УДК 519.22

АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТОДА ГИБРИДНОЙ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ

Попенова П.С.*, **Шестаков О.В.***,**
*МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
**Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 10.12.2018, после переработки 24.01.2019.

В работе рассматривается задача построения оценки функции сигнала с помощью метода гибридной пороговой обработки коэффициентов вейвлет-разложения. Гибридная пороговая обработка представляет собой компромисс между мягкой и жесткой пороговой обработкой, в котором сочетаются основные достоинства этих двух методов. В модели данных с аддитивным шумом проводится анализ несмещенной оценки среднеквадратичного риска и показывается, что при определенных условиях данная оценка является сильно состоятельной и асимптотически нормальной. Данные свойства позволяют использовать оценку риска в качестве критерия качества метода и строить асимптотические доверительные интервалы для теоретического среднеквадратичного риска.

Ключевые слова: вейвлеты, гибридная пороговая обработка, оценка риска, предельные теоремы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 15–22.
https://doi.org/10.26456/vtpmk524

Введение

В процессе передачи и обработки сигналы часто «загрязняются» шумом вследствие несовершенства оборудования и наличия помех в каналах связи. Для решения этой проблемы применяются различные методы подавления шума. Вейвлет-разложение, благодаря своей кратномасштабной природе и вычислительной эффективности, стало одним из популярных инструментов этих методов. В сочетании с вейвлет-разложением наиболее часто используются процедуры пороговой обработки, основная идея которых заключается в обнулении тех коэффициентов разложения, которые считаются шумом. Самыми популярными являются процедуры жесткой и мягкой пороговой обработки. Однако они имеют свои недостатки. Жесткая пороговая обработка использует разрывную пороговую функцию, что приводит к появлению дополнительных артефактов, отсутствию устойчивости при выборе порога и невозможности построения несмещенной оценки среднеквадратичного риска. При мягкой пороговой обработке все коэффициенты подвергаются изменению, вследствие чего в оценке сигнала появляется дополнительное смещение. В работе [1] предложено использовать гибридный вариант пороговой обработки, который представляет собой компромисс между жесткой и мягкой пороговой обработкой и позволяет обойти указанные недостатки. Для анализа погрешности данного метода можно использовать несмещенную оценку среднеквадратичного риска [2], которая зависит только от наблюдаемых данных и дает возможность оценивать качество обработанного сигнала без использования «эталона». В данной работе исследуются статистические свойства этой оценки при разложении функции сигнала по вейвлет-базису и выборе «универсального» порога.

1. Гибридная пороговая обработка

Рассмотрим функцию сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$. Разложение f по ортонормированному вейвлет-базису имеет вид

$$f = \sum_{j,k \in Z} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \tag{1}$$

где $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, а $\psi(t)$ — некоторая вейвлет-функция. Индекс j в (1) называется масштабом, а индекс k — сдвигом. Пусть f имеет носитель на конечном отрезке $[a,b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с некоторым показателем $\gamma > 0$. Также предположим, что вейвлет-функция ψ имеет M непрерывных производных ($M \geqslant \gamma$), M нулевых моментов и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t^\gamma \psi(t)|\, dt < \infty.$$

В этом случае справедливо неравенство

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq \frac{C_f}{2^{j(\gamma+1/2)}}, \tag{2}$$

где C_f — некоторая положительная константа, зависящая от вида функции f.

При передаче по цифровому каналу функция сигнала задана в дискретных отсчетах и наблюдения содержат шум. В данной работе рассматривается аддитивная модель

$$X_i = f_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, 2^J,$$

где 2^J — число отсчетов сигнала, f_i — незашумленные значения функции сигнала, а ε_i — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2. После применения дискретного вейвлет-преобразования получается следующая модель зашумленных вейвлет-коэффициентов:

$$Y_{jk} = \mu_{jk} + \varepsilon_{jk}^W, \qquad j = 0, \dots, J-1,\ k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

где ε_{jk}^W независимы и имеют такое же распределение, как и ε_i, а $\mu_{jk} \approx 2^{J/2}\langle f, \psi_{jk} \rangle$ [3].

Для подавления шума и построения оценки функции сигнала к коэффициентам Y_{jk} применяется функция жесткой пороговой обработки

$$\rho_H(y,T) = y\mathbf{1}(|y| > T)$$

или функция мягкой пороговой обработки

$$\rho_S(y,T) = \mathbf{sgn}(y)\,(|y| - T)_+$$

с некоторым порогом T.

При заданном пороге оценка сигнала с мягкой пороговой обработкой имеет меньшую дисперсию, но большее смещение, чем оценка с жесткой пороговой обработкой. Обычно мягкая пороговая обработка выбирается, чтобы получить более гладкую оценку, а жесткая, чтобы получить оценку с меньшим смещением. Гибридная пороговая обработка [1] использует преимущества обоих методов и представляет собой компромисс между ними. Оценки вейвлет-коэффициентов вычисляются по формулам

$$\rho(y,T) = \begin{cases} 0, & |y| \leqslant T, \\ y - \frac{T^2}{y}, & |y| > T. \end{cases}$$

В отличие от функции жесткой пороговой обработки, эта функция непрерывна, и при больших значениях абсолютных величин эмпирических вейвлет-коэффициентов получаемое смещение заметно меньше, чем у мягкой пороговой обработки.

2. Несмещенная оценка среднеквадратичного риска и ее статистические свойства

Одним из основных критериев качества методов пороговой обработки является так называемый среднеквадратичный риск

$$R_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_{jk} - \mu_{jk}\right)^2. \tag{3}$$

Вычислить значение $R_J(T)$ на практике можно, только имея «незашумленный» сигнал (эталон). Однако при использовании гибридной пороговой обработки, как и в случае использования мягкой пороговой обработки, можно построить несмещенную оценку $R_J(T)$, зависящую только от наблюдаемых данных.

Обозначим $g(y,T) = y - \rho(y,T)$. Тогда каждое слагаемое в (3) представимо в виде

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_{jk} - \mu_{jk}\right)^2 = \sigma^2 + \mathbb{E}g^2(\widehat{\mu}_{jk},T) - 2\sigma^2\mathbb{E}g'(\widehat{\mu}_{jk},T).$$

Поскольку

$$g(y,T) = \begin{cases} y, & |y| \leqslant T, \\ \frac{T^2}{y}, & |y| > T, \end{cases} \quad g'(y,T) = \begin{cases} 1, & |y| \leqslant T, \\ -\frac{T^2}{y^2}, & |y| > T, \end{cases} \quad g^2(y,T) = \begin{cases} y^2, & |y| \leqslant T, \\ \frac{T^4}{y^2}, & |y| > T, \end{cases}$$

несмещенная оценка риска определяется по формуле

$$\widehat{R}_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F(\widehat{\mu}_{jk}, T), \tag{4}$$

где

$$F(y,T) = (y^2 - \sigma^2)\mathbf{1}(|y| \leqslant T) + \left(\sigma^2 + \frac{T^4 + 2\sigma^2 T^2}{y^2}\right)\mathbf{1}(|y| > T).$$

В данной работе в качестве T рассматривается так называемый «универсальный» порог $T_U = \sigma\sqrt{2\ln 2^J}$, который позволяет достичь хороших результатов при подавлении шума и обеспечивает близость среднеквадратичного риска к минимальному при жесткой и мягкой пороговых обработках [3].

Покажем, что оценка (4) является асимптотически нормальной. Это свойство позволяет строить асимптотические доверительные интервалы для риска (3). Для других видов пороговой обработки подобные результаты получены в работах [4–6].

Теорема 1. *Пусть f задана на отрезке $[a,b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с параметром $\gamma > 0$. Тогда при $J \to \infty$*

$$P\left(\frac{\widehat{R}_J(T_U) - R_J(T_U)}{\sigma^2\sqrt{2^{J+1}}} < x\right) \to \Phi(x). \tag{5}$$

Доказательство. Выберем p такое, что $(2\gamma+1)^{-1} < p < 1$, и запишем

$$\widehat{R}_J(T_U) - R_J(T_U) =$$
$$= \sum_{j=0}^{[pJ]} \sum_{k=0}^{2^j-1} [F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)] + \sum_{j=[pJ]+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} [F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)]. \tag{6}$$

Число слагаемых в первой сумме не превосходит $2^{[pJ]+1}$. Кроме того,

$$|F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)| \leqslant 2\left(3\sigma^2 + T_U^2\right) \quad \text{п.в.} \tag{7}$$

Применяя неравенство Хеффдинга и учитывая, что $T_U = \sigma\sqrt{2\ln 2^J}$, нетрудно убедиться, что для любого $\delta > 0$ найдется константа $C_\delta > 0$ такая, что

$$\mathrm{P}\left(\frac{\left|\sum_{j=0}^{[pJ]} \sum_{k=0}^{2^j-1} [F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)]\right|}{\sigma^2\sqrt{2^{J+1}}} > \delta\right) \leqslant \exp\left\{-C_\delta \frac{2^{J-pJ}}{J^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sum_{j=0}^{[pJ]} \sum_{k=0}^{2^j-1} [F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)]}{\sigma^2\sqrt{2^{J+1}}} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \ \text{ при } J \to \infty.$$

Для всех слагаемых во второй сумме в (6) в силу (2) выполнено $\mu_{jk} \to 0$ при $J \to \infty$. Учитывая этот факт и повторяя рассуждения из работы [4], можно показать, что

$$\lim_{J\to\infty} \frac{\mathsf{D} \sum\limits_{j=[pJ]+1}^{J-1} \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} [F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)]}{\sigma^4 2^{J+1}} = 1. \tag{8}$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ при $J \to \infty$

$$\frac{1}{\sigma^4 2^{J+1}} \sum_{j=[pJ]+1}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}\big[\big(F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)\big)^2 \times$$
$$\times \mathbf{1}\big(|F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U) - \mathbb{E}F(\widehat{\mu}_{jk}, T_U)| > \varepsilon\sigma^4 2^{J+1}\big)\big] \to 0, \tag{9}$$

поскольку начиная с некоторого J все индикаторы в (9) обращаются в ноль. Таким образом, из (8) и (9) следует выполнение условия Линдеберга. Следовательно, справедливо (5). Теорема доказана. □

Докажем теперь свойство сильной состоятельности оценки (4).

Теорема 2. *Пусть* $f \in L^2(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\lambda > 1/2$

$$\frac{\widehat{R}_J(T_U) - R_J(T_U)}{2^{\lambda J}} \to 0 \ \ \textit{п.в. при } J \to \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Используя неравенство Хеффдинга, с учетом оценки (7) и вида T_U получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется константа $C_\delta > 0$ такая, что

$$p_J = \mathrm{P}\left(\frac{\left|\widehat{R}_J(T_U) - R_J(T_U)\right|}{2^{\lambda J}} > \delta\right) \leqslant \exp\left\{-C_\delta \frac{2^{2\lambda J - J}}{J^2}\right\}.$$

И поскольку

$$\sum_{J=1}^{\infty} p_J < \infty,$$

то в силу леммы Бореля–Кантелли выполнено (10). Теорема доказана. □

Заключение

Рассмотрен метод подавления шума в сигнале, основанный на процедуре гибридной пороговой обработки с универсальным порогом. При выполнении определенных ограничений на функцию сигнала доказана асимптотическая нормальность и сильная состоятельность несмещенной оценки среднеквадратичного риска. Полученные результаты обосновывают возможность использования данной оценки в качестве критерия качества метода пороговой обработки и позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для теоретического среднеквадратичного риска.

Список литературы

[1] Chmelka L., Kozumplik J. Wavelet-based Wiener Filter for electrocardiogram signal denoising // Computers in Cardiology. 2005. Vol. 32. Pp. 771–774.

[2] Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Annals of Statistics. 1981. Vol. 9, № 6. Pp. 1135–1151.

[3] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. New York: Academic Press, 1999. 857 p.

[4] Маркин А.В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения. 2009. Т. 3, № 4. С. 57–63.

[5] Шестаков О.В. Статистические свойства метода подавления шума, основанного на стабилизированной жесткой пороговой обработке // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10, № 2. С. 65–69. https://doi.org/10.14357/19922264160207

[6] Shestakov O.V. On the strong consistency of the adaptive risk estimator for wavelet thresholding // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 214, № 1. Pp. 115–118.

Образец цитирования

Попенова П.С., Шестаков О.В. Анализ статистических свойств метода гибридной пороговой обработки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 15–22. https://doi.org/10.26456/vtpmk524

Сведения об авторах

1. **Попенова Полина Сергеевна**
студентка кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: polin_p@mail.ru

2. **Шестаков Олег Владимирович**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник Института проблем информатики ФИЦ ИУ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: oshestakov@cs.msu.su

ANALYSIS OF STATISTICAL PROPERTIES OF THE HYBRID THRESHOLDING TECHNIQUE

Popenova Polina Sergeevna
Student of Computational Mathematics and Cybernetics faculty,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: polin_p@mail.ru

Shestakov Oleg Vladimirovich
Professor at Mathematical Statistics department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University
Senior researcher at Institute of Computer Science Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: oshestakov@cs.msu.su

Received 10.12.2018, revised 24.01.2019.

We consider the problem of constructing an estimate of the signal function using the method of hybrid threshold processing of wavelet expansion coefficients. Hybrid threshold processing is a compromise between soft and hard threshold processing, which combines the main advantages of these two methods. In the data model with an additive noise, an unbiased estimate of the mean-square risk is analyzed and it is shown that under certain conditions this estimate is strongly consistent and asymptotically normal. These properties allow to use the risk estimate as a criterion for the quality of a method and to construct asymptotic confidence intervals for the theoretical mean-square risk.

Keywords: wavelets, hybrid thresholding, risk estimate, limit theorems.

Citation

Popenova P.S., Shestakov O.V., "Analysis of statistical properties of the hybrid thresholding technique", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 15–22 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk524

References

[1] Chmelka L., Kozumplik J., "Wavelet-based Wiener Filter for electrocardiogram signal denoising", *Computers in Cardiology*, **32** (2005), 771–774.

[2] Stein C., "Estimation of the mean of a multivariate normal distribution", *Annals of Statistics*, **9**:6 (1981), 1135–1151.

[3] Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York, 1999, 857 pp.

[4] Markin A.V., "Limit distribution of risk estimate of wavelet coefficient thresholding", *Informatika i ee Primeneniya [Informatics and Applications]*, **3**:4 (2009), 57–63 (in Russian).

[5] Shestakov O.V., "Statistical properties of the denoising method based on the stabilized hard thresholding", *Informatika i ee Primeneniya [Informatics and Applications]*, **10**:2 (2016), 65–69 (in Russian), https://doi.org/10.14357/19922264160207.

[6] Shestakov O.V., "On the strong consistency of the adaptive risk estimator for wavelet thresholding", *Journal of Mathematical Sciences*, **214**:1 (2016), 115–118.