УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБОБЩЕННОМУ УСЛОВИЮ ГРОМЕКИ-БЕЛЬТРАМИ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 27.06.2018, после переработки 02.09.2018.

Квазигидродинамическая система была предложена автором в 1993 г. Она имеет глубокие связи с классическими уравнениями Навье–Стокса. В данной работе построены точные решения квазигидродинамической системы, подчиняющиеся обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Эти решения удовлетворяют также системе Навье–Стокса и были найдены ранее для неё другим способом. В нестационарном случае они обобщают известное решение Джеффри Инграма Тейлора.

Ключевые слова: системы Навье–Стокса и Эйлера, квазигидродинамическая система, точные решения, обобщенное условие Громеки–Бельтрами.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5–18.
https://doi.org/10.26456/vtpmk507

Введение

Научное направление, связанное с построением точных решений классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости, привлекало внимание многих ученых [1–4]. Особый интерес представляют решения, удовлетворяюшие обобщенному условию Громеки–Бельтрами и не являющиеся винтовыми [5–7]. В 1993 г. автором была предложена квазигидродинамическая (КГД) система уравнений, описывающая движения слабосжимаемой вязкой жидкости [8]. Она стала объектом многочисленных исследований, часть из которых изложена в монографиях [9,10]. Выявлены глубокие связи КГД системы с моделями Эйлера и Навье–Стокса. Данная статья является продолжением работ [11,12]. Основное внимание в ней уделено построению точных решений квазигидродинамической системы, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами и не являющихся однородно-винтовыми. Эти решения удовлетворяют также системе Навье–Стокса и были построены ранее для нее другим способом [4–6]. В нестационарном случае они обобщают известное решение Джеффри Инграма Тейлора.

1. Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости. Системы Навье–Стокса и Эйлера

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 2\nu\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \mathrm{div}\ \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big]. \tag{1.2}$$

Здесь $\widehat{\sigma}$ – тензор скоростей деформаций, определяемый по формуле

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big].$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big).$$

Параметр

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}$$

интерпретируется как характерное время релаксации. Символом c_s обозначена скорость звука в жидкости. Влияние внешних массовых сил не учитывается. В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задает точку в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, t – время. Символами div и ∇ обозначены операторы дивергенции и градиента. Система содержит положительные константы – плотность ρ и коэффициент кинематической вязкости ν. Коэффициенты динамической вязкости η и кинематической вязкости ν связаны соотношением $\nu = \eta/\rho$. Классическая система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\Delta\vec{u}. \tag{1.4}$$

Она может быть получена из (1.1) – (1.2) формальным предельным переходом при $\tau \to +0$. Если же в (1.3) – (1.4) перейти к пределу при $\nu \to +0$, то получим систему Эйлера

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0. \tag{1.6}$$

Выявлению глубоких связей между системами Эйлера, Навье–Стокса и КГД посвящены монографии [9, 10].

2. Общие решения системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений. Обобщенное условие Громеки–Бельтрами

Пусть $(\vec{x}, t) \in \Omega = \{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}},\ t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Добавим к системам Эйлера, Навье–Стокса и КГД начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}. \tag{2.1}$$

Функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой. Для нее выполнено условие

$$\mathrm{div}\ \vec{u}_0 = 0. \tag{2.2}$$

Давление $p = p(\vec{x}, t)$ во всех трех системах определено с точностью до произвольной функции времени. Предположим, что $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция. Ротор поля $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты правой прямоугольной системы координат $oxyz$. Величины u_x, u_y, u_z есть проекции вектора скорости на соответствующие оси. Символы $\cdot$ и $\times$ используются для обозначения операций скалярного и векторного произведения. В [12] доказана

Теорема 1. *Пусть бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет трем условиям*

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u}, \tag{2.5}$$

$$rot\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{2.6}$$

Тогда пара функций $(\vec{u}, p)$, где

$$p = \rho\Big(C(t) - \frac{\vec{u}^2}{2} + \Psi\Big), \tag{2.7}$$

является решением как системы Навье–Стокса (1.3) – (1.4), *так и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2). *Здесь $C(t)$ – любая непрерывная при $t \geqslant 0$ функция, $\vec{u}^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = |\vec{u}|^2$. Потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$ определяется с помощью выражения*

$$\Psi = \int\limits_{\gamma} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds, \tag{2.8}$$

где γ – произвольно выбранная кусочно-гладкая кривая в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, соединяющая точки $\vec{x}_0$ и $\vec{x}$, $\vec{l}$ – единичный касательный вектор к γ, ds – элемент ее длины.

Равенство (2.6) называется *обобщенным условием Громеки–Бельтрами.* Оно может быть представлено в эквивалентной форме

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\omega}. \tag{2.9}$$

Течение называется однородно-винтовым, если существует такая постоянная $\lambda \neq 0$, что

$$\vec{\omega} = \lambda\vec{u}, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega.$$

Для этих течений условия (2.6) и (2.9) выполняются. Примеры общих однородно-винтовых решений систем Навье–Стокса и КГД приведены в [12].

3. Примеры точных решений нестационарной квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Используя сформулированную в предыдущем пункте теорему, построим общие для систем КГД и Навье–Стокса решения, не относящиеся к классу однородно-винтовых.

Пример 1. Пусть векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ в правой декартовой системе координат имеет компоненты

$$u_x = -\frac{A}{H}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.1}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.2}$$

$$u_z = 0. \tag{3.3}$$

Здесь A – положительная постоянная, имеющая размерность *см*^{2}/*с*. Символами L и H обозначены положительные константы, имеющие размерность *см*. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенств

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{3.7}$$

Таким образом, условия (2.4) и (2.5) выполняются. По формуле (2.3) найдем вихрь скорости:

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L}\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{k}.$$

Вычислим векторное произведение:

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] = \frac{A^2}{L}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{i}+$$

$$+\frac{A^2}{H}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{j}. \tag{3.8}$$

Поскольку правая часть (3.8) отлична от нуля, течение не является однородно-винтовым. Прямой проверкой можно убедиться в том, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (2.6) выполняется. Определим теперь потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$. В пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ зададим две точки

$$\vec{x}_0 = \Big(\frac{\pi L}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0\Big) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

По формуле (2.8) находим

$$\Psi = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \big([\vec{u}\times\vec{\omega}]\cdot\vec{l}\big)\, ds =$$

$$= A^2\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int\limits_{\left(\frac{\pi L}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)}\Big[\sin\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)d\Big(\frac{x_*}{L}\Big)+$$

$$+\sin\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\cos\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)d\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$

$$= -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int\limits_{\left(\frac{\pi L}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)} d\,\Big[\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$

$$= -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big|_{\left(\frac{\pi L}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)} =$$

$$= -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.9}$$

Подстановка (3.1) – (3.3) и (3.9) в (2.7) позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho C(t) - \frac{\rho A^2}{2}\Big[\frac{1}{H^2}\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)+\frac{1}{L^2}\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Big]e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.10}$$

Набор функций (3.1) – (3.3), (3.10) задает точное решение как квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2), так и системы Навье–Стокса (1.3) – (1.4). Это решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера (1.5) – (1.6). В частном случае $L = H$, $U = A/H = A/L$ оно совпадает с решением, построенном в [12] на с. 20–22.

Пример 2. Рассмотрим векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ с компонентами

$$u_x = -\frac{A}{H}\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.11}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.12}$$

$$u_z = 0. \tag{3.13}$$

Свойства постоянных A, L и H описаны в предыдущем примере. Подстановка (3.11) – (3.13) в (3.4) – (3.7) дает истинные равенства. Это означает, что условия (2.4) и (2.5) выполнены. Вычисляем

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H}\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L}\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{k}.$$

Векторное произведение

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] = \frac{A^2}{L}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{i}+$$

$$+\frac{A^2}{H}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{y}{H}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x}{L}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{j}$$

отлично от нуля. Поэтому течение не является однородно-винтовым. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (2.6) также выполняется. Чтобы определить потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ две точки

$$\vec{x}_0 = (0,0,0) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x,y,z).$$

Применяем формулу (2.8):

$$\Psi = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \big([\vec{u}\times\vec{\omega}]\cdot\vec{l}\big)\ ds =$$

$$= A^2\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\Big[\mathrm{sh}\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)d\Big(\frac{x_*}{L}\Big)+$$

$$+\mathrm{sh}\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)d\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\ \Big[\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big|_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\Big[\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y}{H}\Big)-1\Big]\ e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.14}$$

Подставив (3.11) – (3.13) и (3.14) в (2.7), находим распределение давления:

$$p = \rho\widetilde{C}(t) + \frac{\rho A^2}{2}\Big[\frac{1}{H^2}\mathrm{ch}^2\Big(\frac{x}{L}\Big)+\frac{1}{L^2}\mathrm{ch}^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Big]e^{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.15}$$

Здесь $\widetilde{C}(t)$ – произвольная функция времени, определенная для $t \geqslant 0$. Общее решение (3.11) – (3.13), (3.15) систем Навье–Стокса и КГД не удовлетворяет уравнениям Эйлера. Если $\widetilde{C}(t)=0$, то давление $p=p(\vec{x},t)$ при фиксированном $\vec{x}\in\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ экспоненциально возрастает с течением времени. Решение квазигидродинамической системы с указанным свойством построено впервые.

Пример 3. Допустим, что векторное поле $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$ имеет компоненты

$$u_x = -\frac{A}{H}\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.16}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.17}$$

$$u_z = 0. \tag{3.18}$$

Константы A, L, H такие же, как и в предыдущих примерах. Для функций (3.16) – (3.18) равенства (3.4) – (3.7) выполняются. Вычисления дают:

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H}\mathrm{sh}\left(\frac{x}{L}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)e^{\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{y}{H}\right)e^{\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A\Big(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{k},$$

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] = \frac{A^2}{L}\Big(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin^2\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{i}+$$

$$+\frac{A^2}{H}\Big(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)\mathrm{sh}^2\Big(\frac{x}{L}\Big)e^{2\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{j},$$

$$\mathrm{rot}\ [\vec{u}\times\vec{\omega}] = 0.$$

Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ точки

$$\vec{x}_0 = (0,0,0) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x,y,z).$$

Принимая во внимание (2.8), будем иметь

$$\Psi = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \Big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l} \Big)\, ds =$$

$$= A^2 \Big(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \Big) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \Bigg[\mathrm{sh}\Big(\frac{x_*}{L}\Big) \mathrm{ch}\Big(\frac{x_*}{L}\Big) \sin^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big) d\Big(\frac{x_*}{L}\Big) +$$

$$+ \sin\Big(\frac{y_*}{H}\Big) \cos\Big(\frac{y_*}{H}\Big) \mathrm{sh}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big) d\Big(\frac{y_*}{H}\Big) \Bigg] =$$

$$= \frac{A^2}{2} \Big(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \Big) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d \Bigg[\mathrm{sh}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big) \sin^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big) \Bigg] =$$

$$= \frac{A^2}{2} \Big(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \Big) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \mathrm{sh}^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big) \sin^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big) \Bigg|_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} =$$

$$= \frac{A^2}{2} \Big(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \Big) \mathrm{sh}^2\Big(\frac{x}{L}\Big) \sin^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\ e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}.$$

Формула (2.7) позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho C(t) - \frac{\rho A^2}{2} \Bigg[\frac{1}{H^2} \mathrm{sh}^2\Big(\frac{x}{L}\Big) + \frac{1}{L^2} \sin^2\Big(\frac{y}{H}\Big) \Bigg] e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.19}$$

При $L \neq H$ набор функций (3.16) – (3.19) удовлетворяет нестационарным системам Навье–Стокса и КГД, но не удовлетворяет уравнениям Эйлера. Случай $L = H$ будет рассмотрен в следующем пункте.

4. Примеры точных решений стационарной квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Выпишем квазигидродинамическую систему (1.1) – (1.2) для установившихся течений:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 2\nu\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \mathrm{div}\ \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w}) \big]. \tag{4.2}$$

Соответствующие системы Навье–Стокса и Эйлера могут быть записаны следующим образом:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{u}; \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \tag{4.6}$$

Приведем примеры точных решений стационарной КГД системы (4.1) – (4.2), удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами.

Пример 4. Рассмотрим набор функций

$$u_x = -\frac{A}{L}\mathrm{sh}\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{L}\Big), \tag{4.7}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\mathrm{ch}\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{L}\Big), \tag{4.8}$$

$$u_z = 0, \tag{4.9}$$

$$p = p_0 - \frac{\rho A^2}{2L^2}\Big[\mathrm{sh}^2\Big(\frac{x}{L}\Big) + \sin^2\Big(\frac{y}{L}\Big)\Big]. \tag{4.10}$$

Здесь $p_0 = const$, свойства постоянных A и L описаны выше. Зависимости (4.7) – (4.10) получаются из (3.16) – (3.19), если положить $L = H$. Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– трехмерный оператор Лапласа. Функции u_x, u_y, u_z являются гармоническими во всем пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, поскольку

$$\Delta u_x = 0, \qquad \Delta u_y = 0, \qquad \Delta u_z = 0.$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что набор функций (4.7) – (4.10) есть общее точное решение систем Эйлера (4.5) – (4.6), Навье–Стокса (4.3) – (4.4) и квазигидродинамической системы (4.1) – (4.2). Оно является безвихревым и потенциальным. Другие примеры подобных решений приведены в [10]. Будем искать решение КГД системы (4.1) – (4.3) в виде

$$u_x = a + by + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{4.11}$$

$$u_y = -c\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{4.12}$$

$$u_z = 0. \tag{4.13}$$

Здесь a, b, c – заданные вещественные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x, y)$ является гармонической в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in V.$$

Выполнены равенства

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

$$\Delta u_x = 0, \qquad \Delta u_y = 0, \qquad \Delta u_z = 0.$$

Вычислим

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a + by + c\frac{\partial \varphi}{\partial y} & -c\frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -b\vec{k}.$$

Если $b \neq 0$, то $\vec{\omega} \neq 0$. Найдем векторное произведение

$$[\vec{u} \times \vec{\omega}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a + by + c\frac{\partial \varphi}{\partial y} & -c\frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = bc\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, \vec{i} + \Big(ab + b^2 y + bc\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)\, \vec{j}. \qquad (4.14)$$

Поскольку

$$\mathrm{rot}\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bc\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \Big(ab + b^2 y + bc\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

обобщенное условие Громеки–Бельтрами выполняется. Пусть точки $(1,1)$ и (x,y) принадлежат V. Соединим их кусочно-гладкой кривой γ, целиком лежащей в V. Принимая во внимание (4.14), вычислим потенциал Ψ по формуле (2.8):

$$\Psi = \int\limits_{\gamma} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds =$$

$$= \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} \left[bc\frac{\partial \varphi(x_*, y_*)}{\partial x_*}\ dx_* + \Big(ab + b^2 y_* + bc\frac{\partial \varphi(x_*, y_*)}{\partial y_*}\Big)\ dy_*\right] =$$

$$= \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} \big(ab + b^2 y_*\big) dy_* + bc \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} d\varphi(x_*, y_*) =$$

$$= ab(y-1) + \frac{b^2}{2}\Big(y^2 - 1\Big) + bc\big(\varphi(x,y) - \varphi(1,1)\big). \qquad (4.15)$$

Подстановка (4.11) – (4.13), (4.15) в формулу

$$p = \rho\Big(\Psi - \frac{\vec{u}^2}{2}\Big)$$

позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho\Big[ab(y-1) + \frac{b^2}{2}\Big(y^2 - 1\Big) + bc\big(\varphi(x,y) - \varphi(1,1)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}\Big(a + by + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 - \frac{c^2}{2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2\Big]. \qquad (4.16)$$

Набор функций (4.11) – (4.13), (4.16) образует общее точное решение стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД.

Пример 5. На полуплоскости $V = \{(x,y) : x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ определим гармоническую функцию

$$\varphi = \varphi(x,y) = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big). \qquad (4.17)$$

Для $\varphi = \varphi(x,y)$ зависимости (4.11) – (4.13) принимают вид

$$u_x = a + by + \frac{cx}{x^2 + y^2}, \qquad (4.18)$$

$$u_y = \frac{cy}{x^2 + y^2}, \tag{4.19}$$

$$u_z = 0. \tag{4.20}$$

Распределение давления p можно получить, если подставить (4.17) в (4.16). Данному решению стационарной квазигидродинамической системы отвечает функция тока

$$\psi = \psi(x, y) = ay + \frac{by^2}{2} + c\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{4.21}$$

Она связана с компонентами скорости соотношениями

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Функцию тока (4.21), порождающую решения стационарных систем Эйлера и Навье–Стокса, впервые получил Чень (H.S. Tsien) в 1943 г. (см. [7], с. 165).

Заключение

Точные решения квазигидродинамической системы можно разделить на три непересекающихся класса. Решения первого класса удовлетворяют соответствующим системам Навье–Стокса и Эйлера. Решения второго класса являются точными для системы Навье–Стокса, но не удовлетворяют уравнениям Эйлера. Наиболее труден для построения третий класс решений системы КГД, подстановка которых в системы Навье–Стокса и Эйлера не приводит к истинным равенствам. Еще одна проблема – интерпретация найденных решений. Как написано в статье [5] на с. S278, «Точное решение представляет интерес, если оно имеет физический смысл». Однако поставить эксперимент, в котором реализуются движения жидкости с экспоненциально растущим во времени давлением или с неограниченными в пространстве компонентами скорости, непросто. Это может стать предметом дальнейших исследований. Несмотря на сделанное замечание, автор работы [5] приводит подобное точное решение системы Навье–Стокса на с. S274.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[3] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[4] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[5] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension // Acta Mechanica. 1990. Vol. 81. Pp. 69–74.

[7] Wang C.Y. Exact solutions of the steady–state Navier–Stokes equations // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 23. Pp. 159–177.

[8] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[9] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[10] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[11] Шеретов Ю.В. О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

[12] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки-Бельтрами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5–18. https://doi.org/10.26456/vtpmk507

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON THE EXACT SOLUTIONS OF QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM THAT SATISFY THE GENERALIZED GROMEKI-BELTRAMI CONDITION

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TvSU.
E-mail: *Sheretov.YV@tversu.ru*

Received 27.06.2018, revised 02.09.2018.

The quasi–hydrodynamic system was proposed by the author in 1993. It has deep connections with classical Navier–Stokes equations. In this paper exact solutions of quasi–hydrodynamic system, obeying the generalized Gromeka–Beltrami condition system, are constructed. These solutions also satisfy the Navier–Stokes system and have been found previously for it in a different way. In the non-stationary case they generalize well-known Jeffrey Ingram Taylor's solution.

Keywords: Navier-Stokes and Euler systems, quasi–hydrodynamic system, exact solutions, generalized Gromeka–Beltrami condition.

Citation

Sheretov Yu.V., "On the exact solutions of quasi–hydrodynamic system that satisfy the generalized Gromeki-Beltrami condition", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 5–18. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk507

References

[1] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[2] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[3] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[4] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[5] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension", *Acta Mechanica*, **81** (1990), 69–74.

[7] Wang C.Y., "Exact solutions of the steady–state Navier–Stokes equations", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23** (1991), 159–177.

[8] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[9] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[10] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[11] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian).

[12] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.