УДК 519.2

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММАРНЫХ ВЫПЛАТ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РИСКОВ

Бацын М.В., Калягин В.А.
Высшая школа экономики, Нижний Новгород

Поступила в редакцию 20.05.2009, после переработки 10.06.2009.

В работе рассматривается задача определения распределения суммарных страховых выплат при перестраховании индивидуальных рисков в случае равномерного распределения ущерба по каждому страховому случаю. Основным результатом работы является аналитическое выражение функции распределения суммарных выплат. Полученный результат может быть использован для оценки точности определения оптимального уровня собственного удержания на основе нормальной аппроксимации.

We consider a problem of finding of probability distribution for total insurance payments when excess-of-loss reinsurance is used. The problem is considered in the case when losses in each insured accident have uniform distribution. The main result is analytical expression of probability distribution function for total payments. This result can be used to estimate a precision of optimal retention limit calculation based on normal approximation.

Ключевые слова: перестрахование индивидуальных рисков, оптимальный уровень собственного удержания, равномерное распределение ущерба, распределение суммарных страховых выплат.
Keywords: excess-of-loss reinsurance, optimal retention limit, uniform loss distribution, probabiltity distribution for total insurance payments.

1. Введение

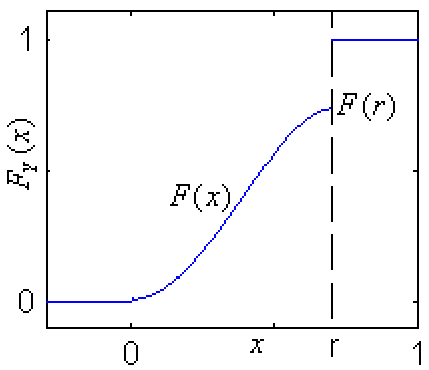
Перестрахование – это специальный механизм перераспределения рисков между страховщиком и перестраховочной компанией, используемый для повышения надежности страховщика [1], [3]. Для распределения рисков устанавливается так называемый уровень собственного удержания r: ущерб, не превышающий этот уровень, берет на себя сам страховщик, а все остальное оплачивает перестраховочная компания. Перестрахование индивидуальных рисков (excess-of-loss reinsurance) –

это особый тип перестрахования, при котором ущерб по каждому страховому случаю делится между страховщиком и перестраховочной компанией согласно установленного уровня собственного удержания r. В другом варианте перестрахования (stop-loss reinsurance) уровень собственного удержания устанавливается для суммарного ущерба по всем страховым контрактам. Представляет интерес задача определения оптимального уровня собственного удержания [2], т.е. такого уровня, при котором надежность компании страховщика максимальна. Решение этой задачи зависит от распределения суммарных выплат страховщика по контрактам перестрахования. В [4] рассмотрен метод определения оптимального уровня собственного удержания на основе нормальной аппроксимации распределения суммарных выплат. С другой стороны интересны случаи, в которых возможно точное определение оптимального уровня собственного удержания. Это соответствует ситуации, в которой удается найти точное распределение суммарных выплат страховщика по контрактам перестрахования. В настоящей работе рассматривается задача определения распределения суммарных выплат при перестраховании индивидуальных рисков в случае равномерного распределения ущерба по каждому страховому случаю. Основным результатом работы является аналитическое выражение функции распределения суммарных выплат. Полученный результат может быть использован для оценки точности определения оптимального уровня собственного удержания на основе нормальной аппроксимации.

Пусть ущерб в i-м страховом случае описывается случайной величиной X_i с функцией распределения $F(x)$, тогда при выбранном уровне собственного удержания r случайная величина выплат страховщика Y_i имеет следующее выражение:

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & X_i \le r \\ r, & X_i > r \end{cases}$$

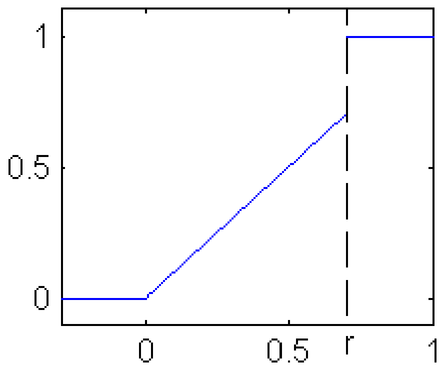
Распределение Y_i является смешанным распределением, у которого функция распределения имеет разрыв в точке r:



Наличие разрыва значительно усложняет вычисление распределения суммы независимых случайных величин Y_i. Стандартные вычислительные алгоритмы типа преобразования Фурье имеют значительную погрешность, связанную с появлением дельта-функций. В актуарной литературе известен один способ вычисления функции распределения суммы страховых выплат при наличии перестрахования.

Это рекуррентная формула Пейнджера [6]. Формула Пейджера имеет существенное ограничение – распределение ущерба должно быть дискретным. В нашем случае мы рассматриваем непрерывное распределение.

2. Равномерное распределение с разрывом



Рассмотрим распределение, аналогичное равномерному на отрезке [0, 1], но имеющее разрыв в некоторой точке r:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le r \\ 1, & x > r \end{cases}$$

Обозначим функцию распределения суммы из n таких случайных величин за $F_n(x)$:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$X_i \sim F(x)$$

$$S_n \sim F_n(x)$$

Будем искать общую формулу для $F_n(x)$.

Отметим, что для случая $r = 1$, формула известна [9]:

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_n^i (x-i)^n, \quad x \in [k-1, \ k] \ , \quad k = 1, 2, ..., n$$

2.1 Рекуррентная формула

Вероятность какого-либо события E будем обозначать как $\mathrm{P}(E)$. Тогда по определению функции распределения: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$. Сумма $n+1$ и nслагаемых X_i и их функции распределения связаны следующим образом:

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

$$F_{n+1}(x) = \mathrm{P}(S_{n+1} < x) = \mathrm{P}(S_n + X_{n+1} < x) = \mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1})$$

$$S_n \sim F_n(s) = \mathrm{P}(S_n < s)$$

$$X_{n+1} \sim F(t) = \mathrm{P}(X_{n+1} < t)$$

Из этих соотношений можно получить рекуррентную формулу $F_{n+1}(x)$ через $F_n(x)$. Функция распределения $F(x)$ имеет разрыв в точке r, поэтому сначала определимся, как это отражается на поведении $F_n(x)$.

2.1.1 Точка разрыва

Так как плотность распределения – это производная от функции распределения, то:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0,\, t > r \\ 1, & 0 < t < r \end{cases},$$

и $f(t)$ не определена при $t = r$, так как в этой точке функция распределения имеет разрыв. Таким образом, X_i могут принимать значения только из отрезка $[0, r]$, так как $\mathrm{P}(X_i < 0) = \mathrm{P}(X_i > r) = 0$. Поэтому $S_n = X_1 + ... + X_n \in [0, n \cdot r]$ и $\mathrm{P}(S_n < 0) = \mathrm{P}(S_n > n \cdot r) = 0$. А значит, плотность распределения суммы $f_n(s) = 0$ при $s < 0$, $s > n \cdot r$.

Вероятность того, что X_i равно r будет равна величине разрыва функции распределения в точке r:

$$\mathrm{P}(X_i = r) = 1 - F(r) = 1 - r$$

Так как r – это максимально возможное значение X_i, то:

$$\mathrm{P}(S_n = n \cdot r) = \mathrm{P}(X_1 + ... + X_n = n \cdot r) = \mathrm{P}(X_1 = r,\, X_2 = r,\, ...\,,\, X_n = r)$$

$$\mathrm{P}(S_n = n \cdot r) = \mathrm{P}(X_1 = r) \cdot ... \cdot \mathrm{P}(X_n = r) = (1 - r)^n$$

То есть функция распределения суммы $F_n(x)$ имеет разрыв в точке $n \cdot r$ величиной $(1 - r)^n$. Таким образом, имеем:

$$\mathrm{P}(S_n < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\, x > n \cdot r \\ F_n(x), & 0 < x < n \cdot r \\ 1 - (1 - r)^n, & x = n \cdot r \\ 1, & x > n \cdot r \end{cases}$$

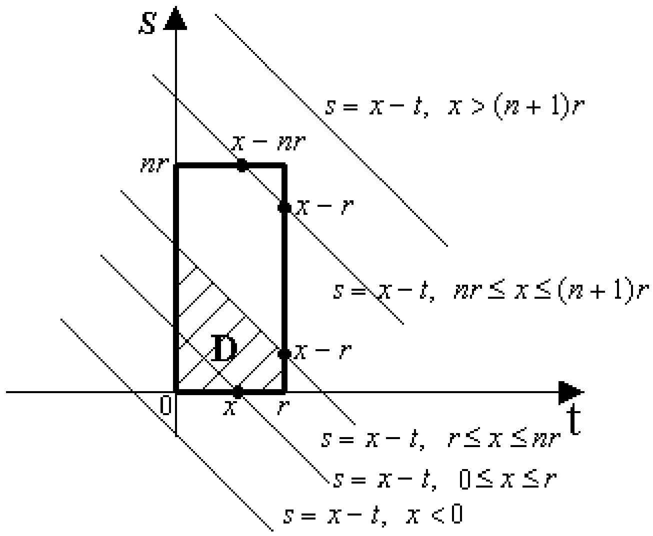
Полученные значения будут использованы ниже при получении распределения $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ как распределения суммы двух случайных величин.

2.1.2 Распределение суммы

Как уже было сказано выше, распределение $F_{n+1}(x)$ представляет собой следующую вероятность:

$$F_{n+1}(x) = \mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1})$$

Чтобы ее найти, необходимо знать совместную плотность вероятности для величин S_n и X_{n+1}, а затем взять от нее интеграл по области $D:\ S_n < x - X_{n+1}$. Случайные величины величин S_n и X_{n+1} являются независимыми. Поэтому их совместная плотность распределения равна произведению плотностей $f_n(s)$ и $f(t)$. Однако, функции распределения имеют разрывы в точках $n\cdot r$ и r соответственно, поэтому значения $s = n\cdot r$ и $t = r$ необходимо рассматривать отдельно. Рассмотрим область значений переменных s и t на плоскости:



На рисунке границы области допустимых значений s и t выделены жирными линиями. Искомая вероятность $F_{n+1}(x) = \mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1})$ равна интегралу от совместной плотности распределения по области, находящейся под прямой $s = x - t$. Поэтому из рисунка видно, что:

$$F_{n+1}(x) = 0, \quad x < 0$$

$$F_{n+1}(x) = 1, \quad x > (n+1)r$$

Распишем $F_{n+1}(x)$ в общем случае, учитывая особые значения $s = n\cdot r$ и $t = r$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1}) = \mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1} \quad S_n \neq n\cdot r \quad X_{n+1} \neq r) +\\ &+\mathrm{P}(X_{n+1} = r \quad S_n < x - r \quad S_n \neq n\cdot r) +\\ &+\mathrm{P}(S_n = n\cdot r \quad X_{n+1} < x - n\cdot r \quad X_{n+1} \neq r) +\\ &+\mathrm{P}(S_n = n\cdot r \quad X_{n+1} = r, \quad nr < x - r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(S_n < x - X_{n+1}) \ = \int\limits_{D:\left\{\begin{array}{lcl} S_n & < & x - X_{n+1}\\ S_n & \neq & n\cdot r\\ X_{n+1} & \neq & r\end{array}\right.}\int f_n(s)\cdot f(t)\,dsdt +\\ &+\mathrm{P}(X_{n+1} = r)\cdot \mathrm{P}(S_n < x - r,\, S_n \neq n\cdot r) +\\ &+\mathrm{P}(S_n = n\cdot r)\cdot \mathrm{P}(X_{n+1} < x - n\cdot r,\, X_{n+1} \neq r) +\\ &+\mathrm{P}(S_n = n\cdot r)\cdot \mathrm{P}(X_{n+1} = r)\cdot \mathrm{P}(x > (n+1)r)\end{aligned}$$

В последнем выражении:

$$\mathrm{P}(x > (n+1)r) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & x > (n+1)r\\ 0, & \end{array}\right.$$

Теперь все вероятности расписаны так, что вместо них можно подставлять значения функций распределения:

$$F_{n+1}(x) = \iint\limits_D f_n(s) \cdot f(t)\, dsdt + (1-r) \cdot F_n(x-r) + (1-r)^n \cdot F(x - n \cdot r) +$$
$$+ (1-r)^n \cdot (1-r) \cdot \mathrm{P}(x > (n+1)r)$$

Заметим, что $F_{n+1}(x) = 1$, если $x > (n+1)r$. Кроме того, если $x < n \cdot r$, то $F(x - n \cdot r) = 0$. Поэтому при $nr \le x \le (n+1)r$:

$$F(x - n \cdot r) = (x - nr)$$

$$\mathrm{P}(x > (n+1)r) = 0$$

$$F_{n+1}(x) = \iint\limits_D f_n(s) \cdot f(t)\, dsdt + (1-r) \cdot F_n(x-r) + (1-r)^n \cdot (x - nr)$$

А при $0 \le x \le nr$:

$$F(x - n \cdot r) = 0$$

$$\mathrm{P}(x > (n+1)r) = 0$$

$$F_{n+1}(x) = \iint\limits_D f_n(s) \cdot f(t)\, dsdt + (1-r) \cdot F_n(x-r)$$

Остается найти интеграл по области D. Рассмотрим сначала случай $0 \le x \le nr$, который делится на два случая: первый – $r \le x \le nr$ (см. рисунок выше):

$$\iint\limits_D f_n(s) \cdot f(t)\, dsdt = \int\limits_0^r dt \int\limits_0^{x-t} f_n(s) \cdot 1\, ds = \int\limits_0^r dt \int\limits_0^{x-t} f_n(s) ds =$$

$$= \int\limits_0^r dt \cdot F_n(s)|_0^{x-t} = \int\limits_0^r F_n(x-t) dt = \int\limits_{x-r}^x F_n(t) dt$$

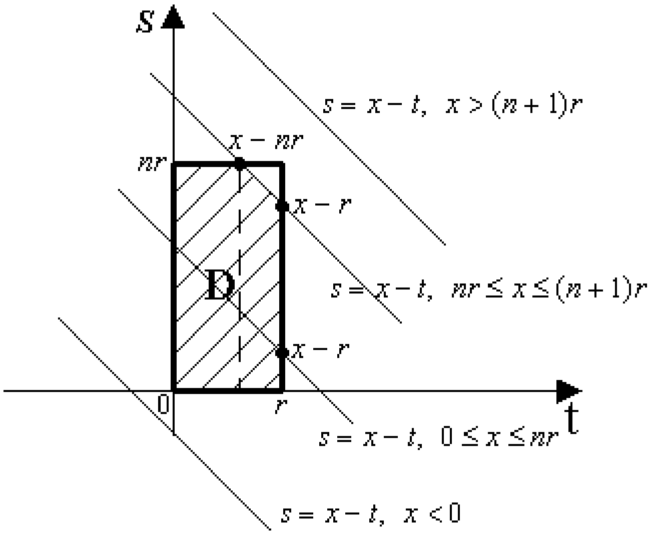
и второй – $0 \le x \le r$:

$$\iint\limits_D f_n(s) \cdot f(t)\, dsdt = \int\limits_0^x dt \int\limits_0^{x-t} f_n(s) \cdot 1\, ds = \int\limits_0^x dt \int\limits_0^{x-t} f_n(s) ds =$$

$$= \int\limits_0^x dt \cdot F_n(s)|_0^{x-t} = \int\limits_0^x F_n(x-t) dt = \int\limits_0^x F_n(t) dt$$

Заметим также, что в этом случае $x - r < 0$, и поэтому $F_n(x-r) = 0$, так что выражение для $F_{n+1}(x)$ еще сильнее упрощается.

В случае $nr \le x \le (n+1)r$ интеграл будет представлять собой сумму 2 интегралов, т.к. область D разбивается на 2 (см. пунктирную линию):



$$\iint\limits_D f_n(s)\cdot f(t)\,dsdt = \int\limits_0^{x-nr} dt \int\limits_0^{nr} f_n(s)\cdot 1\,ds + \int\limits_{x-nr}^{r} dt \int\limits_0^{x-t} f_n(s)\cdot 1\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{x-nr} dt\cdot F_n(s)|_0^{nr} + \int\limits_{x-nr}^{r} dt\cdot F_n(s)|_0^{x-t} = \int\limits_0^{x-nr} F_n(nr)\,dt + \int\limits_{x-nr}^{r} F_n(x-t)\,dt =$$

$$= F_n(nr)\cdot t|_0^{x-nr} - \int\limits_{nr}^{x-r} F_n(t)\,dt = (1-(1-r)^n)\cdot(x-nr) + \int\limits_{x-r}^{nr} F_n(t)\,dt$$

В результате получаем рекуррентную формулу для функции распределения суммы:

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x<0 \\ \int\limits_0^x F_n(t)dt, \quad 0\le x\le r \\ \int\limits_{x-r}^{x} F_n(t)dt + (1-r)\cdot F_n(x-r), \quad r\le x\le nr \\ \int\limits_{x-r}^{nr} F_n(t)dt + (x-nr) + (1-r)\cdot F_n(x-r), \quad nr\le x\le (n+1)r \\ 1, \quad x>(n+1)r \end{cases}$$

Из этой формулы видно, что функция состоит из нескольких кусков, так как на разных отрезках имеет разные выражения.

2.1.3 Распределение суммы – кусочная функция

Докажем, что функция $F_n(x)$ на отрезке $[0,\, nr]$ состоит из n частей:

$$F_n(x) = \begin{cases} F_n^1(x), & 0 \le x \le r \\ F_n^2(x), & r \le x \le 2r \\ \ldots & \\ F_n^n(x), & (n-1)r \le x \le nr \end{cases}$$

Используем метод математической индукции. Для $n = 1$ наше утверждение справедливо, т.е. $F_1(x) = F_1^1(x) = x$ при $0 \le x \le r$. Пусть оно справедливо для $F_n(x)$, тогда докажем что выражение верно и для $F_{n+1}(x)$. Воспользуемся найденной ранее рекуррентной формулой для $r \le x \le nr$:

$$F_{n+1}(x) = \int\limits_{x-r}^{x} F_n(t)dt + (1-r)\cdot F_n(x-r)$$

По предположению индукции $F_n(x)$ состоит из n частей $F_n^1, ..., F_n^n$. Поэтому на каждом отрезке $[(k-1)r,\, kr]$ (где $k = \overline{2, n}$) $F_{n+1}(x)$ будет иметь различные выражения. Если $x \in [(k-1)r,\, kr]$, то:

$$x - r \;\; \in \;\; [(k-2)r,\, (k-1)r]$$

$$F_n(x-r) = F_n^{k-1}(x-r)$$

$$\int\limits_{x-r}^{x} F_n(t)dt = \int\limits_{x-r}^{(k-1)r} F_n^{k-1}(t)dt + \int\limits_{(k-1)r}^{x} F_n^k(t)dt$$

Таким образом, при $x \in [(k-1)r,\, kr]$:

$$F_{n+1}(x) = F_{n+1}^k(x) = \int\limits_{x-r}^{(k-1)r} F_n^{k-1}(t)dt + \int\limits_{(k-1)r}^{x} F_n^k(t)dt + (1-r)\cdot F_n^{k-1}(x-r)$$

На отрезке $[0,\, r]$ рекуррентное соотношение имеет вид:

$$F_{n+1}(x) = \int\limits_{0}^{x} F_n(t)dt$$

Следовательно, при $x \in [0,\, r]$:

$$F_{n+1}(x) = F_{n+1}^1(x) = \int\limits_{0}^{x} F_n^1(t)dt$$

Рассмотрим теперь отрезок $[nr,\, (n+1)r]$ и рекуррентное выражение на нем:

$$F_{n+1}(x) = \int\limits_{x-r}^{nr} F_n(t)dt + (x - nr) + (1-r)\cdot F_n(x-r)$$

Так как $x \in [nr,\,(n+1)r]$, то:

$$x - r \;\in\; [(n-1)r,\, nr]$$

$$F_n(x-r) = F_n^n(x-r)$$

$$\int\limits_{x-r}^{nr} F_n(t)dt = \int\limits_{x-r}^{nr} F_n^n(t)dt$$

Следовательно, имеем на отрезке $x \in [nr,\,(n+1)r]$:

$$F_{n+1}(x) = F_{n+1}^{n+1}(x) = \int\limits_{x-r}^{nr} F_n^n(t)\,dt + (x-nr) + (1-r)\cdot F_n^n(x-r)$$

В результате мы доказали, что функция распределения суммы состоит из нескольких частей и нашли рекуррентную формулу на эти части:

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_{n+1}^1(x) = \int_0^x F_n^1(t)dt, \quad 0 \le x \le r \\ F_{n+1}^2(x) = \int_{x-r}^{r} F_n^1(t)dt + \int_r^x F_n^2(t)dt + (1-r)\cdot F_n^1(x-r), \\ \quad r \le x \le 2r \\ \ldots \\ F_{n+1}^k(x) = \int_{x-r}^{(k-1)r} F_n^{k-1}(t)dt + \int_{(k-1)r}^{x} F_n^k(t)dt + (1-r)\cdot \\ \quad \cdot F_n^{k-1}(x-r), \quad (k-1)r \le x \le kr \\ \ldots \\ F_{n+1}^n(x) = \int_{x-r}^{(n-1)r} F_n^{n-1}(t)dt + \int_{(n-1)r}^{x} F_n^n(t)dt + (1-r)\cdot \\ \quad \cdot F_n^{n-1}(x-r), \quad (n-1)r \le x \le nr \\ F_{n+1}^{n+1}(x) = \int_{x-r}^{nr} F_n^n(t)dt + (x-nr) + (1-r)\cdot \\ \quad \cdot F_n^n(x-r), \quad nr \le x \le (n+1)r \end{cases}$$

Данная формула будет использована далее для получения общей формулы $F_n(x)$, но сначала выведем вспомогательную формулу для $F_n^n(x)$.

2.2 Вспомогательная формула

Справедлива следующая формула на отрезке $[(n-1)r,\, nr]$ для функции распределения суммы n величин, распределенных равномерно со срезкой:

$$F_n^n(x) = 1 - (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^i\,\frac{(x-nr)^{n-i}}{(n-i)!}$$

Докажем эту формулу по методу математической индукции. Проверим справедливость при $n = 1$:

$$F_1^1(x) = 1 - (-1)^1 \cdot \left(1 \cdot (r-1)^0 \cdot \frac{(x-r)^1}{1!} + 1 \cdot (r-1)^1 \cdot \frac{(x-r)^0}{0!}\right) =$$

$$= 1 + (x - r + r - 1) = x$$

Таким образом, для $n = 1$ соотношение выполняется, и остается доказать, что из справедливости формулы для F_n^n следует ее справедливость для F_{n+1}^{n+1}. Воспользуемся рекуррентной зависимостью, найденной ранее:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = (x - nr) + \int\limits_{x-r}^{nr} F_n^n(t)\,dt + (1-r) \cdot F_n^n(x-r)$$

Считая справедливой доказываемую формулу для F_n^n, имеем:

$$F_n^n(x) = 1 - (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^i\,\frac{(x-nr)^{n-i}}{(n-i)!}$$

Тогда найдем слагаемые входящие в рекуррентное выражение для F_{n+1}^{n+1}:

$$\int\limits_{x-r}^{nr} F_n^n(t) = \int\limits_{x-r}^{nr} \left[1 - (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^i\,\frac{(t-nr)^{n-i}}{(n-i)!}\right] dt =$$

$$= \left[t - (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^i\,\frac{(t-nr)^{n+1-i}}{(n+1-i)!}\right]\Bigg|_{x-r}^{nr} =$$

$$= nr - (x-r) - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^{i+1}\,\frac{(x-(n+1)r)^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$$

$$(1-r) \cdot F_n^n(x-r) = (1-r) - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,(r-1)^{i+1}\,\frac{(x-(n+1)r)^{n-i}}{(n-i)!}$$

Для сокращения объема выражений введем следующее обозначение:

$$V_i = (r-1)^i\,\frac{(x-(n+1)r)^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$$

Подставляя найденные выражения в рекуррентную формулу, получаем:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = (x-nr) + nr - (x-r) + (1-r) - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i V_i - (-1)^{n+1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1} V_i = 1 - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_n^i V_i - (-1)^{n+1} \cdot V_0 - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} V_i -$$

$$- (-1)^{n+1} \cdot V_{n+1} = 1 - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(C_n^i + C_n^{i-1}\right) \cdot V_i - (-1)^{n+1} \cdot V_0 - (-1)^{n+1} \cdot V_{n+1}$$

Учитывая равенство $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$, получаем:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = 1 - (-1)^{n+1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^i \cdot V_i + C_{n+1}^0 \cdot V_0 + C_{n+1}^{n+1} \cdot V_{n+1}\right] =$$

$$= 1 - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \cdot V_i$$

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = 1 - (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \,(r-1)^i \,\frac{(x-(n+1)r)^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$$

Таким образом, мы доказали индукционный переход, а значит, сформулированная вспомогательная формула справедлива. Теперь все готово для доказательства общей формулы.

2.3 Общая формула

Теорема. Для k-й части (для $x \in [(k-1)r,\ kr]$) функции распределения суммы n случайных величин, имеющих равномерное распределение на $[0,\ 1]$ со срезкой в точке r, справедлива следующая общая формула:

$$F_n^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \,(r-1)^j \,\frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right]$$

Доказательство. Снова для сокращения формул введем следующие обозначения:

$$V_{i,\,j}(x) = (r-1)^j \,\frac{(x-ir)^{n-j+1}}{(n-j+1)!}$$

$$U_i(x) = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \,(r-1)^j \,\frac{(x-ir)^{n-j+1}}{(n-j+1)!}$$

Доказательство разобьем на несколько этапов.

2.3.1 Доказательство для n-й части функции распределения

Сначала докажем формулу для $k = n$, т.е. для $F_n^n(x)$ (это наиболее сложный случай), снова используя метод математической индукции. Проверим справедливость для $n = 1$:

$$F_1^1(x) = (-1)^0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (r-1)^0 \cdot \frac{x^1}{1!} = x$$

Считая формулу верной для F_n^n, докажем ее справедливость для F_{n+1}^{n+1}. Итак, известно:

$$F_n^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!} \right]$$

Кроме того, известна вспомогательная формула:

$$F_n^n(x) = 1 - (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} C_n^i (r-1)^i \frac{(x-nr)^{n-i}}{(n-i)!}$$

Приравнивая правые части этих выражений, приходим к равенству (*):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!} \right] + \\ + (-1)^n C_n^n \sum_{j=0}^{n} C_n^j (r-1)^j \frac{(x-nr)^{n-j}}{(n-j)!} = 1$$

$$(*) \quad 1 = \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!} \right]$$

Опять для доказательства индукционного перехода используем рекуррентное соотношение:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = (x-nr) + \int_{x-r}^{nr} F_n^n(t)\,dt + (1-r) \cdot F_n^n(x-r)$$

Представим $(x-nr)$ в виде $\int_{nr}^{x} 1\;dt$ и заменим единицу на выражение (*):

$$(x-nr) = \int_{nr}^{x} \left[\sum_{i=0}^{n} \left((-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(t-ir)^{n-j}}{(n-j)!} \right) \right] dt$$

$$(x-nr) = \sum_{i=0}^{n} \left((-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(t-ir)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} \right) \Bigg|_{nr}^{x}$$

$$(x-nr) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) - \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(nr)$$

Пользуясь предположением индукции для F_n^n, запишем второе слагаемое рекуррентной формулы:

$$\int_{x-r}^{nr} F_n^n(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(t-ir)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} \right] \Bigg|_{x-r}^{nr} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i U_i(nr) - \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x) \right]$$

И, наконец, последнее слагаемое:

$$(1-r)\cdot F_n^n(x-r) = -\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, (r-1)^{j+1} \, \frac{(x-(i+1)r)^{n-j}}{(n-j)!} \right] =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \, (r-1)^j \, \frac{(x-(i+1)r)^{n-j+1}}{(n-j+1)!} \right] =$$

$$(1-r)\cdot F_n^n(x-r) = -\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \, V_{i+1,\,j}(x) \right]$$

В результате:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) - \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(nr) + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i U_i(nr) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x) \right] - \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \, V_{i+1,\,j}(x) \right]$$

Заметим, что $U_n(nr) = 0$ и, следовательно, $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i U_i(nr) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_n^i U_i(nr)$:

$$F_{n+1}^{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x) \right] -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \, V_{i+1,\,j}(x) \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x) + \sum_{j=1}^{i+1} C_i^{j-1} \, V_{i+1,\,j}(x) \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \, C_n^i \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x) + \sum_{j=1}^{i} C_i^{j-1} \, V_{i+1,\,j}(x) + V_{i+1,\,0}(x) + V_{i+1,\,i+1}(x) \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i U_i(x) -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[(-1)^i C_n^i\cdot\left(\sum_{j=1}^{i}\left(C_i^j+C_i^{j-1}\right)V_{i+1,\,j}(x)+V_{i+1,\,0}(x)+V_{i+1,\,i+1}(x)\right)\right]$$

Так как $C_i^j+C_i^{j-1}=C_{i+1}^j$, то:

$$F_{n+1}^{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU_i(x)-$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[(-1)^i C_n^i\cdot\left(\sum_{j=1}^{i}C_{i+1}^jV_{i+1,\,j}(x)+C_{i+1}^0V_{i+1,\,0}(x)+C_{i+1}^{i+1}V_{i+1,\,i+1}(x)\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU_i(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\left[(-1)^i C_n^i\cdot\sum_{j=0}^{i+1}C_{i+1}^jV_{i+1,\,j}(x)\right]=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU_i(x)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1}C_n^{i-1}\sum_{j=0}^{i}C_i^jV_{i,\,j}(x)\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU_i(x)+\sum_{i=1}^{n}\left[C_n^{i-1}\cdot(-1)^i\sum_{j=0}^{i}C_i^jV_{i,\,j}(x)\right]=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU_i(x)+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}U_i(x)=$$

$$=U_0(x)+\sum_{i=1}^{n}C_n^iU_i(x)+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}U_i(x)=U_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\left(C_n^i+C_n^{i-1}\right)U_i(x)=$$

$$=C_{n+1}^0U_0(x)+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1}^i\,U_i(x)=\sum_{i=0}^{n}C_{n+1}^i\,U_i(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{n+1}^i\sum_{j=0}^{i}C_i^j\,(r-1)^j\,\frac{(x-ir)^{n-j+1}}{(n-j+1)!}$$

Получили требуемое выражение для F_{n+1}^{n+1}, а значит, по индукции формула справедлива для любого n. Итак, общая формула доказана для частного случая $k=n$. Рассмотрим еще один частный случай – $k=1$, так как рекурсивное соотношение имеет особый вид не только для $F_{n+1}^{n+1}(x)$, но и для $F_{n+1}^1(x)$.

2.3.2 Доказательство для первой части функции распределения

Случай $k=1$ – самый простой, и формула, которую необходимо доказать, достаточно проста:

$$F_n^1=\frac{x^n}{n!}$$

Для $n=1$ эта формула выполняется:

$$F_1^1=\frac{x^1}{1!}=x$$

Считая формулу верной для F_n^1, покажем, что она справедлива и для F_{n+1}^1, используя рекуррентное соотношение:

$$F_{n+1}^1 = \int\limits_0^x F_n^1(t)dt = \int\limits_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \left.\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Таким образом, база индукции и индуктивный переход выполняются, а значит, формула доказана. Остается только доказать общий случай $k = 2, 3, ..., n-1$.

2.3.3 Общий случай

Для $k = 2, 3, ..., n-1$ будем доказывать общую формулу индукцией по n. Заметим, что $F_n(x)$ имеет ровно n частей на отрезке $[0,\, nr]$, и значит, в общей формуле $n \geq k$. Тогда база индукции – $n = 2$, а значит, $k = 1,\, 2$. Формула для F_2^1 подпадает под доказательство в параграфе 2.3.2. Доказательство для первой части функции распределения, а формула для F_2^2 – под доказательство в параграфе 2.3.1. Доказательство для n-й части функции распределения. Теперь, считая, что формула верна для всех F_n^k $(n \geq 2)$ при $k = 1, 2, 3, ..., n$, докажем ее для всех F_{n+1}^k при $k = 2, 3, ..., n-1$ (случаи $k = 1$ и $k = n+1$ уже были доказаны выше). Итак, имеем:

$$F_n^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j\,(r-1)^j\,\frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right]$$

$$F_n^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-2}\left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j\,(r-1)^j\,\frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right]$$

Для доказательства формулы F_{n+1}^k используем рекуррентное соотношение:

$$F_{n+1}^k(x) = \int\limits_{x-r}^{(k-1)r} F_n^{k-1}(t)dt + \int\limits_{(k-1)r}^{x} F_n^k(t)dt + (1-r)\cdot F_n^{k-1}(x-r)$$

Выпишем каждое из слагаемых, используя формулы для F_n^k и F_n^{k-1}, верные по предположению индукции. Снова в целях сокращения выражений будем применять введенные ранее обозначения $V_{i,\,j}(x)$ и $U_i(x)$.

$$\int\limits_{x-r}^{(k-1)r} F_n^{k-1}(t)dt = \sum_{i=0}^{k-2} C_n^i U_i(t)\Big|_{x-r}^{(k-1)r} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-2} C_n^i U_i\left((k-1)r\right) - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j V_{i+1,\,j}(x)$$

$$\int\limits_{(k-1)r}^{x} F_n^k(t)dt = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i U_i(t)\Big|_{(k-1)r}^{x} = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i U_i(x) - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i U_i\left((k-1)r\right)$$

$$(1-r)\,F_n^{k-1}\,(x-r) = -\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\sum_{j=0}^{i}C_i^j\,(r-1)^{j+1}\,\frac{(x-(i+1)r)^{n-j}}{(n-j)!} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\sum_{j=1}^{i+1}C_i^{j-1}V_{i+1,\,j}(x)$$

Замечая, что $U_{k-1}\,((k-1)r) = 0$, а следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i\,((k-1)r) = \sum_{i=0}^{k-2}C_n^iU_i\,((k-1)r),$$

получаем после сложения:

$$F_{n+1}^k(x) = -\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\sum_{j=0}^{i}C_i^jV_{i+1,\,j}(x) + \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\sum_{j=1}^{i+1}C_i^{j-1}V_{i+1,\,j}(x) == \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\left[\sum_{j=1}^{i}C_i^jV_{i+1,\,j}(x) + \sum_{j=1}^{i}C_i^{j-1}V_{i+1,\,j}(x) + V_{i+1,\,0}(x) + V_{i+1,\,i+1}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\left[\sum_{j=1}^{i}\left(C_i^j + C_i^{j-1}\right)\,V_{i+1,\,j}(x) + V_{i+1,\,0}(x) + V_{i+1,\,i+1}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\left[\sum_{j=1}^{i}C_{i+1}^jV_{i+1,\,j}(x) + C_{i+1}^0V_{i+1,\,0}(x) + C_{i+1}^{i+1}V_{i+1,\,i+1}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\,C_n^i\sum_{j=0}^{i+1}C_{i+1}^jV_{i+1,\,j}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}C_n^iU_i(x) + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\,C_n^{i-1}\sum_{j=0}^{i}C_i^jV_{i,\,j}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}C_n^iU_i(x) + \sum_{i=1}^{k-1}C_n^{i-1}U_i(x) + U_0(x) = \sum_{i=1}^{k-1}\left(C_n^i + C_n^{i-1}\right)\,U_i(x) + U_0(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}C_{n+1}^iU_i(x) + C_{n+1}^0U_0(x) = \sum_{i=0}^{k-1}C_{n+1}^iU_i(x)$$

$$F_{n+1}^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\left[(-1)^i\,C_{n+1}^i\sum_{j=0}^{i}C_i^j\,(r-1)^j\,\frac{(x-ir)^{n+1-j}}{(n+1-j)!}\right]$$

Получив требуемую формулу, мы доказали индукционный переход, а значит, и всю формулу для всех n и k.

3. Точная функция распределения в модели индивидуальных рисков

В модели индивидуальных рисков число страховых контрактов фиксировано – N, а количество выплат зависит от числа произошедших страховых случаев. В каждом контракте допускается только один страховой случай, поэтому их общее число может принимать значения от 0 до N. Тогда функция распределения для суммы всех выплат страховщика будет:

$$G(x) = \mathrm{P}\left(Y < x\right) = \sum_{n=1}^{N} \left[\mathrm{P}\left(Q = n\right) \cdot \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i < x \right) \right] + \mathrm{P}\left(Q = 0\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left[C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} \cdot F_n(x) \right] \; + \; \left(1-p\right)^N$$

Заметим, что $F_n(x) = 1$ для $x > n \cdot r$, или $n < \frac{x}{r}$, т.е. $n \leq \left[\frac{x}{r}\right]$. Тогда формулу можно переписать в следующем виде:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{[x/r]} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} \; + \sum_{n=[x/r]+1}^{N} \left[C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} \cdot F_n^{[x/r]\,+1}(x) \right]$$

Теперь посмотрим, какое число слагаемых достаточно, для вычисления функции распределения с заданной точностью ε. Оборвем сумму на некотором слагаемом m и оценим остаток суммы R_m. Для первой суммы имеем:

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{[x/r]} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} < \sum_{n=m+1}^{\infty} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n}$$

Для второй суммы:

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{N} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} \cdot F_n^{[x/r]\,+1}(x) < \sum_{n=m+1}^{\infty} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n}$$

Таким образом, оценка сверху на остаток одинакова для обеих сумм; рассмотрим ее:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} C_N^n p^n \left(1-p\right)^{N-n} =$$

$$= \left(1-p\right)^N \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{p}{1-p} \right)^n \cdot \frac{N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot (N-n+1)}{n!} \right] <$$

$$< \left(1-p\right)^N \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{p}{1-p} \right)^n \cdot \frac{N \cdot N \cdot ... \cdot N}{n!} \right] = \left(1-p\right)^N \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{Np}{1-p} \right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right]$$

Введем следующее обозначение:

$$\nu = \frac{Np}{1-p}$$

Тогда:

$$R_m < (1-p)^N \cdot \left[\frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{\nu^{m+2}}{(m+2)!} + ...\right] =$$

$$= (1-p)^N \cdot \frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left[1 + \frac{\nu}{m+2} + \frac{\nu^2}{(m+2)(m+3)} + ...\right]$$

$$R_m < (1-p)^N \cdot \frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left[1 + \frac{\nu}{m} + \left(\frac{\nu}{m}\right)^2 + ...\right]$$

В квадратных скобках находится бесконечный геометрический ряд, и он сходится, если знаменатель меньше единицы, т.е. $\frac{\nu}{m} < 1 \;\Rightarrow\; m > \nu$. При таком условии, пользуясь формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии, имеем:

$$R_m < (1-p)^N \cdot \frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\nu}{m}} = (1-p)^N \cdot \frac{m}{m-\nu} \cdot \frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!}$$

Таким образом, для обеспечения точности ε обе суммы достаточно считать до $n = m$, где m удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{cases} m > \nu = \frac{Np}{1-p} \\ (1-p)^N \cdot \frac{m}{m-\nu} \cdot \frac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} < \varepsilon \end{cases}$$

Следующие примеры демонстрируют это наглядно:

$$\begin{array}{l} 1)\; N = 1000,\; p = 0.01 \\ \quad m = 20 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 0.002 \\ \quad m = 30 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 10^{-7} \end{array}$$

То есть суммы достаточно считать до 30-го слагаемого вместо 1000-го. Это обеспечит точность 10^{-7}.

$$\begin{array}{l} 2)\; N = 2000,\; p = 0.01 \\ \quad m = 40 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 0.00003 \\ \quad m = 50 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 10^{-8} \end{array}$$

Таким образом, здесь достаточно вычислить сумму 50 слагаемых вместо 2000. Точность составит 10^{-8}.

4. Точная функция распределения в модели коллективных рисков

Согласно модели коллективных рисков на коротком интервале времени число страховых случаев Q имеет пуассоновское распределение с параметром λ (среднее число страховых случаев за год), и вероятность $Q = n$ будет:

$$\mathrm{P}(Q = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Так же как и в модели индивидуальных рисков функция распределения суммарных выплат по всем страховым случаям, или вероятность того, что выплаты не превзойдут значение x, складывается из функций распределения для каждого значения числа страховых случаев Q от нуля до бесконечности, умноженных га соответствующие вероятности $\mathrm{P}\,(Q=n)$:

$$G(x)=\mathrm{P}\,(Y<x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}\,(Q=n)\cdot F_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot F_n(x)$$

Эта сумма разбивается на две, так как $F_n(x)=1$ при $x>n\cdot r$, т.е. $n\leq[x/r]$:

$$G(x)=\sum_{n=0}^{[x/r]}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\quad+\quad\sum_{n=[x/r]+1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot F_n(x)$$

Снова, если оборвать эти суммы на m-м слагаемом, то остатки R_m можно оценить следующим значением:

$$R_m\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\left[\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{\lambda^{m+2}}{(m+2)!}+...\right]=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\left[1+\frac{\lambda}{m+2}+\frac{\lambda^2}{(m+2)\,(m+3)}+...\right]$$

$$R_m<e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\left[1+\frac{\lambda}{m}+\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2+...\right]$$

Наложим условие сходимости на знаменатель этой геометрической прогрессии:

$$\frac{\lambda}{m}<1\;\;\Rightarrow\;\;m>\lambda$$

Тогда, пользуясь формулой суммы бесконечного геометрического ряда, получим:

$$R_m<e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{m}}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{m}{m-\lambda}$$

Потребовав выполнение следующих неравенств на m:

$$\left\{\begin{array}{l} m>\lambda \\ e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{m}{m-\lambda}<\varepsilon \end{array}\right.\qquad,$$

мы найдем количество слагаемых m, которое достаточно, чтобы получить значение суммы с точностью ε. Например:

1) $\lambda=1$
$m=10\;\;\Rightarrow\;\;\varepsilon=10^{-8}$

2) $\lambda=10$
$m=20\;\;\Rightarrow\;\;\varepsilon=0.001$
$m=40\;\;\Rightarrow\;\;\varepsilon=10^{-13}$

$$\begin{aligned} &3)\ \lambda = 20 \\ &\quad m = 30 \ \Rightarrow\ \varepsilon = 0.01 \\ &\quad m = 50 \ \Rightarrow\ \varepsilon = 10^{-9} \end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления данной бесконечной суммы достаточно посчитать лишь небольшое число слагаемых.

Список литературы

[1] Бауэрс Н., Гербер Х., Хикман Дж., Джонс Д., Несбитт С. Актуарная математика. М., Вильямс, 2001.

[2] Голубин А.Ю. Математические модели в теории страхования. М., Анкил, 2003.

[3] Корнилов И.А. Основы страховой математики. М., Юнити-Дана, 2004.

[4] Бацын М.В., Калягин В.А. Определение оптимального уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании убытка. Известия АИН им. А.М. Прохорова, серия Бизнес-информатика, Т. 12, 2005, 67–74.

[5] Kremer E. Applied risk theory. Shaker Verlag, 1999.

[6] Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance risk models. Schaumburg, Illinois, Society of Actuaries, 1992.

[7] Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. Loss models. John Wiley & Sons Inc, 1998.

[8] Buehlmann H. Mathematical methods in risk theory. Springer, 1996.

[9] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley & Sons Inc, 1950.