Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2018. №4
С. 226–232.

УДК 519.854.2, 372.851

ОБ УСЛОВИЯХ СВЕДЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА К ПОИСКУ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА

Н.М. Гордеева[1], А.О. Куликов[2]

[1,2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва

Установлено, что решение задачи коммивояжера в учебной и научной литературе часто отождествляется с поиском гамильтонова цикла, что верно только для задач с определенными ограничениями на матрицу тарифов – она должна быть метрической. Целью и новизной исследования является установление критериев применимости методов, созданных для поиска гамильтонова цикла, для решения задачи коммивояжера. Полученные результаты позволяют получать оптимальные решения при любой постановке задачи, что расширяет применимость задачи коммивояжера на любые области экономики. В случае, когда постановку задачи нельзя считать метрической, предлагается дополнение алгоритма шагами по модификации матрицы тарифов с целью сделать ее метрической. Кроме того, для частного случая при наличии симметричных нулей в матрице впервые предложен простой и быстрый способ поиска решения с помощью кластеризации.

Ключевые слова: *задача коммивояжера, математическая модель, гамильтонов цикл.*

При использовании математических методов для решения экономических и управленческих задач необходим выбор или создание подходящей математической модели, адекватной поставленной задаче, и имеющей необходимый уровень сложности. Одной из широко используемых математических моделей является оптимизационная задача коммивояжера, при которой целевой функцией является «стоимость» перемещения между разными «городами», а методы решения хорошо изучены и входят в учебный план студентов практически всех экономических направлений. Однако использовать готовые алгоритмы решения следует с осторожностью, потому что заметить ошибки формализации при создании модели сложнее, чем заметить вычислительные ошибки. Ниже будут подробно рассмотрены условия, которые надо выполнить при решении практических управленческих задач.

Задача коммивояжера рассматривается математиками уже двести лет и является одной из самых известных задач комбинаторной оптимизации [1, с. 3–60]. Бродячий торговец, благодаря которому математическая модель имеет такое «старомодное» название, должен обойти N городов с минимальными для себя затратами. В классической постановке в качестве затрат можно рассматривать расстояние между городами, стоимость переезда или затраченное время. Зная значения затрат для перемещения между всеми городами, можно составить матрицу, которую называют матрицей тарифов (платежной матрицей, матрицей затрат) $C=(c_{ij})$, состоящую из «стоимостей» c_{ij} перемещения из города i в город j. Коммивояжер каждый город должен посетить хотя бы один раз. Целевая функция, которую надо минимизировать, выглядит следующим образом:

$$S = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \to \min \ .$$

Переменная $x_{ij} = 1$, если общий путь коммивояжера содержит подпуть из города i в город j, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

Если для нескольких городов самым естественным будет решение перебором, то при увеличении числа городов, хотя бы до двух десятков решение уже недоступно ни одному современному компьютеру, потому что задача коммивояжера относится к числу NP-полных задач [2, с. 379]. Но если рассматривать расстояния между городами, то очевидно, что для элементов матрицы C будет всегда выполняться неравенство треугольника: $c_{ij} \le c_{ik} + c_{kj}$. Это очевидно, потому что путь из города в город напрямую всегда короче, чем путь через другой город. Этим обстоятельством воспользовались математики, когда предложили решать задачу коммивояжера с помощью нахождения кратчайшего гамильтонова цикла, т.е. такого цикла, когда каждый город посещается ровно один раз. Поиск кратчайшего маршрута сводится к поиску маршрута, состоящего из N перемещений из города в город. Уже во второй половине прошлого века появились методы динамического программирования, линейного программирования и метод ветвей и границ, который является одним из самых эффективных с алгоритмической точки зрения [3, с. 264; 4]. Все эти методы описываются в учебной литературе, но все обладают ограниченной применимостью из-за того, что годятся только для метрической постановки задачи [5, с. 5]. Условие метричности (выполнение неравенства треугольника) может не выполняться, если в качестве c_{ij} рассматриваются не расстояния, а стоимости переезда из города в город, а также они очевидно нарушаются при возможности выбрать разные виды транспорта. Если эти условия не выполняются, то следует или решать задачу другим способом, или провести некоторые преобразования матрицы тарифов, чтобы сделать ее метрической. Однако зачастую авторы учебников ничего не пишут об ограниченности применения гамильтонова цикла, более того, в учебных материалах можно видеть примеры нахождения гамильтонова цикла в качестве ответа, и этот ответ не является оптимальным. Внимательные читатели это замечают, но не получают ответа, почему так получается.

Наряду с путешествием бродячего торговца в любом учебнике указывается, что применение задачи коммивояжера очень широко, и перечисляются случаи ее применения для оптимизации различных производственных процессов. Например, переналадка оборудования, последовательная обработка деталей, балансирование сборочной линии, задача о расписании, разработка маршрутов специального персонала и т.п. При этом авторам настоящей статьи не удалось ни в одном учебном пособии найти требование проверки задачи на метричность. Но если нарушено это требование, то построение гамильтонова цикла не приведет к оптимальному решению задачи. Приведем простой пример. Пусть есть всего четыре состояния оборудования, затраты на переналадку описываются матрицей, указанной в таблице 1.

Таблица 1

Матрица затрат на переналадку оборудования

	1	2	3	4
1	-	0	4	10
2	0	-	15	3
3	12	2	-	0
4	1	7	0	-

Оптимальное решение ищется с помощью метода ветвей и границ, гамильтонов цикл выглядит так: $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$. Значение целевой функции равно $S = 10$. Однако если не действовать по шаблону, не искать решение в виде гамильтонова цикла, а поставить себя на место руководителя, стремящегося сократить расходы, то оптимальный путь будет выглядеть немного иначе, а затраты сократятся в 2,5 раза. Оптимальный маршрут $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 4 \to 1$. Значение целевой функции $S = 4$.

Есть всего два места, сообщение между которыми требует затрат. Это объединение состояний 1 и 2, а также объединение состояний 3 и 4. Т.е. есть всего два «города». Можно провести кластеризацию. Между этими «новыми» двумя «городами» (кластерами) можно найти оптимальный путь, а при необходимости посетить недостающие города бесплатно (как в данном примере пришлось отдельно посетить «город» 3, но это не потребовало дополнительных затрат).

Означает ли этот пример, что для постановки задачи в такой форме, где не выполняются неравенства треугольника, нет смысла использовать гамильтонов цикл? Нет, не означает. Можно преобразовать матрицу затрат так, чтобы выполнялось требование метричности, тогда применение гамильтонова цикла будет оправдано и приведет к оптимальному результату.

Утверждается, что если матрица тарифов содержит в симметричных позициях нули, то изменение алгоритма (и возможное нарушение требования единственности посещения каждой вершины графа) не ухудшит результаты целевой функции. На практике – значение уменьшится, если только тарифы не одинаковы во всех ненулевых точках.

Рассмотрим практическую реализацию – модифицированный алгоритм, по сравнению с классическим методом ветвей и границ [4].

Пусть есть матрица тарифов, где в некоторых позициях $c_{ij} = c_{ji} = 0$. Тогда мы «объединяем» города i и j, а именно: вычеркиваем строчку и столбец j, а в строчку и столбец i записываем наименьший из тарифов: $c_{ik} = \min\{c_{ik}, c_{jk}\}$, $c_{ki} = \min\{c_{ki}, c_{kj}\}$. Это означает, что когда нам нужно будет переместиться из города i или j в другой город, мы сможем выбрать меньший тариф, сэкономив на этом. Пример, пусть города A и B – соединены бесплатным соединением, надо переместиться в C. Но путь из A в C стоит 10 единиц, а из B в C стоит 20 единиц. Тогда вместо того, чтобы сразу перемещаться из B в C, мы сначала окажемся в A, из него уже переместимся в C в два раза дешевле. То же самое правило будет действовать с перемещением назад в город i или j.

Если проделать такие преобразования с матрицей в таблице 1, то получим следующий результат (останется два города), изображенный в таблице 2.

Таблица 2

Преобразованная матрица затрат на переналадку оборудования

	Новый 1 (1 – 2)	**Новый 2 (3 – 4)**
Новый 1 (1 – 2)	-	3
Новый 2 (3 – 4)	1	-

Матрица тарифов, которая получилась в итоге, стала меньше. Размерность сократилась на две единицы. Если таких пар городов несколько, то матрица значительно упростится.

Чтобы не запутаться, как осуществлять перемещения, после вычеркивания строки и столбца j, у оставшихся элементов можно ставить индексы, которые будут показывать, через какой узел надо двигаться.

Далее рассмотрим ситуацию, когда вместо нулей стоят положительные значения, но на порядок или два меньшие, чем другие значения в матрице (они являются о-малым от других тарифов). С точки зрения математического моделирования, их можно формально считать нулями и проделать ту же самую операцию, но не забыть учесть при итоговом расчете значения целевой функции.

Предлагаем рассмотреть еще один пример. Этот пример хорош тем, что демонстрирует широкое применение формальной постановки задачи коммивояжера. Рассматриваются маршруты сотрудников атомной электростанции [6]. В качестве затрат на «переезд» берется доза получаемого облучения. Такие задачи возникают при техническом обслуживании АЭС. Естественно, суммарная доза облучения минимизируется.

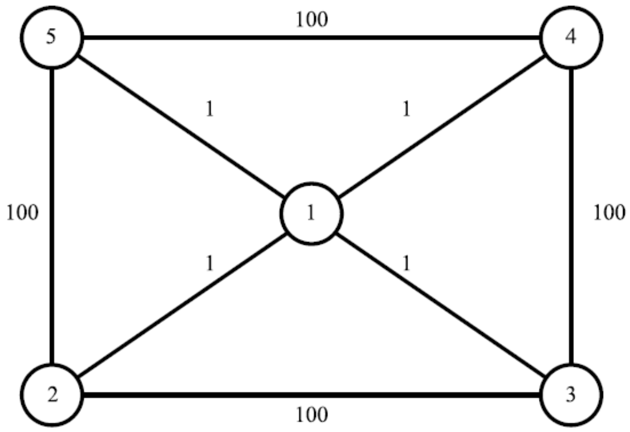


Рис. 1. Схема обслуживания участков АЭС с указанной дозой облучения [6].

На рисунке 1 схематично изображены возможные перемещения. Матрица C указана в таблице 3.

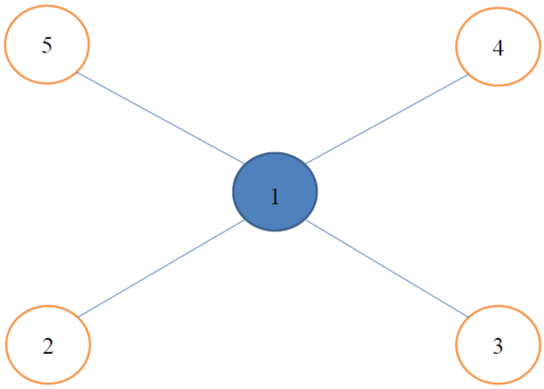
Таблица 3

Дозы облучения при перемещении между объектами АЭС

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	1	1	1	1
2	1	-	100	100	100
3	1	100	-	100	100
4	1	100	100	-	100
5	1	100	100	100	-

Нахождение оптимального гамильтонова цикла приводит к неприемлемому с точки зрения руководителя ответу. Построенный путь $1-2-3-4-5-1$, суммарная доза облучения 302. Но если отказаться от правила «один город – одно посещение», то можно получить ответ с суммарной дозой облучения 8 и маршрутом $1-2-1-3-1-4-1-5-1$. Это хорошо иллюстрируется графом, см. рис. 1.

Вообще говоря, при построении математической модели многое определяется автором модели. Например, неприемлемо большие дозы облучения можно считать в данном контексте равными $+\infty$, т.е. $c_{23}=100$ в сравнении с $c_{12}=1$ можно считать как $c_{23}=\infty$, и по этой дуге графа перемещаться фактически нельзя. И можно нарисовать другой граф (рис. 2), а в матрице тарифов вместо 100 будет стоять значение $+\infty$.



Р и с . 2 . Схема обслуживания участков АЭС (в реальности)

Оба варианта матрицы C содержат ячейки, не удовлетворяющие неравенству треугольника. Схема преобразования (метризации) матрицы приводится там же [6].

Сначала надо проверить, выполняются ли для всех тарифов неравенства треугольника: $c_{ij} \le c_{ik}+c_{kj}$. Если для каких-то c_{ij} выполняется обратное неравенство $c_{ij} > c_{ik}+c_{kj}$, то задача не является метрической и ее надо преобразовать, чтобы можно было применять методы поиска гамильтонова цикла. В данном случае ищется такой номер k, при котором сумма $c_{ik}+c_{kj}$ минимальна. В преобразованной матрице $c_{ij}=\min[(c)]_{ik}+c_{kj}$ (как будто формально введен еще один город k', «дубль» города k, чтобы каждый город посещался только один раз, т.е. чтобы строился гамильтонов цикл). В реальности, маршрут проходит через город k, но размер матрицы не увеличивается, чтобы не усложнять вычисления.

Если провести такие преобразования, то при обслуживании АЭС можно рассчитывать маршруты и дозы облучения по таблице 4.

После преобразования матрицы можно применять любой из методов поиска гамильтонова цикла, и в таком случае ответ будет оптимальным, потому что задача решается в метрической постановке.

Таблица 4

Преобразованная матрица доз облучения при обслуживании АЭС

	1	2	3	4	5
1	-	1	1	1	1
2	1	-	2	2	2
3	1	2	-	2	2
4	1	2	2	-	2
5	1	2	2	2	-

Таким образом, при моделировании практических задач необходимо обращать внимание на адекватность используемой математической модели. Задача коммивояжера – очень сильный инструмент, применяющийся практически во всех областях экономики. Но при постановке задачи нужно следить за тем, является ли она в данной постановке метрической. Формальная проверка матрицы довольно трудоемка и требует порядка N^4 операций. Однако автор модели иногда может сказать заранее, будут ли выполняться необходимые условия или нет, исходя из идеологии построения модели. Если же требуется преобразование, то его необходимо делать, несмотря на трудозатраты, потому что результат целевой функции может отличаться на порядки. Описанный выше алгоритм преобразования несложен и обязательно должен быть доведен до сведения обучающихся.

Список литературы

1. Мудров В.И. Задача о коммивояжере. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 64 с.
2. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. М.: Издательство «Экзамен», 2003. 448 с.
3. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. 640 с.
4. Галяутдинов Р.Р. Задача коммивояжера – метод ветвей и границ // Сайт преподавателя экономики. [2013]. URL: http://galyautdinov.ru/post/zadacha-kommivoyazhera (дата обращения: 15.09.2018).
5. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Выпуск 9. С. 3–33.
6. Ляхов О.А. Задачи маршрутизации в минимизации облучения персонала при техническом обслуживании АЭС / Труды 12-ой Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» под ред. С.И. Кабанихина, А.В. Кельманова, А.С. Родионова. Новосибирск, 12–16 декабря 2016 г.

THE TRAVELING SALESMAN AND THE CONDITIONS FOR SEARCHING FOR THE HAMILTONIAN CYCLE

N.M. Gordeeva[1], A.O. Kulikov[2]

[1,2]Bauman Moscow State Technical University
Moscow

The solution of the traveling salesman's problem is often identified in educational and scientific literature with the search for the Hamilton cycle. However this is correctly only for the tasks with certain restrictions on the tariff matrix that should be metric. Otherwise, the search for the Hamilton cycle leads to the solution, which will not be optimal. The purpose of the study is to establish the criteria for the applicability of the methods created for finding the Hamilton cycle and solving the traveling salesman's problem. The results allow us to obtain optimal solution for any formulation of the problem, which expands the applicability of the traveling salesman's problem to any areas of the economy. In the case the formulation of the problem cannot be considered metric, it is proposed to supplement the algorithm with the steps modifying the tariff matrix in order to make it metric. The article proposes a simple and fast way for searching for a solution through the use of clustering in case of the presence of symmetric zeros in the matrix.

Keywords*: traveling salesman problem, mathematical model, Hamiltonian cycle.*

Об авторах:

ГОРДЕЕВА Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

КУЛИКОВ Александр Олегович – студент 4 курса кафедры «Промышленная логистика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: gardydog@yandex.ru

About the authors:

GORDEEVA Nadezhda Mihajlovna – Senior Lecturer, “High Mathematics” Department, BMSTU, e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

KULIKOV Aleksandr Olegovich – 4th-year student, “Industrial Logistics” Department, e-mail: gardydog@yandex.ru

References

1. Mudrov V.I. Zadacha o kommivoyazhere. Izd. 2-e. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2013. 64 s.
2. Kosorukov O.A., Mishchenko A.V. Issledovanie operacij. M.: Izdatel'stvo «EHkzamen», 2003. 448 s.
3. Zajcev M.G., Varyuhin S.E. Metody optimizacii upravleniya i prinyatiya reshenij: primery, zadachi, kejsy: uchebnoe posobie. M.: Izdatel'skij dom «Delo» RANHiGS, 2015. 640 s.
4. Galyautdinov R.R. Zadacha kommivoyazhera – metod vetvej i granic // Sajt prepodavatelya ehkonomiki. [2013]. URL: http://galyautdinov.ru/post/zadacha-kommivoyazhera (data obrashcheniya: 15.09.2018).
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H. Zadacha kommivoyazhera. Voprosy teorii // Avtomatika i telemekhanika. 1989. Vypusk 9. S. 3–33.
6. Lyahov O.A. Zadachi marshrutizacii v minimizacii oblucheniya personala pri tekhnicheskom obsluzhivanii AEHS / Trudy 12-oj Mezhdunarodnoj Aziatskoj shkoly-seminara «Problemy optimizacii slozhnyh sistem» pod red. S.I. Kabanihina, A.V. Kel'manova, A.S. Rodionova. Novosibirsk, 12–16 dekabrya 2016 g.