

ДВА ВАРИАНТА ДВУХПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛ КОССЕРА

Васильев А.А.* , Мирошниченко А.Е.**

*Кафедра математического моделирования

**Центр нелинейной физики, исследовательская школа физических и инженерных наук, Австралийский национальный университет, Канберра

На основе дискретной модели, отражающей не только трансляционные, но и вращательные степени свободы структурных ячеек, построены два варианта двухполевых обобщений микрополярной модели тел Коссера. Сравнением дисперсионных соотношений показано, что построенные модели уточняют однополевую модель Коссера различным образом и могут использоваться для моделирования не только длинноволновых, но и коротковолновых полей смещений и вращений.

On the basis of the discrete model that takes into account not only translational, but also rotational degrees of freedom of structural cells, two variants of two-field generalizations of Cosserat model are constructed. By comparison of dispersion relations it is shown, that the constructed models specify Cosserat model in the various ways and can be used for modeling not only long-wave, but also short-wave fields of displacement and rotations.

Ключевые слова: модель Коссера; двухполевая модель; коротковолновые деформации.

Keywords: Cosserat model; two-field model; short wavelength strain.

Введение. Континуальные модели эффективно используются для моделирования твердых деформируемых тел, составленных из большого количества взаимодействующих структурных элементов. Это обусловлено тем, что такие модели, в частности, позволяют выразить макро-характеристики тела через параметры структурных ячеек, в ряде случаев континуальные модели позволяют находить аналитические приближения решений для дискретных систем, строить эффективные вычислительные алгоритмы.

Однако при построении континуальных приближений теряется некоторая информация структурного уровня. В частности, обычной проблемой классических однополевых континуальных моделей, является то, что они не применимы для моделирования коротковолновых деформаций дискретных систем. Разработка методов построения уточненных моделей представляет интерес.

В статье представлен метод построения, строятся и анализируются два варианта двухполевых моделей. Их построение базируется на введении двух различных представлений тела как взаимопроникающих решеток с использованием для описания деформаций дискретной системы не одного, как в классических моделях [1-4], а двух векторных полей той же структуры (с теми же степенями свободы),

что и у однополевых моделей. Показано, что таким образом обеспечивается возможность описания в длинноволновом приближении не только длинноволновых, но коротковолновых деформаций.

1. Дискретная модель. Рассматривается ячеистое тело с квадратной решеткой расположения элементов (рис. 1а, б). Предполагается, что деформация системы определяется не только смещениями u_i, v_i , но и вращениями ϕ_i элементов (частиц).

Потенциальная энергия связей, соединяющих частицы m и n , принимается в виде [3, 4]

$$\begin{aligned} E_{pot}^{(n,m)} &= E_n^{(n,m)} + E_s^{(n,m)} + E_r^{(n,m)}, \\ E_n^{(n,m)} &= \frac{1}{2}K_n^{(n,m)} (u_m - u_n)^2, \quad E_r^{(n,m)} = \frac{1}{2}G_r^{(n,m)} (\phi_m - \phi_n)^2, \\ E_s^{(n,m)} &= \frac{1}{2}K_s^{(n,m)} \left[v_m - v_n + \frac{1}{2}r_{(n,m)} (\phi_m + \phi_n) \right]^2, \end{aligned}$$

где $r_{(n,m)}$ - расстояние между частицами; $K_n^{(n,m)}, K_s^{(n,m)}$ характеризуют жесткости связей в продольном и поперечном направлениях, $G_r^{(n,m)}$ - сопротивление вращению. Упругие постоянные для осевых связей обозначаем K_n, K_s, G_r . Принимаем, что $K_s^d = 0, G_r^d = 0$ и $K_n^d \neq 0$ для диагональных связей [4]. Осевое расстояние между частицами равняется d .

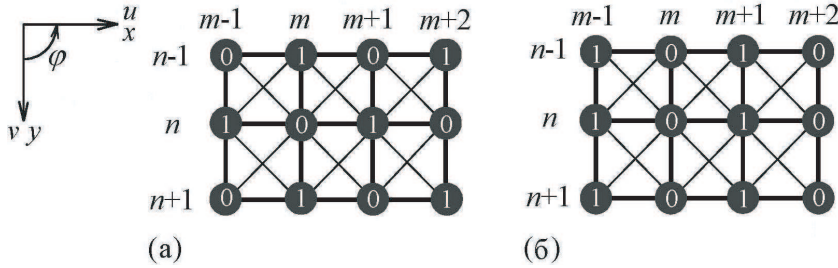


Рис. 3: Два представления моделируемой системы. Используемые обозначения.

Кинетическая энергия определяется соотношением

$$E_{kin}^n = \frac{1}{2}M\dot{u}_n^2 + \frac{1}{2}M\dot{v}_n^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}_n^2,$$

где M - масса, а I - момент инерции n -й частицы.

2. Первый вариант двухполевой модели. Двухполевую модель строим, рассматривая в качестве базовой макроячейку из двух $(m, n), (m+1, n)$ элементов (рис. 1а) вместо рассматриваемой обычно минимальной ячейки периодичности, содержащей одну частицу [3, 4]. Хотя все элементы идентичны, для маркировки элементов вводим различные индексы 0 и 1.

2.1. Уравнения и дисперсионные соотношения дискретной модели.

Используя Лагранжиан, строим шесть дискретных уравнений движения

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_r^{m,n} &= K_n [\Delta_{xx}u_j^{m,n} + 2u_j^{m,n} - 2u_r^{m,n}] + \frac{1}{2}K_n^d [\Delta u_r^{m,n} + \Delta_{xy}v_r^{m,n}] + \\ &+ K_s [\Delta_{yy}u_j^{m,n} + 2u_j^{m,n} - 2u_r^{m,n} - \frac{1}{2}d\Delta_y\phi_j^{m,n}], \\ M\ddot{v}_r^{m,n} &= K_n [\Delta_{yy}v_j^{m,n} + 2v_j^{m,n} - 2v_r^{m,n}] + \frac{1}{2}K_n^d [\Delta_{xy}u_r^{m,n} + \Delta v_r^{m,n}] + \\ &+ K_s [\Delta_{xx}v_j^{m,n} + 2v_j^{m,n} - 2v_r^{m,n} + \frac{1}{2}d\Delta_x\phi_j^{m,n}], \\ I\ddot{\phi}_r^{m,n} &= G_r [\Delta_{xx}\phi_j^{m,n} + \Delta_{yy}\phi_j^{m,n} + 4\phi_j^{m,n} - 4\phi_r^{m,n}] + \\ &+ \frac{1}{2}K_s d [\Delta_y u_j^{m,n} - \Delta_x v_j^{m,n} - \frac{1}{2}d (\Delta_{xx}\phi_j^{m,n} + \Delta_{yy}\phi_j^{m,n} + 4\phi_j^{m,n} + 4\phi_r^{m,n})]. \end{aligned}$$

где $r = 0, j = 1$ для первых трех уравнений, $r = 1, j = 0$ и индекс m должен быть заменен на $m + 1$ для других трех уравнений; $u_s^{m,n}, v_s^{m,n}, \phi_s^{m,n}$ - компоненты вектора смещения и угол поворота частицы с координатами (md, nd) s -й решетки.

Использованы следующие обозначения для конечных разностей

$$\begin{aligned} \Delta_x w^{m,n} &= w^{m+1,n} - w^{m-1,n}, \quad \Delta_{xx} w^{m,n} = w^{m+1,n} - 2w^{m,n} + w^{m-1,n}, \\ \Delta_y w^{m,n} &= w^{m,n+1} - w^{m,n-1}, \quad \Delta_{yy} w^{m,n} = w^{m,n+1} - 2w^{m,n} + w^{m,n-1}, \\ \Delta w^{m,n} &= w^{m+1,n+1} + w^{m+1,n-1} + w^{m-1,n+1} + w^{m-1,n-1} - 4w^{m,n}, \\ \Delta_{xy} w^{m,n} &= w^{m+1,n+1} - w^{m+1,n-1} - w^{m-1,n+1} + w^{m-1,n-1}. \end{aligned}$$

Сравнительный анализ проводится для решений вида

$$\begin{aligned} u_k^{m,n} &= \tilde{u}_k \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)], \\ v_k^{m,n} &= \tilde{v}_k \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)], \\ \phi_k^{m,n} &= \tilde{\phi}_k \exp [i(\omega t - mK_x - nK_y)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_x = k_x d, K_y = k_y d, k_x$ и k_y - волновые числа; $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{\phi}_k$ - амплитуды волн, $k = 0, 1$; ω - угловая частота.

Подстановка соотношений (1) в дискретные уравнения движения приводит к системе шести однородных алгебраических уравнений. Введением новых переменных

$$\tilde{U}_k = \frac{1}{2} [\tilde{u}_1 + (-1)^k \tilde{u}_0], \quad \tilde{V}_k = \frac{1}{2} [\tilde{v}_1 + (-1)^k \tilde{v}_0], \quad \tilde{\Phi}_k = \frac{1}{2} [\tilde{\phi}_1 + (-1)^k \tilde{\phi}_0],$$

$k = 0, 1$, система расщепляется на две системы из трех уравнений вида

$$\begin{aligned} [a_{k,1} + M\omega_k^2] \tilde{U}_k + a_{k,2} \tilde{V}_k + a_{k,3} i \tilde{\Phi}_k &= 0, \\ a_{k,2} \tilde{U}_k + [a_{k,4} + M\omega_k^2] \tilde{V}_k + a_{k,5} i \tilde{\Phi}_k &= 0, \\ a_{k,3} \tilde{U}_k + a_{k,5} \tilde{V}_k + [a_{k,6} + I\omega_k^2] i \tilde{\Phi}_k &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты в (2) для $k = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= 2K_n (\cos K_x - 1) + 2K_n^d (\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (\cos K_y - 1), \\ a_{0,2} &= -2K_n^d \sin K_x \sin K_y, \quad a_{0,3} = dK_s \sin K_y, \quad a_{0,5} = -dK_s \sin K_x, \\ a_{0,4} &= 2K_n (\cos K_y - 1) + 2K_n^d (\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (\cos K_x - 1), \\ a_{0,6} &= 2G_r (\cos K_x + \cos K_y - 2) + d^2 K_s (-\cos K_x - \cos K_y - 2) / 2. \end{aligned}$$

Коэффициенты в (2) для $k = 1$

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2K_n (-\cos K_x - 1) + 2K_n^d (\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (-\cos K_y - 1), \\ a_{1,2} &= -2K_n^d \sin K_x \sin K_y, \quad a_{1,3} = -dK_s \sin K_y, \quad a_{1,5} = dK_s \sin K_x, \\ a_{1,4} &= 2K_n (-\cos K_y - 1) + 2K_n^d (\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (-\cos K_x - 1), \\ a_{1,6} &= 2G_r (-\cos K_x - \cos K_y - 2) + d^2 K_s (\cos K_x + \cos K_y - 2) / 2. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_{0,k}$ совпадают с коэффициентами, которые были получены в статье [3] для случая простой ячейки. Заметим, что коэффициенты $a_{1,k}$ могут быть получены посредством замен $K_x \rightarrow K_x - \pi$, $K_y \rightarrow K_y - \pi$ в $a_{0,k}$.

Дискретной модели в случае простой ячейки с одной частицей (m, n) на области $0 \leq K_x \leq \pi$, $0 \leq K_y \leq \pi$ соответствуют три дисперсионные поверхности волн сжатия, сдвига и микро- вращений. Дискретной модели в рассматриваемом случае макроячейки из двух частиц на области $K_x \geq 0$, $K_y \geq 0$, $K_x + K_y \leq \pi$ соответствуют шесть поверхностей. Три из них, соответствующие коэффициентам $a_{0,k}$, совпадают с дисперсионными поверхностями для простой ячейки на этой области. Три другие поверхности, соответствующие коэффициентам $a_{1,k}$, могут быть получены отражениями поверхностей простой ячейки из области $K_x + K_y \geq \pi$, $K_x \leq \pi$, $K_y \leq \pi$. Плоскость отражения $K_x + K_y = \pi$.

2.2. Двухполевая модель. Сравнение моделей. При построении двухполевой модели для описания деформаций решеток вводим две вектор-функции $\{u_k(x, y, t), v_k(x, y, t), \phi_k(x, y, t)\}$, $k = 0, 1$. Замены $w_i^{m \pm 1, n \pm 1} \rightarrow w_i(x \pm d, y \pm d)$ в дискретных уравнениях движения приводят к шести функционально-разностным относительно пространственных переменных уравнениям. Разложениями функций перемещений и вращений в ряд Тейлора в точках, где определены уравнения, получаем точную дифференциальную модель. Оставив члены с производными не выше второго порядка, приходим к приближенной длинноволновой двухполевой модели. Ее уравнения могут быть получены из дискретных уравнений движения посредством замен

$$\begin{aligned} \Delta_x w_r^{m,n} &\rightarrow 2dw_{r,x}, \quad \Delta_{xx} w_r^{m,n} \rightarrow d^2 w_{r,xx}, \\ \Delta_y w_r^{m,n} &\rightarrow 2dw_{r,y}, \quad \Delta_{yy} w_r^{m,n} \rightarrow d^2 w_{r,yy}, \\ \Delta w_r^{m,n} &\rightarrow 2d^2 \Delta w_r = 2d^2 (w_{r,xx} + w_{r,yy}), \quad \Delta_{xy} w_r^{m,n} \rightarrow 4d^2 w_{r,xy}. \end{aligned}$$

Введением новых переменных

$$U_k = \frac{1}{2} [u_1 + (-1)^k u_0], \quad V_k = \frac{1}{2} [v_1 + (-1)^k v_0], \quad \Phi_k = \frac{1}{2} [\phi_1 + (-1)^k \phi_0],$$

$k = 0, 1$, система шести уравнений расщепляется на две системы.

Уравнения для $k = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} MU_{0,tt} &= K_n d^2 U_{0,xx} + K_n d^2 [\Delta U_0 + 2V_{0,xy}] + K_s d^2 [U_{0,yy} - \Phi_{0,y}], \\ MV_{0,tt} &= K_n d^2 V_{0,yy} + K_n d^2 [2U_{0,xy} + \Delta V_0] + K_s d^2 [V_{0,xx} + \Phi_{0,x}], \\ I\Phi_{0,tt} &= G_r d^2 \Delta \Phi_0 + K_s d^2 [U_{0,y} - V_{0,x} - d^2 \Delta \Phi_0 / 4 - 2\Phi_0]. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения были получены на основе простой ячейки в статье [3]. Было показано, что это уравнения классической микрополярной модели континуума Коссера [2]. Они дают хорошие аппроксимационные решения для медленноизменяющихся длинноволновых деформаций дискретной системы, но не могут быть использованы для моделирования коротковолновых деформаций.

Для $k = 1$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} MU_{1,tt} &= K_n [-d^2 U_{1,xx} - 4U_1] + K_n^d d^2 [\Delta U_1 + 2V_{1,xy}] - \\ &\quad - K_s [d^2 U_{1,yy} + 4U_1 - d^2 \Phi_{1,y}], \\ MV_{1,tt} &= K_n [-d^2 V_{1,yy} - 4V_1] + K_n^d d^2 [2U_{1,xy} + \Delta V_1] - \\ &\quad - K_s [d^2 V_{1,xx} + 4V_1 + d^2 \Phi_{1,x}], \\ I\Phi_{1,tt} &= G_r [-d^2 \Delta \Phi_1 - 8\Phi_1] + K_s d^2 [-U_{1,y} + V_{1,x} + d^2 \Delta \Phi_1 / 4]. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы исследовать модель, рассматриваем континуальные аналоги решений (1)

$$\begin{aligned} U_k(x, y) &= \tilde{U}_k \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)], \\ V_k(x, y) &= \tilde{V}_k \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)], \\ \Phi_k(x, y) &= \tilde{\Phi}_k \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)], \end{aligned} \quad (5)$$

Их подстановка в уравнения (3) ведет к системе (2) с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_{0,1} &= -K_n K_x^2 + K_n^d (-K_x^2 - K_y^2) - K_s K_y^2, \quad c_{0,2} = -2K_n^d K_x K_y, \\ c_{0,3} &= dK_s K_y, \quad c_{0,4} = -K_n K_y^2 + K_n^d (-K_x^2 - K_y^2) - K_s K_x^2, \\ c_{0,5} &= -dK_s K_x, \quad c_{0,6} = G_r (-K_x^2 - K_y^2) + d^2 K_s (K_x^2 + K_y^2 - 8) / 4. \end{aligned}$$

Коэффициенты $c_{0,k}$ являются разложениями в ряды Тейлора коэффициентов $a_{0,k}$ дискретной модели относительно $k_x = 0$, $k_y = 0$ до членов второго порядка.

Коэффициенты, соответствующие уравнениям (4), имеют вид

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= K_n (K_x^2 - 4) + K_n^d (-K_x^2 - K_y^2) + K_s (K_y^2 - 4), \quad c_{1,2} = -2K_n^d K_x K_y, \\ c_{1,3} &= -dK_s K_y, \quad c_{1,4} = K_n (K_y^2 - 4) + K_n^d (-K_x^2 - K_y^2) + K_s (K_x^2 - 4), \\ c_{1,5} &= dK_s K_x, \quad c_{1,6} = G_r (K_x^2 + K_y^2 - 8) + d^2 K_s (-K_x^2 - K_y^2) / 4. \end{aligned}$$

Коэффициенты $c_{1,k}$ являются разложениями в ряды Тейлора до членов второго порядка коэффициентов $a_{1,k}$ в точке $K_x = 0$, $K_y = 0$. Поэтому, в силу отмеченного в разделе 2.1 соотношения между коэффициентами $a_{0,k}$ и $a_{1,k}$, а также соответствующими им дисперсионными поверхностями, дисперсионные поверхности, соответствующие коэффициентам $c_{1,k}$ двухполевой модели, после отражения относительно плоскости $K_x + K_y = \pi$ из области $K_x \geq 0$, $K_y \geq 0$, $K_x + K_y \leq \pi$ аппроксимируют дисперсионные поверхности дискретной системы в точке $K_x = \pi$, $K_y = \pi$.

На рис. 2а представлено сечение $K_x = K_y$ дисперсионных поверхностей волн сдвига, сжатия, микро-вращений. Параметры выбраны как и в [3, 4] для гранулированной среды: $\lambda = 55.5 \text{ MPa}$, $\mu = 83.3 \text{ MPa}$, $d = 0.05 \text{ m}$, $G_r/2d = 69.5 \text{ kN}$, $K_n = 2d\mu$, $K_n^d = \lambda d$, $K_s = G_r/d^2$, $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$, $J = 0.5625 \text{ kg/m}$, $M = \rho d^3$, $I = Jd^3$. Дисперсионные кривые дискретной решетки, модели Коссера и первого варианта двухполевой модели нарисованы на рис. 2а сплошными, точечными и пунктирными линиями, соответственно. Кривые для однополевой модели Коссера и соответствующие кривые двухполевой модели совпадают для длинных волн в интервале $0 < K_x < \pi/2$. Двухполевая модель дает хорошую аппроксимацию для коротких волн в области около $K_x = K_y = \pi$ и точна в этой точке. Видно, что однополевая модель Коссера дает в этой области значительную ошибку.

3. Второй вариант двухполевой модели. Рассматриваем простую решетку как две взаимопроникающие решетки, представленные на рис. 1б.

3.1. Уравнения и дисперсионные отношения дискретной модели. Аналогично рассмотренному выше случаю строим дискретные уравнения движения, но для случая маркировки частиц, представленного на рис. 1б. Подстановка (1) в эти уравнения дает систему шести алгебраических уравнений для амплитуд, которые могут быть расщеплены на две системы (2). Коэффициенты, соответствующие $k = 0$, совпадают с $a_{0,k}$.

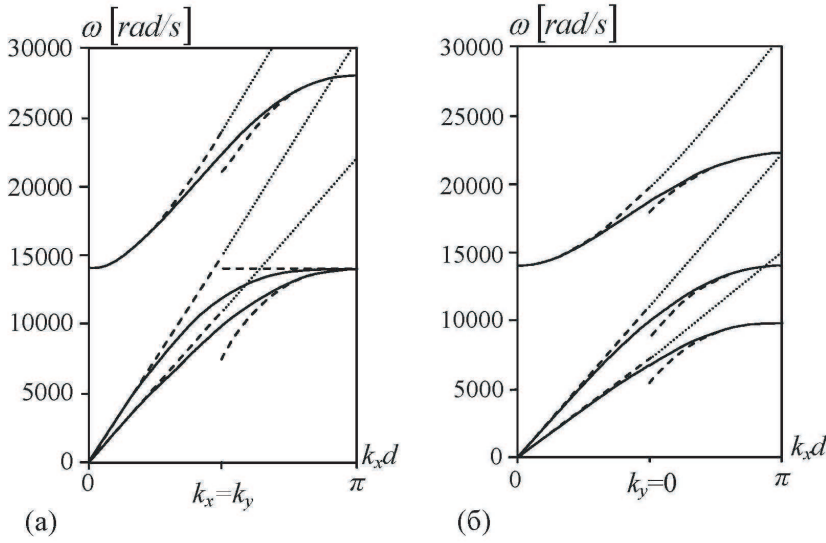


Рис. 4: Дисперсионные кривые моделируемой дискретной системы, ее однополевой и двухполевых моделей (сплошные, точечные и пунктирные линии, соответственно).

Коэффициенты, соответствующие $k = 1$, имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_{2,1} &= 2K_n (-\cos K_x - 1) + 2K_n^d (-\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (\cos K_y - 1), \\
 a_{2,2} &= 2K_n^d \sin K_x \sin K_y, \quad a_{2,3} = dK_s \sin K_y, \quad a_{2,5} = dK_s \sin K_x, \\
 a_{2,4} &= 2K_n (\cos K_y - 1) + 2K_n^d (-\cos K_x \cos K_y - 1) + 2K_s (-\cos K_x - 1), \\
 a_{2,6} &= 2G_r (-\cos K_x + \cos K_y - 2) + d^2 K_s (\cos K_x - \cos K_y - 2) / 2.
 \end{aligned}$$

Эти коэффициенты можно получить из $a_{0,k}$ заменой $K_x \rightarrow K_x - \pi$. Таким образом, дискретной модели в рассматриваемом случае на области $0 \leq K_x \leq \pi/2$, $0 \leq K_y \leq \pi$ соответствуют шесть поверхностей. Три из них, соответствующие коэффициентам $a_{0,k}$, совпадают с дисперсионными поверхностями для простой ячейки на этой области. Три другие поверхности, соответствующие коэффициентам $a_{1,k}$, могут быть получены отражениями поверхностей простой ячейки из области $\pi/2 \leq K_x \leq \pi$, $0 \leq K_y \leq \pi$. Плоскость отражения $K_x = \pi/2$.

3.2. Двухполевая модель. Сравнение моделей. Для построения двухполевой модели используем две вектор-функции. Методика построения континуальных уравнений двухполевой модели на основе дискретных уравнений макроячейки аналогична описанной выше в разделе 2.2.

В линейном случае система шести связанных уравнений расщепляется на две системы. Первая система, соответствующая $k = 0$, совпадает с (3). То есть вторая модель, как и построенная выше, содержит, как составляющую часть, классические уравнения теории Коссера.

Новые уравнения, соответствующие вычитанию при введении новых перемен-

ных, имеют вид

$$\begin{aligned}
MU_{2,tt} &= -K_n [d^2 U_{2,xx} + 4U_2] - K_n^d [d^2 \Delta U_2 + 4U_2 + 2d^2 V_{2,xy}] + \\
&\quad + K_s d^2 [d^2 U_{2,yy} - \Phi_{2,y}], \\
MV_{2,tt} &= K_n d^2 V_{2,yy} - K_n^d [d^2 \Delta V_2 + 4V_2 + 2d^2 U_{2,xy}] - \\
&\quad - K_s [d^2 V_{2,xx} + 4V_2 + d^2 \Phi_{2,x}], \\
I\Phi_{2,tt} &= G_r [-d^2 \Phi_{2,xx} + d^2 \Phi_{2,yy} - 4\Phi_2] + \\
&\quad + K_s d^2 [U_{2,y} + V_{2,x} + d^2 (\Phi_{2,xx} - \Phi_{2,yy}) / 4 - \Phi_2].
\end{aligned} \tag{6}$$

Им соответствуют коэффициенты матриц дисперсионных соотношений

$$\begin{aligned}
c_{2,1} &= K_n (K_x^2 - 4) + K_n^d (K_x^2 + K_y^2 - 4) - K_s K_y^2, \quad c_{2,2} = 2K_n^d K_x K_y, \\
c_{2,3} &= dK_s K_y, \quad c_{2,4} = -K_n K_y^2 + K_n^d (K_x^2 + K_y^2 - 4) + K_s (K_x^2 - 4), \\
c_{2,5} &= dK_s K_x, \quad c_{2,6} = G_r (K_x^2 - K_y^2 - 4) + d^2 K_s (-K_x^2 + K_y^2 - 4) / 4.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $c_{2,k}$ являются разложениями в ряды Тейлора коэффициентов $a_{2,k}$ до членов второго порядка относительно $K_x = 0$, $K_y = 0$. Поэтому, в силу отмеченного в разделе 3.1 соотношения между коэффициентами $a_{0,k}$ и $a_{2,k}$, а также соответствующими дисперсионными поверхностями, дисперсионные поверхности, соответствующие коэффициентам $c_{2,k}$ построенной двухполевой модели, после отражения относительно плоскости $K_x = \pi/2$ из области $0 \leq K_x \leq \pi/2$, $0 \leq K_y \leq \pi$ аппроксимируют дисперсионные поверхности моделируемой дискретной системы в точке $K_x = \pi$, $K_y = 0$.

Таким образом, построенная двухполевая модель содержит в качестве составляющей классическую модель Коссера, дает точные результаты при описании, как длинных волн, так и коротких волн, соответствующих значениям волновых чисел вблизи $k_x d = \pi$, $k_y d = 0$.

На рис. 2б представлено сечение $K_y = 0$ дисперсионных поверхностей. Кривые для двухполевой модели построены на основе второго варианта двухполевой модели. Параметры и стиль линий такие же, как на рис. 2а. Двухполевая модель имеет ту же самую точность при моделировании длинных волн дискретной системы, что и классическая однополевая модель Коссера [2, 3]. Однако, в отличие от нее, дает хорошую аппроксимацию также и в области коротких волн для значений волновых чисел около точки $K_y = \pi$, $K_x = 0$ и точна в этой точке.

Заключение. В статье дана разработка теории многополевого подхода для построения обобщенных континуальных моделей для моделирования структурных систем с учетом коротковолновых полей [5-8]. Представлена методика построения двухполевых моделей плоских тел с учетом вращений элементов. Построены два типа двухполевых моделей. Показано, что обе модели содержат классическую однополевую модель Коссера, то есть применимы для моделирования длинноволновых медленно изменяющихся деформаций дискретной системы, и уточняют ее при моделировании коротковолновых деформаций различным образом.

Список литературы

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables. Paris: A. Herman et Fils, 1909.

-
- [2] Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity. In: Liebowitz H. (ed) Fracture, 2, pp. 621- 729. New York: Academic Press, 1968.
- [3] Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. - International Journal of Solids and Structures, 2001, v. 38, p. 1563-1583.
- [4] Suiker, A.S.J. The Mechanical Behaviour of Ballasted Railway Tracks. Dissertation, Delft University of Technology, 2002.
- [5] Ильюшина Е.А. Одна из моделей сплошной среды с учетом микроструктуры. - ПММ, 1969, т. 33, N 5, с. 917-923.
- [6] Ильюшина Е.А. К теории упругости неоднородных сред с микроструктурой. Дисс. канд. ф.-м. наук. М: 1977.
- [7] Васильев А.А. Континуальное моделирование двухрядной конечной дискретной системы с учетом краевых эффектов. - Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика., 1996, N 5, с. 66-68.
- [8] Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations. - International Journal of Solids and Structures, 2005, v. 42 (24-25), p. 6245-6260.