УДК 519.2

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ И ПРЕДСКАЗУЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Круглов В.М.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 20.07.2018, после переработки 30.08.2018.

В статье предлагается новый подход к исследованию предсказуемых случайных процессов. В основе подхода лежит доказательство Дуба теоремы Долеан-Дэд о том, что в классе возрастающих случайных процессов понятия натуральности и предсказуемости совпадают. Предлагаемый подход приводит к важному обобщению известной теоремы Дуба о равномерной аппроксимации индикаторной функции. Это в свою очередь приводит к обобщению теоремы Долеан-Дэд на класс случайных процессов интегрируемой вариации.

Ключевые слова: марковские моменты, натуральные и предсказуемые случайные процессы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 58–71.
https://doi.org/10.26456/vtpmk508

1. Введение

Известная теорема Долеан-Дэд [1] утверждает, что возрастающий случайный процесс является натуральным тогда и только тогда, когда он является предсказуемым. Теорема Долеан-Дэд допускает обобщение на случайные процессы интегрируемой вариации. Известное доказательство (см. [8], стр. 112) того, что предсказуемый случайный процесс интегрируемой вариации является натуральным, основано на теории стохастического интегрирования. Прямое доказательство без обращения к теории стохастического интегрирования этого утверждения дано в [4]. Имеются два доказательства [4] и [7] того, что класс натуральных случайных процессов является частью класса предсказуемых случайных процессов интегрируемой вариации. Оба доказательства основаны на разложении Дуба-Мейера (см. [6], стр. 160) для субмартингалов. Имеется прямое доказательство, принадлежащее Дубу ([2], стр. 486-487) того, что класс натуральных возрастающих случайных процессов является частью класса предсказуемых случайных процессов. С доказательством Дуба можно также познакомиться по учебнику ([3], стр. 414-415). Ниже предлагается прямое доказательство того, что класс натуральных случайных процессов интегрируемой вариации является частью класса предсказуемых случайных процессов. Тем самым будет получено прямое доказательство того, что в классе случайных процессов интегрируемой вариации понятия натуральности и предсказуемости совпадают.

2. Необходимые сведения

Предполагается, что даны полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и расширенная, непрерывная справа фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Перечисленные условия на вероятностное пространство и фильтрацию называются *обычными условиями.* Речь пойдет только о вещественных случайных процессах. Поэтому слово *вещественный* не будет упоминаться. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется регулярным справа, если почти все его траектории непрерывны справа и имеют предел слева $\lim_{s\uparrow t} X_s = X_{t-}$ для любого $t > 0$. По определению полагают, что $X_{0-} = X_0$. Напомним важное для данной статьи понятие случайного процесса интегрируемой вариации. Пусть дан регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$. Определим *процесс вариаций* $V = \{V_t, t \geq 0\}$, положив

$$V_t = \sup \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|.$$

Точная верхняя грань вычисляется по всем возможным разбиениям $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$ сегмента $[0,t]$ и для всех $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Случайный процесс X называется *процессом интегрируемой вариации*, если $\mathbb{E}V_t < \infty$ для каждого $t \geq 0$.

Случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации называется *натуральным,* если $A_0 = 0$ п.в. (почти всюду) и выполняется равенство

$$\mathbb{E} \int_0^t Z_s \, dA_s = \mathbb{E} \int_0^t Z_{s-} \, dA_s \tag{1}$$

для любого $t > 0$ и для любого ограниченного регулярного справа $\mathbb{F}$-мартингала $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$.

Все понятия, которые будут использоваться далее, являются стандартными и могут быть найдены в [3], [5], [8], [9]. В частности, под интегралом в (1) понимается интеграл по мере Лебега-Стилтьеса, построенной по функции $A_s, 0 \leq s \leq t$. Понятие натурального случайного процесса введено Меером [6] для возрастающих случайных процессов. Более общее определение, данное выше, можно найти в книге [8]. Из определения натурального случайного процесса следует, что A имеет версию $A' = \{A'_t, t \geq 0\}$ со следующими свойствами. Все траектории непрерывны справа, в каждой точке $t > 0$ имеют предел $\lim_{s\uparrow t} A'_s = A'_{t-}$, обращаются в ноль в точке $t = 0$, для любого $t > 0$ вариация V_t функции $A'_s, 0 \leq s \leq t$, конечна. Далее предполагается, что натуральный случайный процесс A обладает всеми перечисленными свойствами.

Напомним понятие предсказуемого случайного процесса, важного для данной статьи. Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, относительно которой измеримы все непрерывные слева, $\mathbb{F}$-согласованные случайные процессы, называется предсказуемой σ-алгеброй. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется предсказуемым, если он измерим относительно $\mathcal{P}$, другими словами, если $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{P}$ для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символ $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ обозначает прямое произведение σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ всех борелевских подмножеств положительной полупрямой и σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Функция $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ называется марковским моментом (или более подробно, $\mathbb{F}$-марковским моментом), если $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}$ для любого $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Функция $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ называется предсказуемым марковским моментом (или, более подробно, $\mathbb{F}$-предсказуемым марковским моментом), если существует возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n\ge1}$ марковских моментов такая, что $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \tau$ п.в. и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\tau_n < \tau$ на множестве $\{\tau > 0\}$. Последовательность $\{\tau_n\}_{n\ge1}$ называется предвещающей для τ. Марковский момент τ называется вполне недостижимым, если $\mathbb{P}\{\sigma = \tau < \infty\} = 0$ для любого предсказуемого марковского момента σ. Марковский момент τ называется достижимым, если существует последовательность $\{\tau_n\}_{n\ge1}$ предсказуемых марковских моментов такая, что

$$\mathbb{P}\{\cup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n = \tau < \infty\}\} = \mathbb{P}\{\tau < \infty\}.$$

С каждым марковским моментом τ связаны две σ–алгебры $\mathcal{F}_\tau$ и $\mathcal{F}_{\tau-}$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ состоит из множеств $A \in \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$ таких, что $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in T$. Напомним, что $\sigma(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$ обозначает σ-алгебру, порожденную σ-алгебрами $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}_{\tau-}$ порождается множествами $A \in \mathcal{F}_0$ и $A \cap \{t < \tau\}$ с $t \ge 0$ и $A \in \mathcal{F}_t$.

3. Основные результаты

Здесь будет дано прямое доказательство, что натуральный случайный процесс интегрируемой вариации является предсказуемым. Доказательство основано на некотором обобщении теоремы Дуба о равномерной аппроксимации индикаторного процесса, построенного по произвольному вполне недостижимому марковскому моменту.

Пусть даны любой вполне недостижимый марковский момент τ и ограниченная $\mathcal{F}_\tau$-измеримая случайная величина ξ. Обозначим $[x]$ целую часть любого вещественного числа x и $\tau_n = 2^{-n}[2^n\tau]$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ разобьем положительную полупрямую $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ точками $t_{n,k} = 2^{-n}k, k \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Заметим, что для любого $t \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k), k \in \mathbb{N}$, выполняется равенство $\{\tau < t_{n,k}\} = \{\tau_n \le t\}$. Из определения условного математического ожидания следует, что

$$\int_A \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t)\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau<t_{n,k}\}}|\mathcal{F}_t)\,d\mathbb{P} = \int_A \xi I_{\{\tau<t_{n,k}\}}\,d\mathbb{P}, A \in \mathcal{F}_t.$$

Любое положительное число и, в частности, $t_{n,k}$ является предсказуемым марковским моментом. Поэтому $\mathbb{P}\{\tau = t_{n,k}\} = 0$ и, следовательно,

$$\int_A \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t)\,d\mathbb{P} = \int_A \xi I_{\{\tau\le t_{n,k}\}}\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau\le t_{n,k}\}}|\mathcal{F}_t)\,d\mathbb{P}, A \in \mathcal{F}_t.$$

Это означает, что $\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi I_{\tau\le t_{n,k}}|\mathcal{F}_t)$ п.в. для каждого $t \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)$. По известной теореме ([9], p.154) мартингал $\{\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t), t \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)\}$ имеет регулярную справа версию $X^{(n,k)} = \{X_t^{(n,k)}, t \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)\}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим регулярный справа, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \ge 0\}$, положив

$X_t^{(n)} = X_t^{(n,k)}$ для $t \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k), k \in \mathbb{N}$. Обозначим $X_t = \xi I_{\{\tau \le t\}}$. Нетрудно проверить, что регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \ge 0\}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$.

Теорема 1. *Для любого вполне недостижимого марковского момента τ и для любой ограниченной, $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величины ξ существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место равномерная сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le m} |X_t^{(n)} - \xi I_{\{\tau \le t\}}| = 0. \tag{2}$$

Доказательство. По аналогии со случайными процессами $X^{(n)} = X^{(n)}(\xi)$ и $X = X(\xi)$ можно построить случайные процессы $X^{(n)}(\xi^{\pm})$ и $X(\xi^{\pm})$ с помощью положительной ξ^+ и отрицательной ξ^- частей случайной величины ξ. Из равенств

$$X_t^{(n)}(\xi) = X_t^{(n)}(\xi^+) - X_t^{(n)}(\xi^-), X_t(\xi) = X_t(\xi^+) - X_t^{(n)}(\xi^-) \text{ п.в.}$$

для каждого $t \ge 0$ следует, что случайные процессы $X^{(n)}(\xi^+) - X^{(n)}(\xi^-)$ и $X^{(n)} = X^{(n)}(\xi)$, а также случайные процессы $X(\xi^+) - X(\xi^-)$ и $X = X(\xi)$ неотличимы. В силу неравенства

$$|X_t^{(n)} - X_t| \le |X_t^{(n)}(\xi^+) - X_t(\xi^+)| + |X_t^{(n)}(\xi^-) - X_t(\xi^-)|$$

теорему достаточно доказать для положительной случайной величины ξ. Далее предполагается, что случайная величина ξ положительна (неотрицательна). Так как $\tau_n \le \tau_{n+1} \le \tau$ и $\xi\tau_n \le \xi\tau_{n+1} \le \xi\tau$, то для каждого $t \ge 0$ выполняются неравенства

$$X_t = \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau\le t\}}|\mathcal{F}_t) \le \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_{n+1}\le t\}}|\mathcal{F}_t) = X_t^{(n+1)} \le \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t) = X_t^{(n)} \text{ п.в.}$$

Существует событие $\Omega_t \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором выполняются неравенства $X_t \le X_t^{(n+1)} \le X_t^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathbb{Q}_+$ множество всех положительных (неотрицательных) рациональных чисел. На событии $\Omega' = \cap_{t\in\mathbb{Q}_+}\Omega_t$ единичной вероятности выполняются неравенства $X_t \le X_t^{(n+1)} \le X_t^{(n)}$ для всех $t \in \mathbb{Q}_+$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. На самом деле эти неравенства выполняются для всех $t \ge 0$, так как случайные процессы $X, X^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, непрерывны справа. Чтобы доказать утверждение (2), достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ марковских моментов

$$\sigma_n = \begin{cases} \inf\{t \ge 0\colon X_t^{(n)} - X_t > \varepsilon\}, & \text{если } \sup_{t\ge0}(X_t^{(n)} - X_t) > \varepsilon, \\ \infty, & \text{если } \sup_{t\ge0}(X_t^{(n)} - X_t) \le \varepsilon, \end{cases}$$

сходится к бесконечности. Можно доказать или прочитать в ([9], p. 40), что функция $\sigma = \sigma_\varepsilon = \sup_{n\ge1}\sigma_n$ является марковским моментом. Последовательность $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ сходится к σ на событии Ω'. Так как выполнены обычные условия, то $\Omega' \in \mathcal{F}_0$. Предположим, что $\mathbb{P}\{\sigma = \infty\} = 1$. Тогда на событии $\Omega(\varepsilon) = \{\sigma = \infty\} \cap \Omega'$ выполняется утверждение

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le m} |X_t^{(n)} - X_t| \le \varepsilon.$$

Отсюда следует, что утверждение (2) выполняется на событии $\cap_{r=1}^{\infty}\Omega(1/r)$ единичной вероятности. Таким образом достаточно доказать, что

$$\mathbb{P}\{\sigma=\infty\}=1 \text{ для любого } \varepsilon>0. \tag{3}$$

Для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $\sigma_n\le\tau$ или равенство $\sigma_n=\infty$. Действительно, если $\tau<\sigma_n<\infty$, то для любого $t>\sigma$ выполняются равенства $I_{\{\tau_n\le t\}}=I_{\{\tau\le t\}}=1$ и $I_{\{\tau\le t\}}X_t^{(n)}=X_t$ и, следовательно, $\sigma_n=\infty$. Тем самым доказано, что

$$\sigma=\infty \text{ на множестве } \{\tau<\sigma\}\cap\Omega'. \tag{4}$$

Докажем, что справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} X_\sigma^{(n)}I_{\{\sigma<\infty\}}&=\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le\sigma<\infty\}}|\mathcal{F}_\sigma) \text{ п.в.},\\ X_\sigma I_{\{\sigma<\infty\}}&=\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau\le\sigma<\infty\}}|\mathcal{F}_\sigma) \text{ п.в.} \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательства обоих равенств одинаковы. Докажем, например, первое из них. По известной теореме ([9], стр. 38) существует убывающая последовательность $\{\gamma_j\}_{j\ge1}$ марковских моментов, которая сходится к σ, и каждый марковский момент γ_j принимает счетное число значений. Обозначим T_j множество значений марковского момента γ_j. Так как $\sigma\le\gamma_j$, то $\mathcal{F}_\sigma\subseteq\cap_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_{\gamma_j}$ по известной теореме ([9], p. 30). Для любых $A\in\mathcal{F}_\sigma$ и $t\in T_j$ мы имеем, что $A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\gamma_j<\infty\}\cap\{\sigma<\infty\}=A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\sigma\le t\}\in\mathcal{F}_t$ и

$$\begin{aligned} \int_A X_{\gamma_j}^{(n)}I_{\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}&=\int\limits_{A\cap\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}} X_{\gamma_j}^{(n)}\,d\mathbb{P}=\\ &=\sum_{t\in T_j}\int\limits_{A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}} X_t^{(n)}\,d\mathbb{P}=\\ &=\sum_{t\in T_j}\int\limits_{A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le t\}}|\mathcal{F}_t)\,d\mathbb{P}=\\ &=\sum_{t\in T_j}\int_{A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\xi I_{\{\tau_n\le t\}}\,d\mathbb{P}=\\ &=\sum_{t\in T_j}\int\limits_{A\cap\{\gamma_j=t\}\cap\{\gamma_j<\infty\}}\xi I_{\{\tau_n\le\gamma_j,\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}=\int_A\xi I_{\{\tau_n\le\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

С помощью теоремы об ограниченной сходимости можно убедиться, что

$$\begin{aligned} &\int_A X_\sigma^{(n)}I_{\{\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}=\lim_{j\to\infty}\int_A X_{\gamma_j}^{(n)}I_{\{\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}=\\ &=\lim_{j\to\infty}\int_A\xi I_{\{\tau_n\le\gamma_j<\infty,\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}=\int_A\xi I_{\{\tau_n\le\sigma<\infty\}}\,d\mathbb{P}=\int_A\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\le\sigma<\infty\}}|\mathcal{F}_\sigma)\,d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Равенство первого и последнего интегралов для любого $A\in\mathcal{F}_\sigma$ равносильно первому равенству (5).

Докажем, что выполняется неравенство $\sigma_n < \sigma$ п.в. на событии $\{0 < \sigma < \infty\} \cap \Omega'$. В силу (4) выполняется включение $\{0 < \sigma < \infty\} \cap \Omega' \subseteq \{\sigma \leq \tau\} \cap \Omega'$. По известной теореме ([9], p. 31) событие $\{\sigma \leq \tau\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ и событие $\{\sigma_n = \sigma\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_\sigma$. Из равенств (5) следует, что

$$\varepsilon \leq X_\sigma^{(n)} I_{\{\sigma<\infty,\sigma_n=\sigma,\sigma\leq\tau\}} - X_\sigma I_{\{\sigma<\infty,\sigma_n=\sigma,\sigma\leq\tau\}} = \\ = \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\leq\sigma<\infty\}} I_{\{\sigma_n=\sigma,\sigma\leq\tau\}} | \mathcal{F}_\sigma) - \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau\leq\sigma<\infty\}} I_{\{\sigma_n=\sigma,\sigma\leq\tau\}} | \mathcal{F}_\sigma) \to 0 \text{ п.в.}$$

при $n \to \infty$. Тем самым доказано, что событие $\Omega'' = \cup_{n=1}^\infty \{\sigma_n = \sigma, 0 < \sigma < \infty\} \cap \Omega'$ имеет нулевую вероятность и, следовательно, выполняется неравенство $\sigma_n < \sigma$ п.в. на событии $\{0 < \sigma < \infty\} \cap \Omega'$. Заметим, что $\mathbb{P}\{(\Omega \setminus \Omega') \cup \Omega''\} = 0$ и событие $\Omega''' = \cap_{n=1}^\infty \{\sigma_n < \sigma < \infty\} \cap \Omega'$ имеет единичную вероятность. Событие Ω''' принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_0$, так как выполнены обычные условия. Нетрудно проверить, что функции $\sigma'_n = \sigma_n I_{\Omega'''} + \infty I_{\Omega\setminus\Omega'''}$ и $\sigma' = \sigma I_{\Omega'''} + \infty I_{\Omega\setminus\Omega'''}$ являются марковскими моментами. На событии Ω''' выполняются равенства $\sigma = \sigma'$ и $\sigma_n = \sigma'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ и $\sigma'_n = \sigma_n < \sigma = \sigma'$ на событии Ω''', то функция σ' является предсказуемым марковским процессом с предвещающей последовательностью $\{\sigma'_n \wedge n\}_{n\geq1}$.

По предположению функция τ является вполне недостижимым марковским моментом. Поэтому $\mathbb{P}\{\{\sigma = \tau < \infty\} \cap \Omega'''\} \leq \mathbb{P}\{\sigma' = \tau < \infty\} = 0$. В полной аналогии с (5) можно доказать равенство $X_{\sigma_n}^{(n)} I_{\{\sigma_n<\infty\}} = \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\leq\sigma_n<\infty\}} | \mathcal{F}_{\sigma_n})$ п.в. Так как $\varepsilon \leq X_{\sigma_n}^{(n)} I_{\{\sigma_n<\infty\}}$ и на событии $\{\tau < \sigma\} \cap \Omega'''$ выполняется равенство $\sigma = \infty$ в силу (4), то

$$\varepsilon \mathbb{P}\{\{\sigma < \infty\} \cap \Omega'''\} \leq \varepsilon \mathbb{P}\{\{\sigma_n < \infty\} \cap \Omega'''\} \leq \mathbb{E}(X_{\sigma_n}^{(n)} I_{\{\sigma_n<\infty\}}) = \\ = \mathbb{E}(\xi I_{\{\tau_n\leq\sigma\leq\tau<\infty\}}) \to \mathbb{E}(\xi I_{\{\sigma=\tau<\infty\}}) = \mathbb{E}(\xi I_{\{\sigma'=\tau<\infty\}}) = 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Требуемое утверждение (3) и вместе с ним сама теорема доказаны. □

Теорема 2. *Пусть дан любой натуральный случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$. Для любого предсказуемого марковского момента σ случайная величина $(A_\sigma - A_{\sigma-}) I_{\{\sigma<\infty\}}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\sigma-}$.*

Доказательство. Случайный процесс $A_- = \{A_{t-}, t \geq 0\}$ является предсказуемым, так как он непрерывен слева и $\mathbb{F}$-согласован. Можно доказать или прочитать в ([5], стр. 186), что случайная величина $A_{\sigma-} I_{\{\sigma<\infty\}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Требуется доказать, что случайная величина $A_\sigma I_{\{\tau<\infty\}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\sigma-}$.

По определению натурального случайного процесса выполняется равенство (1) для любого ограниченного, регулярного справа мартингала $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$. По известной теореме ([9], стр. 169) выполняется равенство

$$\mathbb{E}(Z_t A_t) = \mathbb{E} \int_0^t Z_s dA_s \text{ для любого } t \geq 0, \tag{6}$$

если A является возрастающим случайным процессом. Упомянутое доказательство применимо также к любому случайному процессу A интегрируемой вариации.

Докажем равенства

$$\mathbb{E}(Z_\gamma A_\gamma) = \mathbb{E}\int_0^\gamma Z_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^\gamma Z_{s-} dA_s \tag{7}$$

для любого ограниченного марковского момента γ.

Предположим сначала, что марковский момент γ принимает конечное число значений $0 < t_1 < \cdots < t_r < \infty$. Докажем сначала первое равенство (7). Воспользуемся следующими равенствами

$$\int_0^\gamma Z_s dA_s = \sum_{k=1}^r I_{\{\gamma = t_k\}} \int_0^{t_k} Z_s dA_s =$$
$$= \sum_{k=1}^{r-1} (I_{\{\gamma \geq t_k\}} - I_{\{\gamma \geq t_{k+1}\}}) \int_0^{t_k} Z_s dA_s + I_{\{\gamma = t_r\}} \int_0^{t_r} Z_s dA_s =$$
$$= \int_0^{t_1} Z_s dA_s + \sum_{k=2}^r I_{\{\gamma \geq t_k\}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s dA_s.$$

Заметим, что событие $\{\gamma \geq t_k\} = \{\gamma > t_{k-1}\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$. Поэтому случайные процессы $Z^{(k)} = \{Z_s^{(k)}, s \in (t_{k-1}, t_k]\}, Z_s^{(k)} = I_{\{\gamma \geq t_k\}} Z_s, k = 2, \ldots, r$, являются регулярными справа мартингалами. С помощью равенства (6) можно убедиться, что

$$\mathbb{E}(Z_{t_k}^{(k)} A_{t_k}) - \mathbb{E}(Z_{t_{k-1}}^{(k)} A_{t_{k-1}}) = \mathbb{E}\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s^{(k)} dA_s = \mathbb{E}(I_{\{\gamma \geq t_k\}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s dA_s).$$

После сложения получится, что

$$\mathbb{E}\int_0^\gamma Z_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^{t_1} Z_s dA_s + \sum_{k=2}^r \mathbb{E}(I_{\{\gamma \geq t_k\}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s dA_s) =$$
$$= \mathbb{E}(Z_{t_1} A_{t_1}) + \sum_{k=2}^r \mathbb{E}(Z_{t_k}^{(k)} A_{t_k}) - \mathbb{E}(Z_{t_{k-1}}^{(k)} A_{t_{k-1}}) =$$
$$= \mathbb{E}(Z_{t_1} A_{t_1}) + \sum_{k=2}^r \mathbb{E}(I_{\{\gamma \geq t_k\}} (Z_{t_k} A_{t_k} - Z_{t_{k-1}} A_{t_{k-1}})) =$$
$$= \mathbb{E}\Big(Z_1 A_1 + I_{\{\gamma = t_r\}} Z_{t_r} A_{t_r} + \sum_{k=2}^{r-1} I_{\{\gamma = t_k\}} Z_{t_k} A_{t_k} - I_{\{\gamma \geq t_2\}} A_{t_1} Z_{t_1}\Big) =$$
$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^r I_{\{\gamma = t_k\}} Z_{t_k} A_{t_k}\Big) = \mathbb{E}(Z_\gamma A_\gamma).$$

Докажем второе равенство (7). Из определения мартингала $Z_s^{(k)} = I_{\{\gamma \geq t_k\}} Z_s, t_{k-1} < s \leq t_k$, следует равенство $Z_{s-}^{(k)} = I_{\{\gamma \geq t_k\}} Z_{s-}, t_{k-1} < s \leq t_k$. По определению натурального случайного процесса выполняются равенства

$$\mathbb{E}(I_{\{\gamma \geq t_k\}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s dA_s) = \mathbb{E}\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s^{(k)} dA_s = \mathbb{E}\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_{s-}^{(k)} dA_s = \mathbb{E}(I_{\{\gamma \geq t_k\}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_{s-} dA_s).$$

После сложения получится, что

$$\mathbb{E}\int_0^{\gamma} Z_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^{t_1} Z_s dA_s + \sum_{k=2}^{r} \mathbb{E}(I_{\{\gamma\geq t_k\}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_s dA_s) =$$
$$= \mathbb{E}\int_0^{t_1} Z_{s-} dA_s + \sum_{k=2}^{r} \mathbb{E}(I_{\{\gamma\geq t_k\}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} Z_{s-} dA_s) = \mathbb{E}\int_0^{\gamma} Z_{s-} dA_s.$$

Докажем равенства (7) для любого ограниченного марковского момента γ. Обозначим $[2^n\gamma+1]$ целую часть функции $2^n\gamma+1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что функция $\gamma_n = 2^{-n}[2^n\gamma+1]$ является марковским моментом с конечным числом значений, последовательность $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ убывает и сходится к γ. С помощью теоремы об ограниченной сходимости можно убедиться, что

$$\mathbb{E}(Z_\gamma A_\gamma) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_{\gamma_n} A_{\gamma_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^{\gamma_n} Z_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^{\gamma} Z_s dA_s =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^{\gamma_n} Z_s dA_s = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^{\gamma_n} Z_{s-} dA_s = \mathbb{E}\int_0^{\gamma} Z_{s-} dA_s.$$

Тем самым равенства (7) доказаны.

Докажем теорему для любого ограниченного предсказуемого марковского момента σ. Возьмем какую-нибудь предвещающую последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ для σ. По известному утверждению ([9], стр. 154-155) остановленные случайные процессы $Z^{(\sigma)} = \{Z_{\sigma\wedge t}, t\geq 0\}$ и $Z^{(\sigma_n)} = \{Z_{\sigma_n\wedge t}, t \geq 0\}$ являются регулярными справа $\mathbb{F}$-мартингалами. Обратим внимание, что $\lim_{n\to\infty} Z_t^{(\sigma_n)} = Z_{t-}^{(\sigma)}$ для любого $t\geq 0$. По известной теореме ([5], стр. 185) выполняется равенство $\mathcal{F}_{\sigma-} = \sigma(\mathcal{F}_{\sigma_n}, n\geq 1)$. Отсюда, в силу теоремы Дуба ([9], стр.128) следует, что $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|Z_t^{(\sigma_n)} - Z_{t-}^{(\sigma)}| = 0$ для любого $t \geq 0$. Это утверждение также является следствием теоремы об ограниченной сходимости. Равенства (7), применительно к мартингалу $Z^{(\sigma)} - Z^{(\sigma_n)}$ и марковскому моменту σ, принимают следующий вид

$$\mathbb{E}((Z_\sigma^{(\sigma)} - Z_\sigma^{(\sigma_n)})A_\sigma) = \mathbb{E}\int_0^{\sigma} (Z_s^{(\sigma)} - Z_s^{(\sigma_n)}) dA_s = \mathbb{E}\int_0^{\sigma} (Z_{s-}^{(\sigma)} - Z_{s-}^{(\sigma_n)}) dA_s.$$

С помощью теоремы об ограниченной сходимости можно убедиться, что

$$\mathbb{E}((Z_\sigma - Z_{\sigma-})A_\sigma) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((Z_\sigma^{(\sigma)} - Z_\sigma^{(\sigma_n)})A_\sigma) = \mathbb{E}\int_0^{\sigma} (Z_{s-}^{(\sigma)} - Z_{s-}^{(\sigma)}) dA_s = 0.$$

Пусть $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ обозначает регулярную версию мартингала $\{\mathbb{E}(I_B|\mathcal{F}_t), t\geq 0\}$ для любого $B \in \mathcal{F}_\sigma$. По известной теореме ([9], стр. 136) выполняются равенства $Z_\sigma = \mathbb{E}(I_B|\mathcal{F}_\sigma)$ и $Z_{\sigma-} = \mathbb{E}(I_B|\mathcal{F}_{\sigma-})$ п.в. Можно доказать или прочитать в ([9], стр. 44), что случайная величина A_σ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_\sigma$. Отсюда следует, что $\mathbb{E}(Z_\sigma A_\sigma) = \mathbb{E}\mathbb{E}(I_B|\mathcal{F}_\sigma)A_\sigma)) = \mathbb{E}(I_B A_\sigma)$. Так как $(\mathbb{E}Z_{\sigma-}A_\sigma) = \mathbb{E}\mathbb{E}(I_B|\mathcal{F}_{\sigma-})A_\sigma) = \mathbb{E}(I_B\mathbb{E}(A_\sigma|\mathcal{F}_{\sigma-}))$, то

$$\mathbb{E}(I_B(A_\sigma - \mathbb{E}(A_\sigma|\mathcal{F}_{\sigma-}))) = \mathbb{E}((Z_\sigma - Z_{\sigma-})A_\sigma) = 0$$

для любого $B \in \mathcal{F}_\sigma$ и, следовательно, $A_\sigma = \mathbb{E}(A_\sigma|\mathcal{F}_{\sigma-})$ п.в. Так как выполнены обычные условия и условное математическое ожидание $\mathbb{E}(A_\sigma|\mathcal{F}_{\sigma-})$ является $\mathcal{F}_{\sigma-}$-измеримой функцией, то случайная величина A_σ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\sigma-}$.

Докажем теорему в общем случае. Пусть дан любой предсказуемый марковский момент σ. Нетрудно проверить, что функция σ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Поэтому $\{\sigma < \infty\} \in \mathcal{F}_{\sigma-}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\sigma \wedge n$ является ограниченным предсказуемым марковским моментом. По доказанному выше случайная величина $A_{\sigma\wedge n}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{(\sigma\wedge n)-} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma-}$. Случайная величина $A_\sigma I_{\{\sigma<\infty\}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\sigma-}$, так как является пределом последовательности $\{A_{\sigma\wedge n} I_{\{\tau<\infty\}}\}_{n\geq 1}$ функций, измеримых относительно $\mathcal{F}_{\sigma-}$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Любой натуральный случайный процесс является предсказуемым.*

Доказательство. Пусть дан любой натуральный случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$. Возьмем любой вполне недостижимый марковский момент τ и любую ограниченную $\mathcal{F}_\tau$-измеримую случайную величину ξ. Определим случайные процессы $X = \{X_t, t \geq 0\}$ и $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \geq 0\}$, о которых говорится в теореме 1. Напомним, что для любых $n, k \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(n)} = X^{(n,k)} = \{X_t^{(n,k}, t \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})\}\}$ является ограниченной, регулярной справа версией мартингала $\{\mathbb{E}(\xi I_{\{\tau\leq k2^{-n}\}}|\mathcal{F}_t), t \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})\}\}$.

По определению (1) натурального случайного процесса для любого $t = m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}\int_0^m X_t^{(n)}\, dA_t = \mathbb{E}\int_0^m X_{t-}^{(n)}\, dA_t.$$

В силу утверждения (2) выполняется равенство

$$\mathbb{E}\int_0^m X_t\, dA_t = \mathbb{E}\int_0^m X_{t-}\, dA_t. \tag{8}$$

Случайный процесс $X_t - X_{t-} = \xi(I_{\{\tau\leq t\}} - I_{\{\tau<t\}}), 0 \leq t \leq m$, может иметь единственный скачек в точке $\tau \wedge m$. Равенство (8) влечет равенство $\mathbb{E}(\xi(A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-})) = 0$. Можно доказать или прочитать в ([9], p. 41), что случайная величина $\xi = (A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-})/(1+|A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-}|^2)$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_\tau$. Для этой случайной величины выполняются равенства

$$\mathbb{E}\frac{|A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-}|^2}{1+|A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-}|^2} = 0, |A_{\tau\wedge m} - A_{(\tau\wedge m)-}| = 0 \text{ п.в.}$$

Отсюда, в свою очередь, следует равенство $|A_\tau - A_{\tau-}| = 0$ п.в. на событии $\{\tau < \infty\}$.

Для любых чисел $c > 0$ и $d > 0$ функция $\tau_{c,d} = \inf\{t \geq c\colon |A_t - A_c| \geq d\}\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ является марковским моментом. Обозначим $\mathbb{Q}_0$ множество всех строго положительных рациональных чисел. Докажем, что все точки разрыва траекторий случайного процесса A являются значениями марковских моментов $\tau_{c,d}, c, d \in \mathbb{Q}_0$. Пусть $s > 0$ является точкой разрыва некоторой траектории $A_t(\omega)$, $t \geq 0$. Найдется $d \in \mathbb{Q}_0$ такое, что $|A_s(\omega) - A_{s-}(\omega)| \geq 2d$. Найдется строго возрастающая последовательность $\{c_n\}_{n\geq 1}$ чисел из $\mathbb{Q}_0$, которая сходится к s. Так как $\lim_{n\to\infty} A_{c_n}(\omega) = A_{s-}(\omega)$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| < d/2$ для всех $c_{n_0} \leq s' < s$ и $|A_s(\omega) - A_{c_{n_0}}(\omega)| \geq d$. Отсюда следует, что

$$|A_{s'}(\omega) - A_{c_{n_0}}(\omega)| \leq |A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| + |A_{s-}(\omega) - A_{c_{n_0}}(\omega)| < d$$

и, следовательно, $s = \tau_{c_{n_0},d}(\omega)$. С другой стороны, если $A_{\tau_{c,d}}(\omega) - A_{\tau_{c,d}-}(\omega) > 0$ для некоторого $\omega \in \Omega$, то точка $\tau_{c,d}(\omega)$ является точкой разрыва траектории $A_t(\omega), t \geq 0$. На самом деле все точки разрыва всех траекторий случайного процесса A являются значениями некоторых ограниченных марковских моментов $\tau_{c,d} \wedge \gamma, c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0$. Действительно, любая точка разрыва $s \in \mathbb{R}_+$ любой траектории $A_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega$, является значением некоторого марковского момента $\tau_{c,d}$ и следовательно, является значением ограниченного марковского момента $\tau_{c,d} \wedge \gamma$ для любого $\gamma \in \mathbb{Q}_0, \gamma > s$.

По известной теореме ([5], стр. 189) для любых $c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0$ найдутся достижимый марковский момент $\sigma_{c,d,\gamma}$ и вполне недостижимый марковский момент $\kappa_{c,d,\gamma}$ такие, что выполняется равенство $\tau_{c,d,\gamma} = \sigma_{c,d,\gamma} \wedge \kappa_{c,d,\gamma}$ на некотором событии $\Omega_{c,d,\gamma} \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. По доказанному выше для любых $c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0$ выполняется равенство $A_{\kappa_{c,d,\gamma}} - A_{\kappa_{c,d,\gamma}-} = 0$ на некотором событии $\Omega'_{c,d,\gamma} \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Пересечение $\Omega' = \cap_{c,d,\gamma\in\mathbb{Q}_0}(\Omega_{c,d,\gamma} \cap \Omega'_{c,d,\gamma})$ счетного числа указанных событий является событием единичной вероятности. По доказанному выше все точки разрыва всех траекторий $A_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega'$, являются значениями некоторых ограниченных марковских моментов $\tau_{c,d} \wedge \gamma, c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0$. На событии Ω' выполняется равенство $A_{\kappa_{c,d,\gamma}} - A_{\kappa_{c,d,\gamma}-} = 0$. Поэтому все точки разрыва всех траекторий $A_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega'$, являются значениями некоторых ограниченных достижимых марковских моментов $\sigma_{c,d,\gamma}, c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0$. Для каждого ограниченного достижимого марковского момента $\sigma_{c,d,\gamma}$ найдется последовательность предсказуемых марковских моментов $\{\sigma_{c,d,\gamma,n}\}_{n\geq 1}$ такая, что

$$\mathbb{P}\{\cup_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{c,d,\gamma,n} = \sigma_{c,d,\gamma}\}\} = \mathbb{P}\{\sigma_{c,d,\gamma} < \infty\} = 1.$$

Счетное число марковских моментов $\sigma_{c,d,\gamma,n}, c, d, \gamma \in \mathbb{Q}_0, n \in \mathbb{N}$, можно записать в виде последовательности $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$. Напомним, что множество $[[\sigma_n]] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon t = \sigma_n(\sigma)\}$ называется графиком марковского момента σ_n. Можно считать, что $[[\sigma_n]] \cap [[\sigma_m]] = \varnothing$ для любых $n \neq m$. В противном случае вместо $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ можно построить (см. [5], стр. 188) последовательность $\{\sigma'_n\}_{n\geq 1}$ предсказуемых марковских моментов такую, что $\cup_{n=1}^{\infty}[[\sigma_n]] = \cup_{n=1}^{\infty}[[\sigma'_n]]$ и $[[\sigma'_n]] \cap [[\sigma'_m]] = \varnothing$ для любых $n \neq m$. Заметим, что $\Delta = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega' \colon |A_t(\omega) - A_{t-}(\omega)| > 0\} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}[[\sigma_n]]$. Напомним, что $A_{0-} = A_0$ по определению.

Каждая траектория $A_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega$, имеет не более счетного числа точек разрыва. Будем считать, ради удобства записи, что имеется счетное число $t_n = t_n(\omega), n \in \mathbb{N}$, точек разрыва. Обозначим $S_t = \sum_{t_n \leq t}(A_{t_n} - A_{t_n-}), t \geq 0$, сумму скачков. Разность $A - S = \{A_t - S_t, t \geq 0\}$ является непрерывным случайным процессом. Ниже будет доказано, что S является предсказуемым случайным процессом. Тогда разность $A - S$, будучи непрерывным, $\mathbb{F}$-согласованным случайным процессом, будет предсказуемым случайным процессом. Отсюда, в силу равенства $A = S + (A - S)$, следует, что A является предсказуемым случайным процессом.

Докажем, что $S = \{S_t, t \geq 0\}$ является предсказуемым случайным процессом. Заметим, что $S_0 = 0$. Для любого $t > 0$ функция $S_t \colon \Omega \to \mathbb{R}$ является пределом последовательности $\{S_t^{(k)}\}_{k\geq 1}$ функций $S_t^{(k)} = \sum_{t_n \leq t}(A_{t_n} - A_{t_n-})I_{\{|A_{t_n} - A_{t_n-}| > 1/k\}} \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Достаточно доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ семейство функций $S^{(k)} = \{S_t^{(k)}, t \geq 0\}$ является предсказуемым случайным процессом. По доказанному выше для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega'$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t_n(\omega) = \sigma_m(\omega)$. Напомним, что графики $[[\sigma_n]], n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Поэтому выполняется равенство $S_t^{(k)}(\omega) = Y_t^{(k)}(\omega)$ для всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega'$, где $Y_t^{(k)} = \sum_{\sigma_n \le t}(A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -})I_{\{|A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -}|>1/k\}}$. Ниже будет доказано, что $Y^{(k)} = \{Y_t^{(k)}, t \ge 0\}$ является предсказуемым случайным процессом. Отсюда следует, так как выполнены обычные условия, что $S^{(k)}$ является предсказуемым случайным процессом. Случайный процесс $Y^{(k)}$ является суммой случайных процессов $Y^{(k,n)} = \{(A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -})I_{\{|A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -}|>1/k\}}I_{\{\sigma_n \le t\}}, t \ge 0\}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Достаточно доказать, что все они являются предсказуемыми случайными процессами. По теореме 2 случайная величина $\eta = (A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -})I_{\{|A_{\sigma_n} - A_{\sigma_n -}|>1/k\}}I_{\{\sigma_n < \infty\}}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\sigma_n -}$. Можно доказать или прочитать в ([3], стр. 411), что случайный процесс $Y_t^{(n,k)} = \eta I_{\{\sigma_n \le t\}}, t \ge 0$, является предсказуемым. Теорема доказана. $\square$

Заключение

В статье предлагается новый подход к исследованию предсказуемых случайных процессов. В частности дано обобщение известной теоремы Дуба об аппроксимации индикаторной функции. В рамках нового подхода дано обобщение теоремы Долеан-Дэд о том, что в классе возрастающих случайных процессов понятия натуральности и предсказуемости совпадают, на класс случайных процессов с интегрируемой вариацией.

Список литературы

[1] Doleans-Dade C. Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables // Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie A-B. 1967. Vol. 264. Pp. 874–876.

[2] Doob J.L. Classical potential theory and its probabilistic counterpart. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1984. 834 p.

[3] Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. New York: Springer-Verlag, 1997. 523 p.

[4] Kruglov V.M. On natural and predictable processes. // Sankhya. Series A. Mathematical Statistics and Probability. 2016. Vol. 78. Part 1. Pp. 43–51.

[5] Medvegyev P. Stochastic Integration Theory. Oxford: Oxford University Press, 2007. 607 p.

[6] Meyer P.A. Probability and potentials. Waltham: Blaisdell Pub. Co., 1966. 324 p.

[7] O'Cinneide C., Protter Ph. An elementary approach to naturality, predictability, and the fundamental theorem of local martingales // Stochastic Models. 2001. Vol. 17. Pp. 449–458.

[8] Protter Ph.E. Stochastic integration and differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 415 p.

[9] Yex J. Martingales and Stochastic Analysis. World Scientific, 1995. 501 p.

Образец цитирования

Круглов В.М. Об эквивалентности натуральных и предсказуемых случайных процессов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 58–71. https://doi.org/10.26456/vtpmk508

Сведения об авторах

1. **Круглов Виктор Макарович**
профессор кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ.

ON EQUIVALENCE OF PREDICTABLE AND NATURAL STOCHASTIC PROCESSES

Kruglov Victor Makarovich
Professor of Mathematical Statistics department,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.

Received 20.07.2018, revised 30.08.2018.

A new approach to study of predictable stochastic processes is suggested. This approach is based on the Doob proof of the Doleans-Dad theorem about equivalence of increasing predictable and natural stochastic processes. A generalization of the Doob theorem about uniform approximation of an indicator function is proved. With the help of this degeralization it is proved that the Doleans-Dad theorem is valid fot stochastic processes with integrable variation.

Keywords: markov moments (stopping times), natural processes, predictable stochastic processes.

Citation

Kruglov V.M., "On equivalence of predictable and natural stochastic processes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 58–71. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk508

References

[1] Doleans-Dade C., "Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables", *Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie A-B*, **264** (1967), 874–876.

[2] Doob J.L., *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984, 834 pp.

[3] Kallenberg O., *Foundations of Modern Probability*, Springer-Verlag, New York, 1997, 523 pp.

[4] Kruglov V.M., "On natural and predictable processes.", *Sankhya. Series A. Mathematical Statistics and Probability*, **78**, Part 1 (2016), 43–51.

[5] Medvegyev P., *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2007, 607 pp.

[6] Meyer P.A., *Probability and potentials*, Blaisdell Pub. Co., Waltham, 1966, 324 pp.

[7] O'Cinneide C., Protter Ph., "An elementary approach to naturality, predictability, and the fundamental theorem of local martingales", *Stochastic Models*, **17** (2001), 449–458.

[8] Protter Ph.E., *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 415 pp.

[9] Yex J., *Martingales and Stochastic Analysis*, World Scientific, 1995, 501 pp.