УДК 510.227, 510.624

О ГРАНИЦАХ ТРАНСФИНИТНОГО ПОСТРОЕНИЯ ИНФЛЯЦИОННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Дудаков С.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.08.2018, после переработки 24.09.2018.

В работе показано, что если универсум допускает существование оператора инфляционной неподвижной точки, который не вычисляется за конечное число шагов, то существуют операторы инфляционной неподвижной точки, требующие для своего трансфинитного построения произвольного числа шагов вплоть до ординала ω^ω в любом универсуме. Для дискретного порядка продемонстрирована возможность построения за произвольное число шагов.

Ключевые слова: инфляционная неподвижная точка, дискретный порядок, трансфинитное построение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 72–80.
https://doi.org/10.26456/vtpmk510

Введение

Итеративные операторы находят широкое применение в теоретических исследованиях логических языков, а также — на практике. Практическое их использование обусловлено тем, что те или иные их разновидности включены в современные языки запросов к базам данных, прежде всего — SQL.

Классический язык математической логики был первоначально базовым для реализации языков запросов. Традиция использования этих языков восходит к Кодду [4, 5]. Однако, он является неполным для конечных систем, поэтому многие, даже простые, свойства конечных систем не могут быть с помощью таких языков выражены. Некоторые результаты об этой неполноте можно найти в [1, 3, 11], например, транзитивное замыкание графа и чётность невыразимы. Это и является основной причиной обогащения языков и выхода за пределы логики первого порядка. Одно из современных расширений языка SQL — рекурсивные запросы, которые в точности семантически соответствуют итеративному оператору инфляционной неподвижной точки (IFP-оператору, см. [12]).

Другой особенностью языков запросов является возможность одновременного использования как таблиц баз данных, так и отношений (в том числе — функций) универсума, из которого выбираются элементы таблиц базы данных. Например, в качестве таких отношений используются сравнения чисел и строк, арифметические операции, конкатенация и т.д. С математической точки зрения такая возможность является вложением конечной системы (базы данных) в бесконечный универсум с последующим применением в формулах имён отношений и того, и другого (см. [2, 13]).

При применении IFP-оператора к вложенным в бесконечный универсум системам легко может оказаться, что его вычисление окажется невозможным за конечное число шагов. На самом деле, даже функции следования достаточно для того, чтобы количество шагов оказалось бесконечным. С практической точки зрения это означает потенциальную опасность применения IFP-оператора, так как может привести к зацикливанию процедуры вычисления результата запроса (см. [6–9]).

Теоретически однако, вычисление IFP-оператора можно продолжить трансфинитно, что рано или поздно должно привести к стабилизации процесса и нахождению неподвижной точки. Вопрос о точном числе шагов, которое необходимо для построения инфляционной неподвижной точки был поставлен Л.Д.Беклемишевым при обсуждении [10].

В настоящей работе мы даём некоторые ответы на поставленный вопрос. Мы показываем два основных результата. Во-первых — в элементарно эквивалентных универсумах это количество может отличаться друг от друга. И второе — если это количество бесконечно, то существуют IFP-операторы, которые в любом элементарно эквивалентном универсуме требуют для своего вычисления как минимум ω^ω шагов. Здесь и далее во всей работе подразумевается ординальная степень:

$$\alpha^0 = 1; \quad \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \times \alpha; \quad \alpha^\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \alpha^\beta$$

для предельных γ.

1. Инфляционная неподвижная точка

Мы используем обычные определения формулы логики первого порядка и ее значения (см., например, [14]). Строка $\phi(\bar{x})$ означает, что формула ϕ не содержит никаких свободных переменных, кроме, может быть, $\bar{x}$. В этом случае строка $\phi(\bar{t})$ означает результат замены переменных $\bar{x}$ термами $\bar{t}$ соответственно. Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, а $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ — набор элементов ее носителя, то $\phi(\bar{a})$ — это значение формулы ϕ, когда значения переменных $\bar{x}$ равны $\bar{a}$ соответственно.

Мы рассматриваем обогащение языка логики первого порядка оператором инфляционной неподвижной точки.

Определение 1 (см. [12]). *Формулой* IFP*-логики называется формула, построенная по правилам логики первого порядка, а также с помощью оператора инфляционной неподвижной точки* IFP*: если $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, то* $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\phi)$ *— формула исходной сигнатуры со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$.*

Семантика атомных формул, булевых связок и кванторов определяется как в логике первого порядка.

Определение 2 (см. [12]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, $\phi(\bar{x},\bar{y})$ — формула, с новым предикатным символом Q, m — количество элементов набора $\bar{y}$. Зафиксируем значение переменных $\bar{x}$ — $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$.* Инфляционной неподвижной точкой $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\phi)(\bar{a})$ *называется множество $Q_*^{\bar{a}}$ построенное следующим образом. Для каждого ординала α определим множество $Q_\alpha^{\bar{a}}$ следующим образом:*

$$Q_0^{\bar{a}} = \emptyset; \quad Q_{\alpha+1}^{\bar{a}} = Q_i^{\bar{a}} \cup \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| : (\mathfrak{A}, Q_\alpha^{\bar{a}}) \models \phi(\bar{a},\bar{y})\}; \quad Q_\alpha^{\bar{a}} = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta^{\bar{a}}, \tag{1}$$

последнее — для предельных α.

Если $Q_\alpha^{\bar{a}} = Q_{\alpha+1}^{\bar{a}}$ для некоторого α, то полагаем $Q_*^{\bar{a}} = Q_n^{\bar{a}}$. Про наименьшее α, удовлетворяющее такому условию, будем говорить, что оператор $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\phi)(\bar{a})$ *трансфинитно* сходится за α шагов. *В этом случае считаем формулу* $\mathrm{IFP}_{Q(\bar{y})}(\phi)(\bar{a},\bar{y})$ *истинной, если $\bar{y} \in Q_*^{\bar{a}}$, и ложной, при $\bar{y} \notin Q_*^{\bar{a}}$.*

2. IFP-операторы для дискретного порядка

Рассмотрим теорию дискретных линейных порядков, неограниченных в обе стороны. В качестве символов отношений будем применять $<$ для строгого и $\leq$ для нестрогого порядка, пользуясь тем, что они определимы друг через друга.

Теорема 1. *Существует IFP-оператор ϕ такой, что для каждого бесконечного ординала α существует универсум элементарно эквивалентный $(\mathbb{Z}, \leq)$, в котором ϕ сходится в точности за α шагов.*

Доказательство. Как известно, любой универсум, элементарно эквивалентный $(\mathbb{Z}, \leq)$, изоморфен $(A \times \mathbb{Z}, \leq^*)$, где $(A, \leq)$ — произвольное линейно упорядоченное множество, а $\leq^*$ — лексикографический порядок на $A \times \mathbb{Z}$. Поэтому без ограничения общности будем строить IFP-оператор для пар из $A \times \mathbb{Z}$.

С помощью дискретного порядка на $\mathbb{Z}$ можно определить функции следования s и предшествования d, поэтому следующий IFP-оператор будет определять такое отношение: «пары u_1 и u_2 имеют один и тот же первый элемент»

$$\psi(u_1,u_2) \equiv \mathrm{IFP}_{Q(u_2)}(u_1 = u_2 \vee Q(s(u_2)) \vee Q(d(u_2))).$$

Рассмотрим теперь универсум вида $(\alpha \times \mathbb{Z}, \leq^*)$, где α — произвольный ординал. Для начала определим множество элементов $0 \times \mathbb{Z}$:

$$O(x) \equiv \neg(\exists v)(v \leq^* x \wedge \neg\psi(x,v)).$$

Далее определим отношение $S(u_1,u_2)$ означающее, что в паре $u_1 = (a_1, z_1)$, $u_2 = (a_2, z_2)$ и $a_2 = a_1 + 1$:

$$S(u_1,u_2) \equiv u_1 \leq^* u_2 \wedge \neg\psi(u_1,u_2) \wedge (\forall u)(u_1 \leq^* u \wedge u \leq^* u_2 \to \psi(u_1,u) \vee \psi(u_2,u))$$

Наконец, построим IFP-оператор ϕ, который после выполнения β шагов будет включать в себя всевозможные элементы из $\gamma \times \mathbb{Z}$ для $\gamma < \beta$:

$$\phi(x) \equiv \mathrm{IFP}_{Q(x)}(O(x) \vee (\exists y)(Q(y) \wedge S(y,x)) \vee (\forall y <^* x)Q(y)).$$

$\square$

3. IFP-операторы, не сходящиеся за конечное число шагов

Сейчас рассмотрим произвольный универсум, в котором существует IFP-оператор, не сходящийся за конечное число шагов.

Теорема 2. *Допустим, что в некоторой модели теории T существует* IFP-*оператор, который не сходится за конечное число шагов. Тогда существует* IFP-*формула, определяющая в любой модели теории T некоторый предпорядок, начальный сегмент которого изоморфен множеству натуральных чисел ω.*

Доказательство. Рассмотрим IFP-оператор $\psi = \mathrm{IFP}^{\bar{a}}_{Q(\bar{y})}(\phi)$ для формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, который не сходится за конечное число шагов. Строим формулу $\theta(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, означающую, что $\bar{y}_1$ попал в ψ раньше $\bar{y}_2$:

$$\theta = \mathrm{IFP}_{P(\bar{y}_1, \bar{y}_2)}\,(P'(\bar{y}_1) \wedge \phi'(\bar{x}, \bar{y}_2) \wedge \neg P'(\bar{y}_2))$$

Здесь $P'(\bar{y})$ — это формула $(\exists \bar{y}')(P(\bar{y}, \bar{y}') \vee P(\bar{y}', \bar{y}))$, а ϕ' — результат замены в ϕ всех подформул вида $Q(\bar{z})$ на соответствующие $P'(\bar{z})$.

Тогда $\theta(\bar{a}, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ определяет некоторый тотальный предпорядок $<$, который продуцирует дискретный линейный порядок на классах эквивалентности ($\bar{b}_1 \equiv \bar{b}_2$, если $\bar{b}_1 \leq \bar{b}_2 \leq \bar{b}_1$). □

Теорема 3. *Пусть в теории T определим некоторый предпорядок $\leq$, начальный сегмент Ω которого изоморфен множеству натуральных чисел. Тогда существует* IFP-*оператор ϕ, который сходится в точности за ω^ω шагов при трансфинитном построении.*

Доказательство. С помощью $\approx$ обозначаем индуцируемое предпорядком отношение эквивалентности, фактор-отношение по которому превращает $\leq$ в нестрогий порядок:

$$x \approx y \equiv x \leq y \wedge y \leq x.$$

Знак $<$ рассматриваем как сокращение:

$$x < y \equiv x \leq y \wedge \neg x \approx y.$$

Пусть S — определяемое предпорядком $<$ отношение следования:

$$S(x, y) \equiv x < y \wedge \neg(\exists z)(x < z \wedge z < y).$$

Зафиксируем множество минимальных элементов нашего предпорядка, будем обозначать его O:

$$O(x) \equiv \neg(\exists y) y < x.$$

Заметим, что само Ω определимо:

$$x \in \Omega \equiv \mathrm{IFP}_{Q(x)}(O(x) \vee (\exists y)(Q(y) \wedge S(y, x))).$$

Все нижеследующие формулы мы предполагаем Ω-ограниченными.

С помощью S на Ω можно традиционным методом определить обычные операции сложения и умножения:

$$x + y = z \equiv \mathrm{IFP}_{Q(x,y,z)}(O(y) \wedge z \approx x \vee \\ \vee (\exists y', z')(S(y', y) \wedge S(z', z) \wedge Q(x, y', z')));$$

$$x \times y = z \equiv \mathrm{IFP}_{Q(x,y,z)}(O(y) \wedge O(z) \vee \\ \vee (\exists y', z')(S(y', y) \wedge z' + x \approx z) \wedge Q(x, y', z'))).$$

Используя сложение и умножение можно представить на Ω любую общерекурсивную функцию, в частности, возведение в степень x^y и нахождение i-ого по порядку простого числа $p(i)$, которыми мы далее будем пользоваться.

Если говорить неформально, то искомый IFP-оператор будет вычисляться следующим образом. В начале полагаем $Q = \{0, 1\}$. Далее на каждом шаге происходит следующее. Для каждого ненулевого $n \in Q$ выполнено $n = r(n)^k$ для какого-то простого $r(n)$. Найдём такое n_0, что $r(n_0)^{n_0} \notin Q$ и при этом $r(n_0)$ является наименьшим возможным. После этого добавим к Q число $r(n_0)^{n_0}$ и все числа $p_i^{r(n_0)^{n_0}}$ для простых $p_i < r(n_0)$.

Построим формулы, определяющие описанные отношения:

$$R(r, n) \equiv Q(n) \wedge (\exists k)(\exists u)(n = p(k)^u \wedge r \approx p(k));$$

$$N_0(n) \equiv (\exists r)(R(r, n) \wedge \neg Q(r^n) \wedge \neg(\exists r')(\exists n')(r' < r \wedge R(r', n') \wedge \neg Q({r'}^{n'})));$$

$$\phi = \mathrm{IFP}_{Q(x)} \Big(O(x) \vee (\exists y)(O(y) \wedge S(y, x)) \vee \\ \vee (\exists r)(\exists n)\Big(N_0(n) \wedge R(r, n) \wedge \Big(x \approx r^n \vee (\exists i)\Big(p(i) < r \wedge x \approx p(i)^{r^n}\Big)\Big)\Big)\Big).$$

Покажем, что IFP-оператор ϕ трансфинитно сходится на ω^ω шагов. Любой ординал $\alpha < \omega^\omega$ однозначно представляется в виде

$$\alpha = \sum_{i=\infty}^{0} \omega^i \times m_i,$$

где m_i — натуральные числа, из которых только конечно много не равны нулю. Здесь мы полагаем $\omega^0 = 1$. Суммирование и умножение выполняются по правилам ординальной арифметики, в частности, они не коммутативны, поэтому порядок сложения и умножения должен быть именно таким.

Нетрудно видеть, что при увеличении m_i в множество Q_α добавляется новая степень простого числа p_i, а также — новые степени всех меньших простых чисел. Этот процесс будет продолжаться для всех $\alpha < \omega^\omega$. После шага ω^ω очередное n_0 в Ω найти не удастся, поэтому процесс остановится. □

Теорема 4. *Пусть в теории T определим некоторый предпорядок $<$, начальный сегмент которого изоморфен множеству натуральных чисел. Тогда для любого ординала α меньшего ω^ω существует* IFP*-оператор ϕ_α, которая сходится в точности за α шагов при трансфинитном построении.*

Доказательство. Каждый ординал α меньший ω^ω может быть представлен в виде суммы вида

$$\alpha = \sum_{i=n}^{0} \omega^i \times m_i,$$

в которой m_i — натуральные числа.

Обозначим с помощью $H_x(i, y)$ функцию гиперэкспоненты:

$$H_x(0, y) = y; \quad H_x(i+1, y) = x^{H_x(i,y)}.$$

Пусть

$$a_n = H_{p_n}(m_n, 1); \quad a_i = H_{p_i}(m_i, a_{i+1})$$

при $i < n$. Тогда в последнюю часть формулы ϕ достаточно добавить условие $\neg \bigwedge_{i=0}^{n} Q(a_i)$, чтобы остановить вычисление IFP-оператора в точности после α шагов.

□

Заключение

Очевидно, что с помощью конструкции, предложенной в теореме 3, можно построить IFP-операторы, которые будут сходится за большее чем ω^ω число шагов, например, $\omega^\omega \times i$ для любого натурального i. Возникает естественный вопрос, насколько сильно можно раздвинуть эту границу, в частности, можно ли построить IFP-оператор, который сходится за ϵ_0 шагов?

Список литературы

[1] Aho A.V., Ullman J.D. Universality of data retrieval languages // Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages. 1979. Pp. 110-120.

[2] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems. 1996. Pp. 5-16.

[3] Chandra A., Harel D. Computable queries for relational databases // Journal of Computer and System Sciences. 1980. Vol. 21, № 2. Pp. 156–178.

[4] Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Communications of the ACM. 1970. Vol. 13. Pp. 377–387.

[5] Codd E.F. Relational completeness of data base sublanguages // Database Systems. Ed. by R. Rustin. Prentice-Hall, 1972. Pp. 33-64.

[6] Дудаков С.М. О безопасности рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 4 (27). С. 71–80.

[7] Дудаков С.М. О безопасности IFP-операторов и рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 2 (29). С. 5–13.

[8] Дудаков С.М. Сильная минимальность и IFP-безопасность // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 25–32.

[9] Dudakov S.M. On inflationary fix-point operators safety // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, № 4. Pp. 328–331.

[10] Дудаков С.М. Использование итеративных операторов в классических логических теориях // Сборник материалов Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 21–24 марта 2018 г.). Иваново: Изд-во ИвГУ. С. 145-147.

[11] Дудаков С.М., Тайцлин М.А. Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных // Успехи математических наук. 2006. Т. 61, № 2 (368). С. 2–65.

[12] Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. № 32. Pp. 265–280.

[13] Kanellakis P., Kuper G., Revesz P. Constraint query languages // Journal of Computer and System Sciences. 1995. Vol. 51. Pp. 26–52.

[14] Marker D. Model theory: an introduction. New York: Springer-Verlag, 2002. 342 p.

Образец цитирования

Дудаков С.М. О границах трансфинитного построения инфляционной неподвижной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 72–80. https://doi.org/10.26456/vtpmk510

Сведения об авторах

1. **Дудаков Сергей Михайлович**
заведующий кафедрой информатики Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: *sergeydudakov@yandex.ru*

ON BOUND OF TRANSFINITE CONSTRUCTION OF INFLATIONARY FIXED POINT

Dudakov Sergey Mikhailovich
Head of Computer Science Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

Received 20.08.2018, revised 24.09.2018.

We consider inflationary fixed point operators which are not computable in finitely many steps. In this case we prove that for any ordinal $\alpha \leq \omega^\omega$ there exists an IFP-operator converging exactly in α steps. For discrete order there exists an IFP-operator which can converge exactly in α steps for any ordinal α.

Keywords: inflationary fixed point, discrete order, transfinite construction.

Citation

Dudakov S.M., “On bound of transfinite construction of inflationary fixed point”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 72–80. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk510

References

[1] Aho A.V., Ullman J.D., “Universality of data retrieval languages”, *Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages*, 1979, 110–120.

[2] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L., “Relational expressive power of constraint query languages”, *Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems*, 1996, 5–16.

[3] Chandra A., Harel D., “Computable queries for relational databases”, *Journal of Computer and System Sciences*, **21**:2 (1980), 156–178.

[4] Codd E.F., “A relational model for large shared data banks”, *Communications of the ACM*, **13** (1970), 377–387.

[5] Codd E.F., “Relational completeness of data base sublanguages”, *Database Systems*, ed. R. Rustin, Prentice-Hall, 1972, 33–64.

[6] Dudakov S.M., “On safety of recursive queries”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2012, № 4 (27), 71–80 (in Russian).

[7] Dudakov S.M., "On safety of IFP-operators and recursive queries", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2013, № 2 (29), 5–13 (in Russian).

[8] Dudakov S.M., "Strong minimality and IFP-safety", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 3, 25–32 (in Russian).

[9] Dudakov S.M., "On inflationary fix-point operators safety", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**:4 (2015), 328–331.

[10] Dudakov S.M., "Iterative operators in classic theories", *Sbornik materialov vserossiyskoy konferentsii Algebra i Teoriya Algoritmov [Proceedings of Conference Algebra and Algorithm Theory]* (Ivanovo, 2018), IvSU Publ., Ivanono, 145–147 (in Russian).

[11] Dudakov S.M., Taitslin M.A., "Collapse results for query languages in database theory", *Russian Mathematical Surveys*, **61**:2 (2006), 195–253.

[12] Gurevich Y., Shelah S., "Fixed-point extensions of first-order logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986, № 32, 265–280.

[13] Kanellakis P., Kuper G., Revesz P., "Constraint query languages", *Journal of Computer and System Sciences*, **51** (1995), 26–52.

[14] Marker D., *Model theory: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002, 342 pp.