УДК 510.52, 510.643

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ НЕНОРМАЛЬНЫХ И КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ ЛОГИК ПЕРВОПОРЯДКОВО ОПРЕДЕЛИМЫХ КЛАССОВ ШКАЛ КРИПКЕ[1]

Рыбаков М.Н.
Тверской государственный университет, г. Тверь
ЗАО НИИ ЦПС, г. Тверь
Университет Витватерсранда, Йоханнесбург

Поступила в редакцию 11.07.2018, после переработки 05.09.2018.

Рассматривается вопрос о возможности эффективного описания ненормальных и квазинормальных предикатных модальных логик, определяемых семантически посредством классов шкал Крипке с выделенными мирами. Доказывается, что любая ненормальная или квазинормальная (в т. ч. нормальная) модальная предикатная логика, полная относительно некоторого первопорядково определимого класса шкал Крипке с выделенными мирами, погружается в классическую логику предикатов. Показано, как построить соответствующее погружение, используя т. н. стандартный перевод модальных предикатных формул в формулы языка классической логики предикатов. В конце работы приводятся следствия указанного результата, а также демонстрируются возможности обобщения описанной конструкции на классы других систем, в частности, на классы полимодальных логик — темпоральных логик с парой модальностей «всегда было» и «всегда будет» и логик знания с оператором распределенного знания. Показаны некоторые границы применимости описанного метода, приведены соответствующие примеры. Указаны контрпримеры, когда условия применимости метода для полной по Крипке модальной предикатной логики не выполнены, а построение эффективного описания этой логики, тем не менее, возможно.

Ключевые слова: логика первого порядка, модальная логика, ненормальная логика, квазинормальная логика, рекурсивная перечислимость, семантика Крипке.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 81–94.
https://doi.org/10.26456/vtpmk511

1. Введение

Одним из фундаментальных вопросов в исследовании логических систем является вопрос об их эффективном описании, которое может предполагать построение

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 17–03–00818–ОГН и 18–011–00869.

разрешающей процедуры, конечной (или рекурсивной, или независимой) аксиоматики, удобной семантики, различных переводов и погружений в известные языки и системы и др. В случае логик первого порядка уже при наличии довольно бедных средств получаются результаты о неразрешимости [1, 9, 14, 23] и даже неперечислимости [7], поэтому их эффективное описание в виде разрешающей процедуры, как правило, невозможно (хотя при этом неразрешимые системы могут содержать достаточно выразительные разрешимые фрагменты, см., например, [10,11,13,18]). С другими видами эффективных описаний ситуация иная: многие «стандартные» модальные предикатные логики — **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4**, **QS5** и др. — имеют конечную аксиоматику, ясную семантику, для них построены переводы и погружения в хорошо изученные языки и системы, в частности, переводы в классический язык первого порядка и погружения в классическую логику предикатов, см., например [5, 6] (для более глубокого изучения модальных предикатных логик можно обратиться к [12]).

Отметим, что наличие эффективного описания логики в одном смысле, вообще говоря, не означает наличие его в другом. Так, например, логики **QGL** и **QGrz** задаются конечными списками аксиом, но при этом не полны по Крипке, а логики их шкал Крипке не являются рекурсивно перечислимыми [4, 17]. Тем не менее, для некоторых классов неклассических логик найдены условия, гарантирующие наличие эффективного описания в одном смысле, если оно имеется в другом, см. более подробно монографию [12].

Здесь мы покажем, что методы, предложенные в [6] для нормальных модальных предикатных логик, интуиционистской предикатной логики и релевантной логики, могут быть расширены и адаптированы для случая ненормальных и квазинормальных модальных предикатных логик (для более детального знакомства с ненормальными модальными предикатными логиками можно обратиться к [8]). Более точно, будет показано, что любая (ненормальная, квазинормальная или нормальная) модальная предикатная логика, определяемая первопорядково определимым классом шкал Крипке, имеет рекурсивную аксиоматику. При этом условия первого порядка можно накладывать не только на отношение достижимости в шкалах Крипке, но и на предметные области их миров.

Работа структурирована следующим образом. В разделах 2 и 3 будут даны основные определения, касающиеся рассматриваемого языка и семантики Крипке. В разделе 4 будет приведен основной результат работы, а в разделе 5 — некоторые его следствия. В разделе 6 будет предложено обсуждение полученных результатов.

2. Синтаксис и семантика

Пусть имеется язык, содержащий счетное множество предметных переменных, счетное множество предикатных букв любой местности, логическую константу $\bot$, логическую связку $\to$, кванторный символ $\forall$, модальность $\Box$, а также символы скобок и запятую. Формулой в этом языке (модальной предикатной формулой) считаем

– константу $\bot$;

– все выражения вида $P(x_1, \ldots, x_n)$, где P — n-местная предикатная буква, а $x_1, \ldots, x_n$ — предметные переменные;

– все выражения вида $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\, \varphi$ и $\Box\varphi$, где φ и ψ — формулы, а x — предметная переменная.

Логические связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, кванторы вида $\exists x$, а также модальность $\Diamond$ определяются обычным образом: $\neg\varphi = (\varphi \to \bot)$, $(\varphi\vee\psi) = (\neg\varphi \to \psi)$, $(\varphi\wedge\psi) = \neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$, $\exists x\, \varphi = \neg\forall x\, \neg\varphi$, $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$.

При записи формул будем опускать некоторые скобки, определяя силу связывания формул по убыванию: $\neg$, $\forall x$, $\exists x$, $\Box$, $\Diamond$, $\wedge$, $\vee$, $\to$.

Теперь определим реляционную семантику Крипке для этого языка.

Шкалой Крипке будем называть набор $\mathfrak{F} = \langle W, N, R\rangle$, где W и N — непустые множества и $N \subseteq W$, а R — бинарное отношение на W, причем $R \subseteq N \times W$. Элементы множества W будем называть мирами, а отношение R — отношением достижимости. Если $w \in N$, то мир w будем называть нормальным, если же $w \in W\setminus N$, то мир w будем называть взрывающимся. Если пара миров w и w' находится в отношении R, то пишем wRw'; при этом говорим, что из мира w достижим мир w'.

Предикатной шкалой Крипке будем называть набор $\mathfrak{F}(D) = \langle W, N, R, D\rangle$, где $\langle W, N, R\rangle$ — шкала Крипке, а D — функция, сопоставляющая каждому миру $w \in W$ непустое множество $D(w)$, удовлетворяющая следующему условию: если wRw', то $D(w) \subseteq D(w')$.

Набор $\mathfrak{M} = \langle W, N, R, D, I\rangle$ будем называть предикатной моделью Крипке на шкале $\mathfrak{F}(D) = \langle W, N, R, D\rangle$, если I — интерпретация предикатных букв в $\mathfrak{F}(D)$, т. е. функция, которая каждому миру $w \in W$ и каждой n-местной предикатной букве P ставит в соответствие n-местное отношение $I(w, P)$ на множестве $D(w)$.

Будем называть интерпретацией предметных переменных любую функцию α, значение которой определено для каждой предметной переменной[2].

Пусть α — интерпретация предметных переменных, пусть φ — формула и пусть $\mathfrak{M} = \langle W, N, R, D, I\rangle$ — модель Крипке. Определим рекурсивно отношение истинности формулы φ в мире w модели $\mathfrak{M}$ при интерпретации α:

– $\mathfrak{M}, w \not\models^\alpha \bot$;

– $\mathfrak{M}, w \models^\alpha P(x_1, \dots, x_n)$, если $\langle \alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)\rangle \in I(w, P)$;

– $\mathfrak{M}, w \models^\alpha \varphi' \to \varphi''$, если $\mathfrak{M}, w \not\models^\alpha \varphi'$ или $\mathfrak{M}, w \models^\alpha \varphi''$;

– $\mathfrak{M}, w \models^\alpha \forall x\, \varphi'$, если для всякой интерпретации β, которая не отличается от α ни на какой переменной, кроме, быть может, x, выполнено $\mathfrak{M}, w \models^\beta \varphi$;

– $\mathfrak{M}, w \models^\alpha \Box\varphi'$, если $w \in N$ и при этом для всякого такого $w' \in W$, что wRw', выполнено $\mathfrak{M}, w' \models^\alpha \varphi'$.

Полагаем также

– $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, если для всякой интерпретации α выполнено следующее: если для любой свободной в φ переменной x имеем $\alpha(x) \in D(w)$, то $\mathfrak{M}, w \models^\alpha \varphi$;

– $\mathfrak{M} \models \varphi$, если для всякого $w \in N$ выполнено $\mathfrak{M}, w \models \varphi$;

[2] Вообще говоря, формально неважно, какому множеству это значение принадлежит; содержательно $\alpha(x)$ можно понимать как элемент предметной области некоторого мира рассматриваемой предикатной шкалы или модели.

– $\mathfrak{F}(D), w \models \varphi$, если для всякой модели $\mathfrak{M}$, определенной на шкале $\mathfrak{F}(D)$, выполнено $\mathfrak{M}, w \models^{\alpha} \varphi$;

– $\mathfrak{F}(D) \models \varphi$, если для всякого $w \in N$ выполнено $\mathfrak{F}(D), w \models \varphi$;

– $\mathfrak{F}, w \models \varphi$, если для всякой предикатной шкалы $\mathfrak{F}(D)$, определенной на шкале $\mathfrak{F}$, выполнено $\mathfrak{F}(D), w \models^{\alpha} \varphi$;

– $\mathfrak{F} \models \varphi$, если для всякого $w \in N$ выполнено $\mathfrak{F}, w \models \varphi$.

Пусть $\mathfrak{F}(D) = \langle W, N, R, D\rangle$ — предикатная шкала Крипке, $w \in W$; набор $\mathfrak{F}_w(D) = \langle \mathfrak{F}(D), w\rangle$ будем называть предикатной шкалой Крипке с выделенным миром, а набор $\mathfrak{F}_w = \langle \mathfrak{F}, w\rangle$ — шкалой Крипке с выделенным миром.

Положим

– $\mathfrak{F}_w(D) \models \varphi$, если $\mathfrak{F}(D), w \models \varphi$;

– $\mathfrak{F}_w \models \varphi$, если $\mathfrak{F}, w \models \varphi$.

Обращаем внимание читателя на то, что в шкалах $\mathfrak{F}_w$ и $\mathfrak{F}_w(D)$ выделенный мир w, вообще говоря, может быть как нормальным, так и взрывающимся. При этом если w — взрывающийся мир, то можно считать, что других миров шкала $\mathfrak{F}_w$ (или $\mathfrak{F}_w(D)$) не содержит, т. к. в этом случае их наличие или отсутствие никак не влияет на истинность формул в $\mathfrak{F}_w$ (или, соответственно, в $\mathfrak{F}_w(D)$).

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс каких-либо структур следующих типов: шкал Крипке, предикатных шкал Крипке, шкал Крипке с выделенным миром или предикатных шкал Крипке с выделенным миром. Положим

– $\mathfrak{C} \models \varphi$, если для каждой структуры $\mathfrak{S} \in \mathfrak{C}$ выполнено отношение $\mathfrak{S} \models \varphi$.

Теперь определим классы логик, о которых пойдет речь.

Модальной предикатной логикой будем называть любое множество модальных предикатных формул, замкнутое по правилу modus ponens[3], правилу обобщения[4] и по правилу предикатной подстановки[5].

Определим минимальную нормальную модальную предикатную логику **QK** как множество модальных предикатных формул, истинных в классе всех шкал Крипке, содержащих только нормальные миры.

Модальную предикатную логику L будем называть нормальной, если она содержит **QK** и замкнута по правилу Геделя, т. е. если для всякой формулы φ выполнено следующее:

$$\varphi \in L \Longrightarrow \Box\varphi \in L.$$

[3]По этому правилу из формул φ и $\varphi \to \psi$ получается ψ.

[4]Правило позволяет из формулы φ получить формулу вида $\forall x\varphi$.

[5]Это правило позволяет получать из φ новую формулу за счет того, что вместо элементарной формулы $P(x_1, \ldots, x_n)$ может быть подставлена формула $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, где $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — список переменных, содержащий все ее свободные переменные, причем для каждой из переменных $y_1, \ldots, y_m$ хотя бы одно свободное вхождение в эту формулу имеется; операция такой подстановки состоит в том, что каждое вхождение формулы вида $P(z_1, \ldots, z_n)$ в φ заменяется вхождением $\psi(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m)$. На формулу $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ накладывается ограничение, касающееся переменных $y_1, \ldots, y_m$: никакое вхождение подформулы вида $P(z_1, \ldots, z_n)$ в φ не должно находиться в φ в области действия кванторов ни по одной из переменных $y_1, \ldots, y_m$.

Следуя[6] [21], модальную предикатную логику будем называть квазинормальной, если она содержит **QK**. Если логика не является нормальной, то будем называть ее ненормальной.

Заметим, что множество формул, истинных в некотором мире некоторой предикатной шкалы, замкнуто и по modus ponens, и по правилу обобщения, и по правилу подстановки, а значит, образует логику. Кроме того, пересечение логик тоже является логикой, поэтому множество формул, истинных в каком-либо классе шкал (предикатных или нет, с выделенным миром или нет) тоже образует логику. Логику, определяемую классом каких-либо шкал, будем называть полной по Крипке.

Можем без ограничений общности считать (и будем так считать), что полная по Крипке логика задается классом предикатных шкал с выделенными мирами. Действительно, истинность формул в шкале Крипке $\mathfrak{F}$ эквивалентна их истинности в классе всех предикатных шкал, определенных на $\mathfrak{F}$; истинность формул в шкале $\mathfrak{F}$ (или $\mathfrak{F}(D)$) эквивалентна их истинности в классе шкал вида $\mathfrak{F}_w$ (соответственно, $\mathfrak{F}_w(D)$), где w пробегает множество всех нормальных миров шкалы $\mathfrak{F}$ (соответственно, $\mathfrak{F}(D)$).

Отметим, что если логика L задается классом шкал с выделенными мирами, не содержащих взрывающихся миров, то L является квазинормальной, при этом если L может быть задана классом (предикатных) шкал без выделенных миров, то L является нормальной.

3. Первопорядковая определимость классов шкал

Шкалы Крипке можно рассматривать как модели классического языка первого порядка. Пусть классический язык первого порядка содержит счетное множество предметных переменных, логические связки $\bot$ и $\to$, кванторный символ $\forall$, символ равенства $=$, бинарные предикатные буквы $\bar{R}$ и $\bar{D}$, унарные предикатные буквы $\bar{W}$, $\bar{N}$, $\bar{S}$, а также скобки и запятую. Считаем, что понятие формулы в этом языке определено обычным образом; то же относится к сокращениям для логических связок и кванторов.

Пусть $\mathfrak{F}(D) = \langle W, N, R, D\rangle$ — предикатная шкала Крипке, $w \in W$ и α — интерпретация предметных переменных во множестве

$$W \cup \bigcup_{u\in W} D(u).$$

Положим

- $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash^\alpha \bar{W}(x)$, если $\alpha(x) \in W$;
- $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash^\alpha \bar{N}(x)$, если $\alpha(x) \in N$;
- $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash^\alpha \bar{S}(x)$, если $\alpha(x) = w$;
- $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash^\alpha \bar{R}(x,y)$, если $\alpha(x), \alpha(y) \in W$ и при этом $\alpha(x)R\alpha(y)$;

[6] В [21] рассматриваются пропозициональные логики; мы переносим терминологию на предикатные логики «естественным» образом: заменяем **K** на **QK**.

– $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash^\alpha \bar{D}(x,y)$, если $\alpha(y) \in W$ и при этом $\alpha(x) \in D(\alpha(y))$.

В результате шкала $\mathfrak{F}_w(D)$ определяет модель рассматриваемого языка.

Каждая из шкал $\mathfrak{F}_w$, $\mathfrak{F}(D)$ и $\mathfrak{F}$ аналогичным образом определяет класс моделей этого языка: этот класс образован предикатными шкалами с выделенным миром, определенными на $\mathfrak{F}_w$, $\mathfrak{F}(D)$ или $\mathfrak{F}$, соответственно.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, состоящий из каких-либо шкал Крипке. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{C}}$ множество предикатных шкал с выделенным миром, определенных на шкалах из $\mathfrak{C}$. Пусть Φ — замкнутая формула классического языка первого порядка. Тогда считаем, что

– $\mathfrak{C} \Vdash \Phi$, если Φ истинна в каждой шкале из $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Отметим, что с учетом определения истинности модальных предикатных формул в классе шкал Крипке выполняется следующее: если φ — модальная предикатная формула, то

– $\mathfrak{C} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда φ истинна в каждой шкале из $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Будем говорить, что классическая первопорядковая формула Φ определяет класс шкал $\mathfrak{C}$, если $\mathfrak{F}_w(D) \in \tilde{\mathfrak{C}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_w(D) \Vdash \Phi$. Класс шкал $\mathfrak{C}$ будем называть первопорядково определимым, если существует классическая формула первого порядка, которая его определяет.

4. Погружение в классическую логику предикатов

Покажем, что логика любого первопорядково определимого класса шкал погружается в классическую логику предикатов. Для этого нам понадобится модификация стандартного перевода ST_x модальных формул в формулы логики предикатов:

– $ST_x(\bot) = \bot$;

– если $P(x_1, \ldots, x_m)$ — элементарная формула модального языка, то полагаем $ST_x(P(x_1, \ldots, x_m)) = P'(x, x_1, \ldots, x_m)$, где P' — новая предикатная буква;

– $ST_x(\varphi \to \psi) = ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi)$;

– $ST_x(\forall y\, \varphi) = \forall y(D(y,x) \to ST_x(\varphi))$;

– $ST_x(\Box\varphi) = N(x) \wedge \forall y(W(y) \wedge R(x,y) \to ST_y(\varphi))$.

Стандартный перевод описывает истинность модальных предикатных формул в мирах модели Крипке: $ST_x(\varphi)$ выражает условие «в мире x истинна формула φ».

Воспользуемся этим переводом, чтобы построить погружение логики первопорядково определимого класса шкал в классическую логику предикатов. Для этого заметим, что требования, предъявляемые к предикатным шкалам Крипке с выделенным миром, могут быть описаны формулами первого порядка. Именно,

– формула $\exists x\, \bar{W}(x)$ описывает условие непустоты множества миров;

– формула $\forall x(\bar{N}(x) \to \bar{W}(x))$ описывает условие включения множества нормальных миров во множество всех миров;

– формула $\forall x(\bar{W}(x) \to \exists y\, D(y,x))$ описывает условие непустоты предметных областей миров;

– формула $\forall x \forall y \forall z(W(x) \wedge W(y) \wedge R(x,y) \wedge D(z,x) \to D(z,y))$ описывает условие расширения предметных областей миров;

– формула $\exists x(W(x) \wedge S(y))$ описывает условие наличия выделенного мира;

– формула $\forall x \forall y(S(x) \wedge S(y) \to x = y)$ описывает условие единственности выделенного мира.

Обозначим конъюнкцию этих формул через F. Тогда содержательно формула F означает, что у нас имеется предикатная шкала Крипке с выделенным миром.

Пусть C — замкнутая классическая формула, определяющая некоторый класс $\mathfrak{C}$ шкал Крипке. Пусть φ — замкнутая модальная предикатная формула. Тогда с учетом сделанных наблюдений получаем, что

$$\mathfrak{C} \models \varphi \iff F \wedge C \to \forall x(S(x) \to ST_x(\varphi)) \in \mathbf{QCL}^=,$$

где $\mathbf{QCL}^=$ — классическая логика предикатов с равенством.

Таким образом, имеет место следующее наблюдение.

Теорема 1. *Пусть L — нормальная, ненормальная или квазинормальная модальная предикатная логика первопорядково определимого класса шкал. Тогда L рекурсивно погружается в классическую логику предикатов с равенством.*

5. Некоторые следствия

Приведем некоторые следствия полученной теоремы и описанной конструкции. Поскольку классическая логика предикатов конечно аксиоматизируема, она является рекурсивно перечислимой, а значит, любое рекурсивно сводимое к ней множество тоже рекурсивно перечислимо.

Следствие 1. *Любая модальная предикатная логика, полная относительно некоторого первопорядково определимого класса шкал, является рекурсивно перечислимой.*

В силу теоремы Крейга, рекурсивная перечислимость логики равносильная наличию у этой логики рекурсивной аксиоматики.

Следствие 2. *Любая модальная предикатная логика, полная относительно некоторого первопорядково определимого класса шкал, имеет рекурсивную аксиоматику.*

В работе [6] рассматривался вопрос об относительной разрешимости логик, которая понимается следующим образом. Предположим, что имеется оракул, дающий ответ на вопрос о принадлежности формул логике L_1. Тогда логика L_2 считается разрешимой относительно L_1, если существует алгоритм с этим оракулом, который решает вопрос о принадлежности формул логике L_2.

Следствие 3. *Любая модальная предикатная логика, полная относительно некоторого первопорядково определимого класса шкал, разрешима относительно классической логики предикатов с равенством.*

Отметим, что равенство в классической логике предикатов можно промоделировать одной бинарной предикатной буквой. Более того, с помощью всего одной бинарной предикатной буквы можно промоделировать все предикатные буквы, см. [1, 15, 19]. Поэтому как в теореме 1, так и в следствии 3 можно заменить классическую логику предикатов на фрагмент логики предикатов от одной бинарной буквы.

Что касается обобщений конструкции, лежащей в основе доказательства теоремы 1, то ее можно расширить и на логики других классов, что частично сделано в [2, 3, 6]. Так, вместо логик в языке с одной модальностью можно рассматривать полимодальные логики. В этом случае теорема 1 сохранится, если для этих логик существует семантика, описываемая формулами первого порядка. Например, если рассматривать нормальные темпоральные логики с модальностями $\Box$ и $\Box^{-1}$ — «всегда будет» и «всегда было», — то в определение стандартного перевода достаточно включить пункты

– $ST_x(\Box\varphi) \quad = \forall y(W(y) \wedge R(x,y) \to ST_y(\varphi))$;

– $ST_x(\Box^{-1}\varphi) = \forall y(W(y) \wedge R(y,x) \to ST_y(\varphi))$,

а в формулу F включить условие нормальности всех миров. Эту же конструкцию можно применить, например, к логикам знания, язык которых может содержать оператор распределенного знания: формулы вида $K_m\varphi$ («агент m знает φ») потребуют пункта

– $ST_x(K_m\varphi) = \forall y(W(y) \wedge R_m(x,y) \to ST_y(\varphi))$,

а формулы вида $D\varphi$ («знание утверждения φ распределено между всеми агентами») — пункта

– $ST_x(D\varphi) = \forall y(W(y) \wedge R_1(x,y) \wedge \ldots \wedge R_n(x,y) \to ST_y(\varphi))$,

где $1, \ldots, n$ — имена всех агентов системы.

С другой стороны, если рассмотреть, например, темпоральные предикатные логики на основе **CTL**, **CTL*** или им подобные, логики знания с оператором всеобщего знания, динамические логики с операцией итерации, то описанную конструкцию применить не получится, поскольку семантика некоторых модальностей в языках этих логик не описывается никакой первопорядковой формулой; более того, известно, что предикатные варианты упомянутых логик, определяемые шкалами Крипке, не являются рекурсивно перечислимыми, а значит, для них не существует рекурсивных погружений в классическую логику предикатов [16, 24].

Заключение

Мы показали, что если модальная предикатная логика полна относительно семантики, описываемой первопорядковыми условиями, то она рекурсивно погружается в классическую логику предикатов, а следовательно, рекурсивно перечислима и рекурсивно аксиоматизируема. При этом известны примеры логик, которые полны относительно классов шкал Крипке, не определяемых первопорядковыми условиями, и эти логики оказываются не перечислимыми рекурсивно [4, 22]. Поэтому возникает вопрос: является ли верным обращение теоремы 1, т. е. утверждение о том, что если полная по Крипке модальная предикатная логика рекурсивно перечислима (это эквивалентно тому, что она рекурсивно погружается в классическую логику предикатов), то она полна и относительно некоторого первопорядково определимого класса шкал?

В случае ненормальных и квазинормальных логик ответ на этот вопрос отрицательный: в [20] приведен пример квазинормальной предикатной логики, которая определяется шкалой Крипке с выделенным миром, является рекурсивно перечислимой, но при этом не полна относительно никакого первопорядково определимого класса шкал Крипке с выделенными мирами. В случае нормальных модальных предикатных логик подобные примеры автору неизвестны. То же относится и к суперинтуиционистским предикатным логикам.

Список литературы

[1] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

[2] Рыбаков М.Н. Разрешимость интуиционистской логики предикатов относительно классической логики предикатов // Материалы VI Международной научной конференции «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке». СПб: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2000. С. 247-250.

[3] Рыбаков М.Н. Разрешимость логик знания относительно классической логики предикатов // Сборник трудов III Международной конференции «Смирновские чтения». М.: Издательство Института философии РАН, 2001. С. 62-64.

[4] Рыбаков М.Н. Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей // Логические исследования. 2001. № 8. С. 155–167.

[5] Рыбаков М.Н. Разрешимость некоторых модальных предикатных логик относительно классической логики предикатов // Учёные записки Тверского государственного университета. 2000. Т. 6. С. 8–12.

[6] Рыбаков М.Н., Чагров А.В. Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Т. XIV. М.: Издательство Института философии РАН, 2000. С. 81-98.

[7] Трахтенброт Б.А. Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады Академии наук СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 569–572.

[8] Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[9] Church A. A note on the Entscheidungsproblem // Journal of Symbolic Logic. 1936. Vol. 1. Pp. 40–41.

[10] Behmann H. Beiträige zür algebra der logik, inbesondere zum entscheidungsproblem // Mathematische Annalen. 1922. Vol. 86. Pp. 163–229.

[11] Börger E., Grädel E., Gurevich Yu. The Classical Decision Problem. Springer, 1997.

[12] Gabbay D.M., Skvortsov D.P., Shehtman V.B. Quantification in Nonclassical Logic. Series: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 153. Elsevier Science, 2009. 640 p.

[13] Grädel E., Kolaitis P.G., Vardi M.Y. On the decision problem for two-variable first-order logic // Bulletin of Symbolic Logic. 1997. Vol. 3, № 1. Pp. 53–69.

[14] Gödel K. Zum Entsheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls // Monatschefte für Mathematische Physika. 1933. Vol. 40. Pp. 433–443.

[15] Kremer P. On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. 1997. Vol. 62, № 2. Pp. 529–544.

[16] Kotikova E.A., Rybakov M.N. First-Order Logics of Branching Time: On Expressive Power of Temporal Operators // Логические исследования. 2013. № 19. С. 68–99.

[17] Montagna F. The Predicate Modal Logic of Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1984. Vol. 25, № 2. Pp. 179–189.

[18] Mortimer M. On languages with two variables // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. Pp. 135–140.

[19] Nerode A., Shore R.A. Second order logic and first order theories of reducibility ordering // The Kleene Symposium. Eds. by J. Barwise, H.J. Keisler, K. Kunen. North-Nolland, 1980. Pp. 181-200.

[20] Rybakov M., Shkatov D. A recursively enumerable Kripke complete first-order logic not complete with respect to a first-order definable class of frame // Advances in Modal Logic. Eds. by G. Bezhanishvili, G. D'Agostino, G. Metcalfe, T. Studer. Vol. 12. College Publications, 2018. Pp. 531-540.

[21] Segerberg K. An Essey in Classical Modal Logic. Uppsala, 1971.

[22] Skvortsov D.P. On The Predicate Logics of Finite Kripke Frames // Studia Logica. 1995. Vol. 54, № 1. Pp. 79–88.

[23] Surányi J. Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls // Mathematikai és Fizikai Lapok. 1943. Vol. 50. Pp. 51–74.

[24] Wolter F., Zakharyaschev M.V. Decidable fragments of First-order modal logics // The Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. Pp. 1415–1438.

Образец цитирования

Рыбаков М.Н. Аксиоматизируемость ненормальных и квазинормальных модальных предикатных логик первопорядково определимых классов шкал Крипке // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 81–94. https://doi.org/10.26456/vtpmk511

Сведения об авторах

1. **Рыбаков Михаил Николаевич**
доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета; инженер-программист ЗАО НИИ ЦПС; научный сотрудник отдела информатики и прикладной математики Университета Витватерсранда, Йоханнесбург.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

AXIOMATIZABILITY OF NON-NORMAL AND QUASI-NORMAL MODAL PREDICATE LOGICS OF FIRST-ORDER DEFINABLE CLASSES OF KRIPKE FRAMES

Rybakov Mikhail Nikolayevich
Senior Lecturer at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University
Software engineer, Closed Joint-Stock Company Scientific
Research Institute Centerprogramsystem
Research Fellow at School of Computer Science and Applied Mathematics,
University of the Witwatersrand, Johannesburg
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 11.07.2018, revised 05.09.2018.

The possibility of effective description of non-normal and quasi-normal predicate modal logics defined semantically by means of classes of Kripke frames with distinguished worlds is considered. It is proved that any non-normal or quasi-normal (in particular, normal) modal predicate logic, complete with respect to a certain first-order definable class of Kripke frames with distinguished worlds, can be embedded into the classical first-order logic. It is shown how to construct such an embedding based on the so called standard translation of modal predicate formulas into formulas of the first-order classical language. At the end of the work, we present some corollaries of this result and demonstrate the possibility of generalization for the described construction to classes of other systems, in particular, to classes of polymodal logics—temporal logic with a pair of modalities 'always in past' and 'always in future' and logics of knowledge with the operator of distributed knowledge. Some limitations for applicability of the described method are shown, relevant examples are given. Counterexamples are indicated when the conditions of the method applicability for the Kripke complete modal predicate logic are not met but the construction of an effective description of this logic is nevertheless possible.

Keywords: first-order logic, modal logic, non-normal logic, quasi-normal logic, recursive enumerability, Kripke semantics.

Citation

Rybakov M.N., "Axiomatizability of non-normal and quasi-normal modal predicate logics of first-order definable classes of Kripke frames", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 81–94. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk511

References

[1] Boolos G.S., Jeffrey R.C., *Computability and Logic*, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[2] Rybakov M.N., "Decidability of intuitionistic first-order logic relative to classical first-order logic", *Materialy VI Mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii ≪Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke≫ [Proc. of VI International Conference "Modern logic: problems of theory, history, and application in science"]*, Saint-Petersburg State University Publ., SPb, 2000, 247–250 (in Russian).

[3] Rybakov M.N., "Decidability of logics of knowledge relative to classical first-order logic", *Sbornik trudov III Mezhdunarodnoj konferentsii ≪Smirnovskie chteniya≫ [Proc. of the III International Conference "Smirnov Readings"]*, Izdatelstvo Instituta filosofii RAN, Moscow, 2001, 62–64 (in Russian).

[4] Rybakov M.N., "Enumerability of modal predicate logics and the condition of non-existence of infinite ascending chains", *Logicheskiye Issledovaniya [Logical Investigations]*, 2001, № 8, 155–167 (in Russian).

[5] Rybakov M.N., "Decidability of some modal predicate logics relative to classical first-order logic", *Uchyonye zapiski Tverskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of Tver State University]*, **6** (2000), 8–12 (in Russian).

[6] Rybakov M.N., Chagrov A.V., "Standard Translations of Non-Classical Formulas and Relative Decidability of Logics", *Trudy nauchno-issledovatelskogo seminara Logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN [Proceedings of the Research Seminar of the Logical Center of the Institute of Philosophy, RAS]*, **XIV**, Izdatel'stvo Instituta Filosofii RAN, Moscow, 2000, 81–98 (in Russian).

[7] Trakhtenbrot B.A., "The impossibility of an algorithm for the decidability problem on finite classes", *Doklady Akademii Nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*, **70**:4 (1950), 569–572 (in Russian).

[8] Feys R., *Modalnaya Logika [Modal Logic]*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (in Russian).

[9] Church A., "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), 40–41.

[10] Behmann H., "Beiträige zür algebra der logik, inbesondere zum entscheidungsproblem", *Mathematische Annalen*, **86** (1922), 163–229.

[11] Börger E., Grädel E., Gurevich Yu., *The Classical Decision Problem*, Springer, 1997.

[12] Gabbay D.M., Skvortsov D.P., Shehtman V.B., *Quantification in Nonclassical Logic*. V. 153, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Science, 2009, 640 pp.

[13] Grädel E., Kolaitis P.G., Vardi M.Y., "On the decision problem for two-variable first-order logic", *Bulletin of Symbolic Logic*, **3**:1 (1997), 53–69.

[14] Gödel K., "Zum Entsheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls", *Monatschefte für Mathematische Physika*, **40** (1933), 433–443.

[15] Kremer P., "On the complexity of propositional quantification in intuitionistic logic", *The Journal of Symbolic Logic*, **62**:2 (1997), 529–544.

[16] Kotikova E.A., Rybakov M.N., "First-Order Logics of Branching Time: On Expressive Power of Temporal Operators", *Logicheskiye Issledovaniya [Logical Investigations]*, 2013, № 19, 68–99.

[17] Montagna F., "The Predicate Modal Logic of Provability", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **25**:2 (1984), 179–189.

[18] Mortimer M., "On languages with two variables", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1975, 135–140.

[19] Nerode A., Shore R.A., "Second order logic and first order theories of reducibility ordering", *The Kleene Symposium*, eds. J. Barwise, H.J. Keisler, K. Kunen, North-Nolland, 1980, 181–200.

[20] Rybakov M., Shkatov D., "A recursively enumerable Kripke complete first-order logic not complete with respect to a first-order definable class of frame", *Advances in Modal Logic*, **12**, eds. G. Bezhanishvili, G. D'Agostino, G. Metcalfe, T. Studer, College Publications, 2018, 531–540.

[21] Segerberg K., *An Essey in Classical Modal Logic*, Uppsala, 1971.

[22] Skvortsov D.P., "On The Predicate Logics of Finite Kripke Frames", *Studia Logica*, **54**:1 (1995), 79–88.

[23] Surányi J., "Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktioskalküls", *Mathematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), 51–74.

[24] Wolter F., Zakharyaschev M.V., "Decidable fragments of First-order modal logics", *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1415–1438.