УДК 510.52, 510.643

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ НАПАРНИКИ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК K4 И GL[1]

Горбунов И.А.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 11.09.2018, после переработки 03.12.2018.

В работе рассматриваются свойства реляционных рафинированных моделей квазинормальных модальных логик, содержащих формулу транзитивности $\Box p \to \Box\Box p$ и(или) формулу Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Доказано, что реляционные рафинированные модели квазинормальных напарников логик **K4** и **GL**, как и в нормальном случае, имеют транзитивное отношение достижимости. Рассмотрена аксиоматизация квазинормального напарника логики **GL** над логиками **K4** и **K**. На основании полученных результатов исследован фрагмент решётки квазинормальных логик, содержащих формулы транзитивности и(или) формулу Лёба. Исследован фрагмент решётки нормальных напарников этих логик. Доказано, что отображение, которое каждой квазинормальной логике ставит в соответствие её нормального напарника, является p-морфизмом.

Ключевые слова: квазинормальные логики, обобщённые рафинированные шкалы с выделенными точками, решётка квазинормальных логик.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 98–110.
https://doi.org/10.26456/vtpmk521

Введение

Взаимосвязь между свойствами реляционных моделей нормальных модальных логик и модальными формулами достаточно хорошо изучена (см. [1]). Так, например, известно, что формулы $\Box p \to p$ и $\Box p \to \Box\Box p$ истинны в шкале Крипке тогда и только тогда, когда отношение достижимости в этой шкале будет, соответственно, рефлексивно и транзитивно. В случае же квазинормальных модальных логик эта взаимосвязь до сих пор исследована мало. В частности, этот вопрос рассматривался в работах [2–5]. При этом интуиция, сложившаяся при изучении нормальных логик, далеко не всегда может помочь при изучении семантики даже их квазинормальных напарников. Пожалуй одним из таких показательных примеров является случай логик **K4** и **GL**, квазинормальную семантику которых мы и рассмотрим в разделах 2 и 3.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-03-00818-ОГН-а и №18-011-00869-а).

Далее, используя полученную семантику, мы рассмотрим подрешетки квазинормальных и нормальных логик, связанных с логиками **K4** и **GL**. Попутно получим некоторые новые аксиоматизации логики **GL** (раздел 5).

Перейдем к определениям. *Логикой* будем называть множество формул, замкнутое относительно всех подстановок. Если L — некоторая логика, то, добавляя к L множество формул Γ и замыкая полученное множество относительно *modus ponens* и всех подстановок, получаем логику, которую будем обозначать $L+\Gamma$. Если мы замкнем множество $L \cup \Gamma$ относительно *modus ponens*, всех подстановок и правила Геделя, имеющего вид $\dfrac{p}{\Box p}$, то получим логику, которую будем обозначать посредством $L \oplus \Gamma$.

Рассмотрим классическую логику высказываний, заданную в языке со связками $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\bot$ (ложь), некоторым исчислением, содержащим конечное множество схем аксиом и единственное правило вывода — *modus ponens*. Чтобы иметь возможность задавать модальные логики, расширим ее язык одноместной связкой $\Box$ («необходимо»). Полученную логику будем обозначать **Cl**.

Введем обозначения для формул:

$$tra = \Box p \to \Box\Box p;$$

$$la = \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

Следующие логики определим обычным образом:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q);$$

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus tra;$$

$$\mathbf{GL} = \mathbf{K} \oplus la = \mathbf{K4} \oplus la.$$

Логику, содержащую множество **K**, будем называть *модальной логикой*. Пусть Γ — некоторое множество формул. Логику $\mathbf{K}+\Gamma$ будем называть *квазинормальной модальной логикой*, а логику $\mathbf{K} \oplus \Gamma$ будем называть *нормальной модальной логикой*.

Пусть L — некоторая нормальная логика; ее *квазинормальным напарником* будем называть то же самое множество формул, не постулируя для этого множества замкнутости относительно правила Геделя.

Посредством $ExtL$ будем обозначать множество всех квазинормальных расширений логики L. Множество всех нормальных расширений логики L обозначим посредством $\mathbb{N}ExtL$. Заметим, что $\mathbb{N}Ext\mathbf{K} \subseteq Ext\mathbf{K}$.

Как известно ([1], с. 113, или [4], с. 5), множества $Ext\mathbf{K}$ и $\mathbb{N}Ext\mathbf{K}$ образуют решетки $\langle Ext\mathbf{K}, \dot{+}, \cap\rangle$ и $\langle \mathbb{N}Ext\mathbf{K}, \bigoplus, \cap\rangle$, где $\dot{+}$ и $\bigoplus$ — операции взятия супремума, которые определяются следующим образом: $(\mathbf{K}+\Gamma)\dot{+}(\mathbf{K}+\Delta) = \mathbf{K}+(\Gamma\cup\Delta)$ и $(\mathbf{K}\oplus\Gamma)\bigoplus(\mathbf{K}\oplus\Delta) = \mathbf{K}\oplus(\Gamma\cup\Delta)$.

Для каждой формулы φ, посредством $\Box^+\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge \Box\varphi$. Для каждого множества формул Γ, положим $\Gamma^+ = \{\Box^+\varphi : \varphi \in \Gamma\}$. Как следует из Леммы 1 ([5], стр. 10), для любой нормальной логики $\mathbf{L}$, содержащей формулу tra, верно, что если $\mathbf{L} = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то ее квазинормальный напарник $\mathbf{L}$ аксиоматизируется над $\mathbf{K}$ множеством $\Gamma^+ \cup \{\Box^+ tra\}$, то есть, $\mathbf{L} = \mathbf{K} + (\Gamma^+ \cup \{\Box^+ tra\})$.

Таким образом, логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box^+ tra$, аналогичным образом логика $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} + \Box^+ la = \mathbf{K} + \{\Box^+ tra, \Box^+ la\}$.

1. Семантика квазинормальных логик

Пусть W — некоторое непустое множество, элементы которого будем называть *мирами* или *точками*, а R — бинарное отношение на нем, называемое *отношением достижимости*. Мир x называем *достижимым* из мира y, если yRx. Будем говорить, что мир x *достижим из мира* y *за* n *шагов*, если существует такая последовательность миров $w_0Rw_1R\dots Rw_n$, что $w_0 = y$ и $w_n = x$. Посредством $x{\uparrow}$ будем обозначать множество всех миров, достижимых из мира x за один шаг. Множество всех миров, достижимых из мира x за n шагов будем обозначать $x{\uparrow}^n$. Посредством $x{\uparrow}^\omega$ обозначим множество всех миров достижимых из мира x за конечное, отличное от нуля, число шагов. *Множество* $V \subseteq W$ будем называть *достижимым из мира* x, если $V \cap x{\uparrow} \neq \varnothing$, т. е. существует такой мир $y \in V$, что xRy.

Элемент $d \in W$ будем называть *корнем* множества W, если для любого $x \in W$, кроме, может быть, $x = d$, выполняется условие $x \in d{\uparrow}^\omega$.

Обобщенной шкалой с выделенным корнем будем называть четверку $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$, в которой

W — множеством возможных миров;

R — отношение достижимости на W, такое, что множество W имеет корень;

Π — некоторое подмножество множества 2^W, содержащее W и замкнутое относительно булевых операций $\cap$, $\cup$, $\overline{}$ и операции $\Box$, которую определим следующим образом:

$$\Box Q = \{x \mid x \in W \text{ и } \forall y \in W(xRy \Rightarrow y \in Q)\},$$

(множество Π называем *множеством возможных значений шкалы*);

d — корень множества W, называемый *выделенным миром.*

Заметим, что множество Π замкнуто также относительно операции $\Diamond$, которую определяют следующим образом:

$$\Diamond Q = \{x \mid x \in W \text{ и } \exists y(xRy \text{ и } y \in Q)\} = \overline{\Box\overline{Q}}.$$

Обобщенные шкалы, в которых $\Pi = 2^W$, будем называть *шкалами Крипке с выделенным корнем* и обозначать их как тройку $\mathfrak{F} = \langle W, R, d\rangle$. Шкалу будем называть *транзитивной*, если транзитивно ее отношение достижимости.

Пару $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, \nu\rangle$ будем называть *моделью*, если $\mathfrak{F}$ — обобщенная шкала, ν — *оценка* пропозициональных переменных на этой шкале, то есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной некоторое множество из Π.

Истинность формулы φ в точке w шкалы $\mathfrak{F}$ при оценке ν определим обычным образом ([1], с. 64). Тот факт, что формула φ истинна в точке w шкалы $\mathfrak{F}$ при оценке ν будем обозначать следующим образом: $w \models^\nu \varphi$ (или просто $w \models \varphi$, если ясно, о какой оценке идет речь). Будем говорить, что формула φ *истинна в модели* $\mathfrak{M}$ (пишем $\mathfrak{M} \models \varphi$), если она истинна в корне шкалы.

Формула *общезначима на шкале* $\mathfrak{F}$ (пишем $\mathfrak{F} \models \varphi$), если φ истинна во всякой модели $\mathfrak{M}$, построенной на шкале $\mathfrak{F}$, то есть если она истинна в корне шкалы при любой оценке.

Множество шкал $\mathfrak{C}$ *характеризует* логику L, если для любой формулы φ имеет место тот факт, что $\varphi \in L \Leftrightarrow \forall \mathfrak{F} \in \mathfrak{C}\ (\mathfrak{F} \models \varphi)$. В этом случае будем говорить также, что логика L *полна* относительно множества шкал $\mathfrak{C}$.

Будем говорить, что шкала $\mathfrak{F}$ является *шкалой логики* L, если все формулы логики L общезначимы на этой шкале. Множество всех шкал логики L будем обозначать как $Fr(L)$.

Класс шкал $\mathfrak{C}$ *тотален* для некоторого семейства логик, если каждая логика из этого семейства характеризуется множеством шкал из некоторого подкласса класса $\mathfrak{C}$.

Обобщенную шкалу с выделенным корнем будем называть:

– *дифференцированной*, если выполнено условие

$$\forall x, y \in W\ (x \neq y \Leftrightarrow \exists Q \in \Pi\ (x \in Q\ ,\ y \notin Q));$$

– *тесной*, если выполнено условие

$$\forall x, y \in W\ (xRy \Leftrightarrow \forall Q \in \Pi\ (y \in Q \Rightarrow x \in \Diamond Q));$$

– *рафинированной*, если шкала является дифференцированной и тесной.

Как известно [1] (Теорема 8.61, стр. 261), множество всех рафинированных обобщенных шкал с выделенным корнем тотально для всех логик из $Ext\mathbf{K}$. Ниже обобщенные рафинированные шкалы с выделенным корнем будем называть просто обобщенными шкалами.

2. Семантика квазинормального напарника логики K4

Обобщенную шкалу $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ будем называть *одношаговой*, если $d\uparrow^{\omega} \setminus d\uparrow = \varnothing$.

Лемма 1. *Шкала $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ является одношаговой тогда и только тогда, когда $d\uparrow^{2} \setminus d\uparrow = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть в шкале $d\uparrow^{2} \setminus d\uparrow = \varnothing$. Докажем индукцией по числу шагов, за которое мир x достижим из корня, что в ней $d\uparrow^{\omega} \setminus d\uparrow = \varnothing$.

Пусть мир x достижим из корня за два шага. Очевидно, что он достижим и за один шаг.

Допустим, что для некоторого числа n верно, что если мир x достижим из корня за n шагов, то он достижим и за один шаг.

Пусть некоторый мир x достижим из корня за $n+1$ шаг, то есть существует цепочка миров $dRz_1R\ldots Rz_{n-1}yRx$. Поскольку мир y достижим из корня за n шагов, то по индукционному предположению dRy. Тогда, мир x достижим из корня за два шага. □

Теорема 1. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ общезначима формула tra тогда и только тогда, когда эта шкала является одношаговой.*

Доказательство. Пусть $x \in d\uparrow^2 \setminus d\uparrow$. Тогда существует мир $y \in d\uparrow$ такой, что yRx, $y \neq d$ и $y \neq x$. В силу рафинированности шкалы, в Π существует такое множество X, что $y \notin X$ и $x \in X$. Так как $\neg dRx$, то существует такое множество Y, что $x \in Y$ и $d \notin \Diamond Y$. Рассмотрим множество $Z = X \cap Y$. Так как $x \in Z$ и yRx, то $y \in \Diamond Z$. Поскольку $Z \subseteq Y$, то $d \notin \Diamond Z$. Тогда при оценке $\nu(p) = \overline{Z}$ в мире d опровергается формула tra.

Пусть при некоторой оценке ν верно, что $d \not\models^\nu tra$, то есть $d \models^\nu \Box p$ и $d \models^\nu \Diamond^2\neg p$. Тогда существует такое непустое множество $X \in \Pi$, что $\nu(p) = X$ и $X \neq W$. Таким образом, $d \in \Box X$ и $d \in \Diamond^2\overline{X}$. Следовательно, существуют такие миры x и y, что $dRxRy$ и $y \notin X$. Заметим, что $\neg dRy$. Таким образом, $y \in d\uparrow^2 \setminus d\uparrow$. □

Обобщенную шкалу будем называть *1-транзитивной*, если для любого мира $x \in d\uparrow$ верно, что отношение R на множестве $x\uparrow^\omega$ является транзитивным.

Теорема 2. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ общезначима формула $\Box tra$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — это 1-транзитивная шкала.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть в шкале существуют такой мир x, что dRx и при этом отношение R на множестве $x\uparrow^\omega$ не является транзитивным, то есть во множестве $x\uparrow^\omega$ существуют такие различные миры y и z, что $x \neq y$, xRy, yRz и $\neg xRz$. Тогда в шкале существует такое множество $Z \in \Pi$, что $z \in Z$, $y \notin Z$, $y \in \Diamond Z$ и $x \notin \Diamond Z$. Зададим на шкале оценку ν следующим образом: $\nu(p) = W \setminus Z$. Тогда при этой оценке $x \models \Box p$, и $y \not\models \Box p$. Таким образом, $x \not\models \Box\Box p$, и значит, в шкале опровергается формула $\Box tra$.

($\Leftarrow$) Пусть в шкале опровергается формула $\Box tra$. Тогда в шкале существует такой достижимый из корня мир x, что при некоторой оценке ν выполнено $x \models \Box p$ и $x \not\models \Box\Box p$. Последнее означает, что в шкале существует такой мир y, что xRy и $y \in \Diamond(\overline{\nu(p)})$, а значит, $\overline{\nu(p)} \neq \varnothing$, и следовательно, существует такой мир $z \in \overline{\nu(p)}$, что yRz. Так как $x \models \Box p$, то $\neg xRz$. Таким образом, отношение R не транзитивно на множестве $x\uparrow^\omega$. □

Несложно заметить, что любая транзитивная шкала является одношаговой и 1-транзитивной.

Теорема 3. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ общезначима формула $\Box^+ tra$ тогда и только тогда, когда отношение достижимости в этой шкале транзитивно.*

Доказательство. Поскольку формула tra и $\Box tra$ общезначимы на этой шкале, то она является одношаговой и 1-транзитивной. Пусть отношение R не транзитивно, то есть в шкале существуют такие x, y и z, что xRy, yRz и $\neg xRz$. Тогда $x \notin d\uparrow$, и значит, $x = d$. В этом случае $\neg dRz$. Следовательно, $z = d$ и $d \in d\uparrow^2$. В силу того, что шкала одношаговая, это означает, что $d \in d\uparrow$. Таким образом, отношение R транзитивно. □

Следствие 1. *Логика* **K4** *полна относительно множества всех обобщенных транзитивных шкал.*

Следствие 2. *Класс всех обобщенных транзитивных шкал тотален для логик из Ext***K4**.

3. Семантика квазинормального напарника логики GL

Пусть $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ — некоторая шкала и множество $Q \in \Pi$. Мир $w \in Q$ будем называть *слепым в* Q, если $w \notin \Diamond Q$. Иначе говоря, $w \in Q \setminus \Diamond Q$. Заметим, что слепым может быть только иррефлексивный мир.

Лемма 2. *В шкале* $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ *общезначима формула* la *тогда и только тогда, когда для любого непустого множества* $Q \in \Pi$ *верно, что если* $Q \cap d\uparrow \neq \varnothing$, *то и* $(Q \setminus \Diamond Q) \cap d\uparrow \neq \varnothing$, *то есть если множество* Q *достижимо из корня, то в нем есть по крайней мере один слепой в* Q *мир, достижимый из корня.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть в шкале $\mathfrak{F}$ при любой оценке ν истинна формула la. При этом имеется непустое множество $Q \in \Pi$ и существует такой мир $x \in Q$, что dRx. Рассмотрим следующую оценку: $\nu(p) = W \setminus Q$, $\overline{\nu(p)} = Q$. Тогда $d \not\models \Box p$. Значит, $d \not\models \Box(\Box p \to p)$, и следовательно, существует такой мир y, что dRy, $y \models \Box p$ и $y \not\models p$. Таким образом, $y \in \overline{\nu(p)} = Q$ и $y \notin \Diamond\overline{\nu(p)} = \Diamond Q$. Тогда, по определению, мир y слепой в Q.

($\Leftarrow$) Пусть шкала $\mathfrak{F}$ обладает указанным свойством, но существует такая оценка ν, что $\mathfrak{F} \not\models la$, то есть $d \not\models \Box p$ и $d \models \Box(\Box p \to p)$. Таким образом, с одной стороны, для любого мира v такого, что $dRv, v \models \Box p \to p$, то есть $v \in \nu(p) \cup \Diamond\overline{\nu(p)}$. С другой стороны, так как $d \not\models \Box p$, то множество $\overline{\nu(p)} \neq \varnothing$ и $d \in \Diamond\overline{\nu(p)}$. Таким образом, множество $\overline{\nu(p)}$ достижимо из корня, и значит в нем существует некоторый достижимый из корня и слепой в $\overline{\nu(p)}$ мир w, то есть такой, что $w \notin \Diamond\overline{\nu(p)}$. Следовательно, $w \neq d$. Но dRw и при этом $w \models \Box p$ и $w \not\models p$, то есть $w \not\models \Box p \to p$, и тогда $d \not\models \Box(\Box p \to p)$. Противоречие. $\Box$

Следствие 3. *В одношаговой шкале* $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ *общезначима формула* la *тогда и только тогда, когда любое непустое множество* Q *из* Π *содержит по крайней мере один слепой в* Q *мир.*

Лемма 3. *В шкале* $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ *общезначима формула* $\Box la$ *тогда и только тогда, когда для любого непустого множества* Q *из* Π *и любого мира* $x \in d\uparrow$ *верно, что если из* x *достижимо множество* Q, *то достижим и некоторый слепой в этом множестве мир.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть в шкале $\mathfrak{F}$ при любой оценке ν истинна формула $\Box la$, множество $Q \in \Pi$ и $Q \neq \varnothing$. Рассмотрим следующую оценку: $\nu(p) = W \setminus Q$, $\overline{\nu(p)} = Q$.

Если множество Q не достижимо ни из одного мира шкалы, то в любом мире шкалы истинна формула $\Box p$. (Если это одношаговая шкала, то это верно для всех миров, кроме корня.)

Пусть в шкале есть такой мир $x \in d\uparrow$, что из него достижимо множество Q. Тогда $x \not\models^{\nu} \Box p$ и, следовательно, $x \not\models^{\nu} \Box(\Box p \to p)$. Таким образом, $x \in \Diamond(Q \setminus \Diamond Q)$.

($\Leftarrow$) Пусть шкала $\mathfrak{F}$ обладает указаным свойством, но существует такая оценка ν, что $\mathfrak{F} \not\models \Box la$, то есть в шкале существует такой мир $x \in d\uparrow$, что $x \not\models la$. Таким образом, $x \in \Diamond\overline{\nu(p)}$ и $x \notin \Diamond(\overline{\nu(p)} \cap \Box\nu(p)) = \Diamond(\overline{\nu(p)} \setminus \Diamond\overline{\nu(p)})$. Следовательно, из мира x достижимо множество $\Diamond\overline{\nu(p)}$, но не достижим ни один слепой в этом множестве мир. $\Box$

Следствие 4. *В одношаговой шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула $\Box la$ тогда и только тогда, когда для любого мира $x \in d \uparrow$ и любого непустого множества Q из Π верно, что если из x достижимо множество Q, то достижим и некоторый слепой в этом множестве мир.*

Лемма 4. *Если в шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула la, то $\mathfrak{F}$ является одношаговой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \models la$ и при этом она не является одношаговой. Это означает, что в шкале есть такие миры x и y, что $dRxRy$ и $\neg dRy$. Тогда, в силу рафинированности существует такое множество $Y \in \Pi$, что $y \in Y$, $x \notin Y$ и $d \notin \Diamond Y$. Аналогично, существует такое множество $X \in \Pi$, что $x \in X$ и $y, d \notin X$.

Положим $Z = X \cap \Diamond Y$ и $Q = Z \cup Y$. Заметим, что $Z \neq \varnothing$, так как $x \in Z$.

Рассмотрим оценку $\nu(p) = W \setminus Q$. При этой оценке $d \not\models^\nu \Box p$, следовательно, $d \not\models^\nu \Box(\Box p \to p)$. То есть существует такой мир v, что dRv и $v \in \overline{\nu(p)} \cap \Box\nu(p)$. Таким образом, $v \in (Q \setminus \Diamond Q)$. Следовательно, $v \in Z \cup Y$.

Если $v \in Z$, то $v \in \Diamond Y \subseteq \Diamond Q$. Противоречие. Следовательно, $v \in Y$, но тогда $d \in \Diamond Y$, что опять приводит к противоречию. $\Box$

Следствие 5. *$tra \in \mathbf{K} + la$.*

Верна следующая теорема.

Теорема 4. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула la тогда и только тогда, когда это одношаговая шкала, удовлетворяющая условию Следствия 3.*

Лемма 5. *Если в шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула $\Box la$, то она является 1-транзитивной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \models \Box la$ и при этом она не является 1-транзитивной. Тогда в шкале существуют такие миры x, y и z, что $x \in d\uparrow$, $x \neq y$, $z \neq y$, xRy, yRz и $\neg xRz$. В силу рафинированности, в шкале существует такое множество $Z \in \Pi$, что $z \in Z$, $y \notin Z$, $y \in \Diamond Z$ и $x \notin \Diamond Z$. Аналогично, существует такое множество $Y \in \Pi$, что $y \in Y$ и $x, z \notin Y$.

Положим $U = Y \cap \Diamond Z$ и $Q = Z \cup U$. Тогда $U \neq \varnothing$, так как $y \in Z$.

Рассмотрим оценку $\nu(p) = W \setminus Q$. При этой оценке $x \not\models^\nu \Box p$, следовательно, $x \not\models^\nu \Box(\Box p \to p)$. То есть существует такой мир v, что xRv и $v \in \overline{\nu(p)} \cap \Box\nu(p)$. Таким образом, $v \in (Q \setminus \Diamond Q)$. Следовательно, $v \in Z \cup U$.

Если $v \in Z$, то $v \in \Diamond Z \subseteq \Diamond Q$. Противоречие. Следовательно, $v \in Z$, но тогда $x \in \Diamond Z$, что опять приводит к противоречию. $\Box$

Следствие 6. *$\Box tra \in \mathbf{K} + \Box la$.*

Таким образом, верны следующие теоремы.

Теорема 5. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула $\Box la$ тогда и только тогда, когда это 1-транзитивная шкала, удовлетворяющая условию Следствия 4.*

Теорема 6. *В шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$ общезначима формула $\Box^+ la$ тогда и только тогда, когда это транзитивная шкала, в которой любое непустое множество $Q \in \Pi$ содержит непустое подмножество слепых в этом множестве миров и это подмножество достижимо из любого мира, из которого достижимо множество Q.*

Следствие 7. $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box^+ la$.

4. Логики, аксиоматизируемые формулами $(\Box)tra$ и $(\Box)la$

Введем следующие обозначения логик:

$\mathbf{K}tra = \mathbf{K} + tra$; $\mathbf{K}\Box tra = \mathbf{K} + \Box tra$;

$\mathbf{K}la = \mathbf{K} + la$; $\mathbf{K}\Box la = \mathbf{K} + \Box la$.

Лемма 6. *Верны следующие невыводимости:*

$\mathbf{K}tra \nvdash \Box tra$; $\mathbf{K}\Box tra \nvdash tra$; $\mathbf{K}la \nvdash \Box la$; $\mathbf{K}\Box la \nvdash la$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \langle W_1, R_1, d \rangle$ — шкала Крипке с выделенным корнем, в которой $W_1 = \{d, x, y, z\}$, $R_1 = \{dR_1x, dR_1y, dR_1z, xR_1y, yR_1z\}$.

Из Теоремы 1 следует, что $\mathfrak{F}_1 \in Fr(\mathbf{K}tra)$. При оценке ν_1, такой, что $\nu_1(p) = \{y\}$, имеем, что $d \not\models^{\nu_1} \Box tra$.

Из Теоремы 4 следует, что $\mathfrak{F}_1 \in Fr(\mathbf{K}la)$. При оценке ν_2, такой, что $\nu_2(p) = \varnothing$, имеем, что $d \not\models^{\nu_2} \Box la$.

Пусть $\mathfrak{F}_2 = \langle W_2, R_2, d \rangle$ — такая шкала Крипке с выделенным корнем, что $W_2 = \{d, x, y\}$, $R_2 = \{dR_2x, xR_2y\}$.

Из Теоремы 2 следует, что $\mathfrak{F}_1 \in Fr(\mathbf{K}\Box tra)$. При оценке ν_3, такой, что $\nu_3(p) = \{x\}$, имеем, что $d \not\models^{\nu_3} tra$.

В силу Теоремы 5, эта же шкала принадлежит множеству $Fr(\mathbf{K}\Box la)$, и при этом $d \not\models^{\nu_2} la$. □

Лемма 7. *Верны следующие невыводимости:*

$\mathbf{K}tra \nvdash la$; $\mathbf{K}tra \nvdash \Box la$; $\mathbf{K}\Box tra \nvdash la$; $\mathbf{K}\Box tra \nvdash \Box la$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_3 = \langle W_3, R_3, d \rangle$ — шкала Крипке с выделенным корнем, в которой $W_3 = \{d\}$, $R_3 = \{dR_3d\}$.

Из Теорем 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F}_3 \in Fr(\mathbf{K}tra) \cap Fr(\mathbf{K}\Box tra)$. При оценке ν_2, такой, что $\nu_2(p) = \varnothing$, имеем, что $d \not\models^{\nu_2} la$ и $d \not\models^{\nu_2} \Box la$. □

Лемма 8. *Если в модели $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, \nu \rangle$, определенной на транзитивной шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\} \rangle$, истинна формула $\Box la$, то в ней истинна и формула la.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \not\models^{\nu} la$. Тогда одновременно верно, что $d \in \Diamond\overline{\nu(p)}$ и $d \in \Box(\Diamond\overline{\nu(p)} \cup \nu(p))$. Последнее означает, что для любого мира $x \in d\uparrow$, имеем, что $x \in \Diamond\overline{\nu(p)} \cup \nu(p)$.

Пусть $x \in \Diamond\overline{\nu(p)}$. Так как $x \models^{\nu} la$, то существует такой мир y, что xRy и $y \in \Box\nu(p) \cap \overline{\nu(p)}$. В силу транзитивности, dRy, и значит $d \notin \Box(\Diamond\overline{\nu(p)} \cup \nu(p))$. Следовательно, наше предположение не верно, и $x \in \nu(p)$.

Таким образом, для любого $x \in d\uparrow$ верно, что $x \in \nu(p)$, то есть $\overline{\nu(p)} \nsubseteq d\uparrow$, а значит, $d \notin \Diamond\overline{\nu(p)}$. Противоречие. □

Следствие 8. $\Box la \to la \in \mathbf{K4}$.

Лемма 9. *Если в транзитивной шкале* $\mathfrak{F} = \langle W, R, \Pi, \{d\}\rangle$ *общезначима формула* la, *то в ней общезначима и формула* $\Box la$.

Доказательство. Пусть при некоторой оценке $\nu_1(p) = Q \in \Pi$ в шкале $\mathfrak{F}$ опровергается формула $\Box la$. Следовательно, существует такой мир $x \in d\uparrow$, что $x \not\models^{\nu_1} \Box p$. Значит, существует такой мир y, что xRy и $y \in \overline{Q}$. Таким образом, множество $\overline{Q} \neq \varnothing$. Кроме того, получаем, что $d \in \Diamond\overline{Q}$, а так как $d \models^{\nu_1} la$, то $d \in \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$.

Рассмотрим следующую оценку:

$$\nu_2(p) = Q \cup (\Box Q \cap \overline{Q}) \cup \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q}) = Q \cup \Box Q \cup \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q}) = X.$$

Заметим, что, для любого мира $w \in X$, верно, что $w \models^{\nu_2} \Box p \to p$.

Так как $x \models^{\nu_1} \Box(\Box p \to p)$, то $y \notin \Box Q$ и $y \notin \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$. Следовательно, множество $\overline{X} \cap d\uparrow \neq \varnothing$, так как $y \in \overline{X} \cap d\uparrow$.

Рассмотрим мир $w \in \overline{X}$. Для него верно, что $w \notin \Box Q$, $w \notin \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$. Так как $\overline{X} = \overline{Q} \cap \Diamond\overline{Q} \cap \Box(\Diamond\overline{Q} \cup Q)$, то для любого мира v, такого, что wRv верно, что $v \in \Diamond\overline{Q} \cup Q$.

Пусть при этом $w \not\models^{\nu_2} \Box p \to p$. Следовательно, $w \in \Box X$. Так как $w \notin \Box Q$, то $w\uparrow \neq \varnothing$. Таким образом, для любого мира v, такого, что wRv верно, что $v \in Q$, или $v \in \Box Q$, или $v \in \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$.

Если существует такой мир z, что wRz и при этом $z \in \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$, то $w \in \Diamond(\Box Q \cap \overline{Q})$. Противоречие. Таким образом, для любого мира v, такого, что wRv, верно, что $v \in Q$ или $v \in \Box Q$.

Если существует такой мир z, что wRz и $z \in \Diamond\overline{Q}$, то $v \notin \Box Q$, и значит, $z \in Q$.

Таким образом, для любого мира v, такого, что wRv, верно, что $v \in Q$, то есть, $w \in \Box Q$. Из полученного противоречия следует, что наше предположение неверно, и значит, $w \models^{\nu_2} \Box p \to p$.

Получаем, что, для любого $w \in d\uparrow$, верно, что $w \models^{\nu_2} \Box p \to p$. Следовательно, в силу того, что $\overline{X} \cap d\uparrow \neq \varnothing$, получим, что $d \not\models^{\nu_2} la$. $\Box$

Из Следствия 6, Следствия 8 и Лемм 4, 5 и 9 непосредственно следует

Теорема 7. $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box^+ la = \mathbf{K}tra + \Box la = \mathbf{K}\Box tra + la = \mathbf{K4} + \Box la = \mathbf{K4} + la$.

Исходя из полученных выше результатов, в частности, Лемм 6–9, мы можем утверждать, что решетка квазинормальных логик содержит подрешетку $\mathfrak{L}$, содержащую логики $\mathbf{K4}$ и $\mathbf{GL}$, которая представлена на Рис. 1. Как обычно, отрезки, соединяющие точки, соответствующие логикам, изображают отношение решеточного порядка, который совпадает с отношением $\subseteq$ (с учетом рефлексивности и транзитивности).

5. Решетки $Ext\mathbf{K}$ и $\mathbb{N}Ext\mathbf{K}$, их взаимосвязь

Заметим, что для любого множества Γ операции $\varnothing + \Gamma$ и $\varnothing \oplus \Gamma$ являются операциями замыкания на решетке всех подмножеств множества формул. При этом для любой логики L верно, что $\varnothing + (L \cup \Gamma) = L + \Gamma$ и $\varnothing \oplus (L \cup \Gamma) = L \oplus \Gamma$.

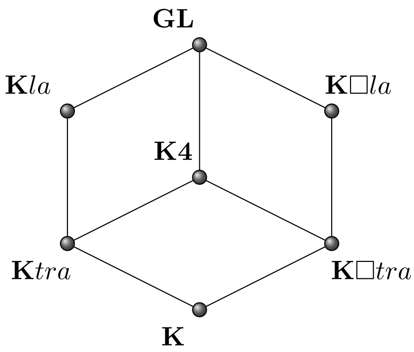

Рис. 1: Подрешетка $\mathfrak{L}$ решетки квазинормальных логик

Рассмотрим отображение $\mathbb{N} : Ext\mathbf{K} \to \mathbb{N}Ext\mathbf{K}$, которое любой логике $L = \mathbf{K}+\Gamma$, ставит в соответствие логику $\mathbb{N}L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, которую будем называть ***нормальным напарником*** квазинормальной логики L.

Пусть $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ и $\mathfrak{G} = \langle U, S\rangle$ — некоторые частично упорядоченные множества, с отношениями порядка R и S. Будем говорить, что отображение $f : W \to U$ является ***p-морфизмом*** множества $\mathfrak{F}$ на множество $\mathfrak{G}$, если выполняются условия:

1) $f(W) = U$;

2) $\forall x, y \in W(xRy \Rightarrow f(x)Sf(y))$;

3) $\forall x, y \in W(f(x)Sf(y) \Rightarrow \exists z \in W(xRz$ и $f(z) = f(y)))$.

Верна следующая теорема.

Теорема 8. *Отображение $\mathbb{N}$ является p-морфизмом решетки $Ext\mathbf{K}$ на решетку $\mathbb{N}Ext\mathbf{K}$.*

Доказательство. Пункт 2) следует из монотонности оператора замыкания $\varnothing \oplus (L \cup \Gamma)$ и того факта, что $\varnothing \oplus (L \cup \Gamma) = L \oplus \Gamma$.

Докажем пункт 3). Пусть $\mathbf{K}\oplus\Gamma \subseteq \mathbf{K}\oplus\Delta$. Пусть L — квазинормальный напарник логики $\mathbf{K} \oplus \Delta$. Очевидно, что $\mathbf{K} + \Gamma \subseteq (\mathbf{K} \oplus \Delta) = L$. При этом $\mathbb{N}L = \mathbb{N}(\mathbf{K} + \Delta)$. □

Поскольку множества $Ext\mathbf{K}$ и $\mathbb{N}Ext\mathbf{K}$ образуют решетки, то пункт 3) из условия p-морфизма может быть усилен следующим образом.

Теорема 9. *Для любых логик $L_1, L_2 \in Ext\mathbf{K}$ верно, что если $\mathbb{N}L_1 \subseteq \mathbb{N}L_2$, то $\mathbb{N}(L_1 \dot{+} L_2) = \mathbb{N}L_2$.*

Доказательство. Пусть $L_1 = \mathbf{K} + \Gamma$, $L_2 = \mathbf{K} + \Delta$ и $\mathbf{K} \oplus \Gamma \subseteq \mathbf{K} \oplus \Delta$. Так как $\mathbf{K} + \Gamma \subseteq \mathbf{K} + (\Gamma \cup \Delta)$, то $\mathbf{K} \oplus \Delta \subseteq \mathbf{K} \oplus (\Gamma \cup \Delta)$. Докажем обратное включение. Очевидно, что $\mathbf{K} \cup \Gamma \cup \Delta \subseteq \mathbf{K} \oplus \Delta$. Тогда, $\varnothing \oplus (\mathbf{K} \cup \Gamma \cup \Delta) \subseteq \varnothing \oplus (\mathbf{K} \oplus \Delta)$. То есть $\mathbf{K} \oplus (\Gamma \cup \Delta) \subseteq \mathbf{K} \oplus \Delta$, так как $\varnothing \oplus (\mathbf{K} \oplus \Delta) = \mathbf{K} \oplus \Delta$. □

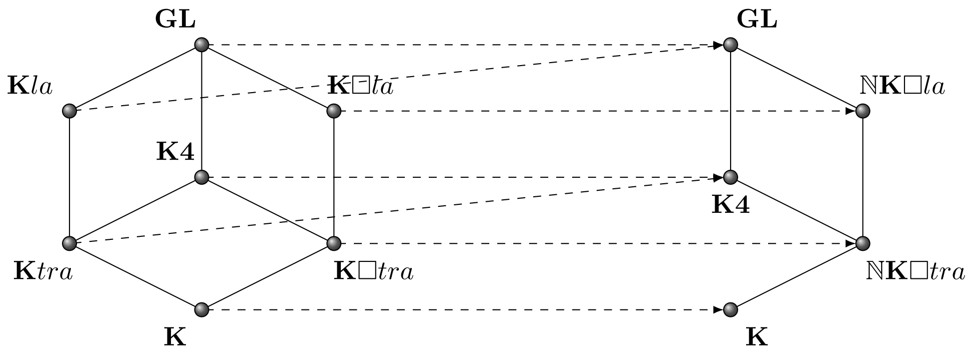

Рис. 2: Отображение $\mathbb{N}$ *подрешетки* $\mathfrak{L}$ *в подрешетку* $\mathbb{N}\mathfrak{L}$

Поскольку далее мы будем рассматривать подрешетку $\mathbb{N}\mathfrak{L}$, состоящую из нормальных напарников элементов подрешетки $\mathfrak{L}$, то вкратце напомним здесь реляционную семантику нормальных логик. (Более подробно с ней можно ознакомится по [1], с. 64.)

Пару $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$, где W — множество миров, а R — отношение достижимости на W, будем называть шкалой Крипке. Пару $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, \nu\rangle$ будем называть *моделью Крипке*, если $\mathfrak{F}$ — шкала Крипке, а ν — *оценка* пропозициональных переменных на шкале, то есть функция, отображающая множество пропозициональных переменных во множество 2^W.

Будем говорить, что формула φ *истинна в модели* $\mathfrak{M}$ (пишем $\mathfrak{M} \models \varphi$), если она истинна в каждом мире этой модели. Формула *общезначима на шкале* $\mathfrak{F}$ (пишем $\mathfrak{F} \models \varphi$), если φ истинна во всякой модели $\mathfrak{M}$, построенной на шкале $\mathfrak{F}$, то есть если она истинна в каждом мире шкалы при любой оценке.

Лемма 10. *Верны следующие невыводимости:*

$$tra \notin \mathbf{K} \oplus \Box la;\ \ la \notin \mathbf{K} \oplus \Box la;\ \ tra \notin \mathbf{K} \oplus \Box tra;\ \ la \notin \mathbf{K} \oplus \Box tra;\ \ \Box la \notin \mathbf{K} \oplus \Box tra.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_4 = \langle W_4, R_4\rangle$ — шкала Крипке, в которой $W_4 = \{x, y, z\}$, $R_4 = \{xR_4y, yR_4z\}$.

Не сложно заметить, что $\mathfrak{F}_4 \models \Box tra$ и $\mathfrak{F}_4 \models \Box la$. Для оценки ν_1, такой, что $\nu_1(p) = \{y\}$, имеем, что $x \not\models^{\nu_1} tra$. В этой же шкале при оценке ν_2, такой, что $\nu_2(p) = \varnothing$, имеем, что $x \not\models^{\nu_2} la$.

Пусть $\mathfrak{F}_5 = \langle W_5, R_5\rangle$ — шкала Крипке, в которой $W_5 = \{x\}$, $R_5 = \{xR_5x\}$.

Не сложно заметить, что $\mathfrak{F}_5 \models \Box tra$ и при этом, $x \not\models^{\nu_2} \Box la$. □

На Рис. 2 изображено отображение $\mathbb{N}$ подрешетки $\mathfrak{L}$ на подрешетку $\mathbb{N}\mathfrak{L}$.

Заключение

Как следует из Теоремы 1 и Леммы 4, обобщенные шкалы, в которых общезначимы формулы tra и la, в отличие от случая нормальных модальных логик, не обязаны быть транзитивными. Они удовлетворяют более слабому условию одношаговости. При этом $tra \in \mathbf{K}la$.

Однако шкалы квазинормальных напарников логик **K4** и **GL**, как и вслучае нормальных логик, являются транзитивными. Вследствие этого мы имеем несколько неожиданные аксиоматизации квазинормального напарника логики **GL** (Теорема 7).

Отображение $\mathbb{N}$, которое каждой квазинормальной логике ставит в соответствие ее нормального напарника, является р-морфизмом, удовлетворяющим условию изложенному в Теореме 9. Представляется интересным установить, является ли отображение $\mathbb{N}$ решеточным верхним гомоморфизмом и (или) решеточным нижним гомоморфизмом.

Открытые вопросы возникают и по поводу устройства подрешетки $\mathfrak{L}$. Если понятно, что для логики **GL** верно, что $\mathbf{GL} = \mathbf{K}la\dot{+}\mathbf{K4} = \mathbf{K4}\dot{+}\mathbf{K}\Box la = \mathbf{K}la\dot{+}\mathbf{K}\Box la$, то вопрос о месте логик $\mathbf{K4} \cap \mathbf{K}la$ и $\mathbf{K4} \cap \mathbf{K}\Box la$, относительно элементов подрешетки $\mathfrak{L}$, остается открытым. (Отметим, что $(\mathbf{K} + \varphi) \cap (\mathbf{K} + \psi) = \mathbf{K} + \varphi \vee \psi$.)

Представляется также, что достаточно интересные результаты могут возникнуть, если рассмотреть подрешетку, которая получится из подрешетки $\mathfrak{L}$ в результате пополнения ее логиками $\mathbf{K} + \Box^n la$ и $\mathbf{K} + \Box^n tra$ для произвольного $n > 1$.

Список литературы

[1] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal Logic. Oxford: Oxford University Press, 1997.

[2] Segerberg K. An Essay in Classical Modal Logic. Filosofiska studier 13. Uppsala: University of Uppsala, 1971.

[3] Zakharyaschev M.V. Canonical formulas for K4. Part I: Basic results // Journal of Symbolic Logic. 1992. № 57. Pp. 1377–1402.

[4] Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A. Advanced Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic. Eds. by D.M. Gabbay, F. Guenthner. 2nd edition. Vol. 3. Netherlands: Springer, 2001. Pp. 83–266. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0454-0

[5] Горбунов И.А. Модальные квазинормальные логики без независимой аксиоматизации: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2006.

Образец цитирования

Горбунов И.А. Квазинормальные напарники модальных логик K4 и GL // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 98–110. https://doi.org/10.26456/vtpmk521

Сведения об авторах

1. **Горбунов Игорь Анатольевич**
доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского ГУ.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: *i_gorbunov@mail.ru*

QUASI-NORMAL PARTNERS OF MODAL LOGICS K4 AND GL

Gorbunov Igor Anatolievich
Asscoiate professor at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Received 11.09.2018, revised 03.12.2018.

The paper considers properties of relational models for quasi-normal modal logics containing the transitivity formula $\Box p \to \Box\Box p$ and (or) the Löb formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$. It is proved that the accessibility relation in refined relational models for quasi-normal companions of such logics as **K4** and **GL**, as in the normal case, is transitive. Questions concerned axiomatization of the quasi-normal companion of **GL** under such logics as **K4** and **K** are considered. The following fragments are investigated: the fragment of the lattice of quasi-normal logics containing the transitivity formula and (or) the Löb formula and the fragment of the lattice of normal companions of these logics. We consider the function which maps a quasi-normal logic to its normal companion. It is proved that this function is a pseudo-epimorphism.

Keywords: quasi-normal logics, general refined frames with distinguished points, lattice of quasi-normal logics.

Citation

Gorbunov I.A., “Quasi-normal partners of modal logics K4 and GL”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 4, 98–110. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk521

References

[1] Chagrov A., Zakharyaschev M., *Modal Logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[2] Segerberg K., *An Essay in Classical Modal Logic*, Filosofiska studier 13, University of Uppsala, Uppsala, 1971.

[3] Zakharyaschev M.V., “Canonical formulas for K4. Part I: Basic results”, *Journal of Symbolic Logic*, 1992, № 57, 1377–1402.

[4] Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A., “Advanced Modal Logic”, *Handbook of Philosophical Logic*. V. 3, 2nd edition, eds. D.M. Gabbay, F. Guenthner, Springer, Netherlands, 2001, 83–266, https://doi.org/10.1007/978-94-017-0454-0.

[5] Gorbunov I.A., *Modalnye kvazinormalnye logiki bez nezavisimoj aksiomatizatsii*, dis. ... kand. fiz.-mat. nauk, Tver, 2006 (in Russian).