach to Solving the Navier–Stokes Equations for Problems with Boundary Layer // *Comput. Fluid Dynamics J.* 2001. Special Number. P. 317–324.
- [28] Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. Численное моделирование отрывных течений за обратным уступом // *Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова.* М., 2003. № 14. С. 85–118.
- [29] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в каверне // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2003. Т. 43, № 3, С. 453–466.

- [30] Елизарова Т.Г. Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. М., 2005. Ч. 1, 2.
- [31] Шеретов Ю.В. Анализ задачи об обтекании шара для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2003. С. 177–186.
- [32] Шеретов Ю.В. О существовании и единственности обобщенного решения стационарной краевой задачи для квазигидродинамических уравнений в приближении Стокса. Материалы юбилейной научн. конф. 'Российской математике – триста лет'. Тверь, 2003. С. 86–94.
- [33] Шеретов Ю.В. Эллиптичность по Петровскому и по Дуглису–Ниренбергу стационарной квазигидродинамической системы в приближении Стокса // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2005. С. 124–131.
- [34] Семенов М.В., Шеретов Ю.В. Численное моделирование медленных течений вязкого газа в окрестности шара // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2004. С. 25–45.
- [35] Семенов М.В., Шеретов Ю.В. Новый численный алгоритм расчета осесимметричных течений жидкости в окрестности шара при умеренных числах Рейнольдса // Вестник ТвГУ. 2005, № 2. С. 51–60.