УДК 519.872, 519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А.
ННГУ имени Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию 04.10.2018, после переработки 18.12.2018.

В работе рассматривается система адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. В качестве математического описания такой системы выбирается состояние обслуживающего устройства и длины очередей по конфликтным входным потокам. Доказано свойство марковости последовательности состояний системы и проведена их классификация. Найдены рекуррентные соотношения для одномерных распределений последовательности состояний системы.

Ключевые слова: конфликтные потоки, нециклическое управление, стационарное распределение, производящие функции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 23–37.
https://doi.org/10.26456/vtpmk522

Введение

Данная работа связана с важной проблемой создания алгоритмов в интеллектуальных транспортных системах, которые управляют конфликтными потоками на пересечениях магистралей в крупных городах. Под конфликтностью понимается невозможность одновременного обслуживания требований из разных потоков. Классические системы управления конфликтными потоками в основном используют следующие алгоритмы:

1. циклические алгоритмы с фиксированным ритмом переключения;
2. приоритетные алгоритмы;
3. алгоритмы полного освобождения очереди по обслуживаемому потоку;
4. пакетные алгоритмы, обслуживающие все требования потока, поступившие до начала обслуживания;
5. алгоритмы, обслуживающие не более k заявок по каждому потоку.

В данной работе рассматривается класс адаптивных алгоритмов управления потоками неоднородных требований, при которых смена состояния обслуживающего устройства зависит от его текущего состояния, от длин очередей и от очередности прихода заявок по потокам. Построена и изучена математическая модель такой системы E управления конфликтными потоками. Класс адаптивных алгоритмов управления простейшими потоками был рассмотрен в работах [1–3]. В этих работах путем имитационного моделирования было установлено преимущество адаптивного управления по сравнению с перечисленными выше классическими алгоритмами.

В работе будем рассматривать вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Здесь Ω есть достоверный исход, а через символ $\omega \in \Omega$ обозначим описание некоторого элементарного исхода системы E или случайного эксперимента. Описание ω определяет как процесс поступления требований в систему, так и процесс управления конфликтными потоками и обслуживания заявок. Множество всех наблюдаемых исходов данного эксперимента E составляет σ-алгебру $\mathfrak{F}$, на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}(\cdot)\colon \mathfrak{F} \to [0,1]$. Все случайные события, случайные величины и случайные элементы будем рассматривать на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. В некоторых случаях для сокращения записи не будем явно фиксировать символ ω как аргумент каких-либо случайных величин или случайных элементов.

1. Описание системы

Транспортный поток состоит из разнотипных автомобилей, различающихся скоростью движения. Таким образом, рассматриваются входные потоки с неоднородными требованиями $\{\eta_j(\omega;t)\colon t \geqslant 0\}$, где $\eta_j(\omega;t)$ — число поступивших заявок на промежутке времени $[0,t)$ по потоку Π_j, $j = 1,2$. В работе [4] предложен механизм образования таких потоков из неоднородных требований. Показана возможность аппроксимации потоков такого вида неординарными пуассоновскими потоками. Это дает возможность рассматривать в качестве входных потоков два конфликтных неординарных пуассоновских потока Π_1 и Π_2. В каждый вызывающий момент по потоку Π_j приходит k заявок с вероятностями $P_j(k)$, $k \geqslant 1$, $j = 1,2$,

$$P_j(1) = (1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1} = p_j,$$
$$P_j(2) = \alpha_j(1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1},$$
$$P_j(k) = \alpha_j\beta_j\gamma_j^{k-3}(1 + \alpha_j + \alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1}, k \geqslant 3,$$

где α_j, β_j и γ_j — некоторые параметры распределения, физический смысл которых был определен в [4]. Интенсивность поступления вызывающих моментов по потоку Π_j равна λ_j. Свойства таких потоков с неоднородными требованиями изучены в [4, 5]. В частности, была получена вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_j(\omega;t) = k\}) = P_j(t,k)$ поступления k требований за время $[0,t)$ по потоку Π_j следующего вида

$$P_j(t,k) = e^{-\lambda_j t}\sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha_j^n \frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \\ + e^{-\lambda_j t}\sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha_j^n \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta_j^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma_j^l \frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!}, k \geqslant 0. \tag{1}$$

Управление конфликтными потоками при их обслуживании производится с помощью адаптивного нециклического алгоритма, подробное описание которого приведено в работах [6, 7].

В изучаемой системе обслуживающим устройством является светофор, а требованиями — автомобили, подъезжающие к светофору. Множество состояний светофора обозначим через $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(8)}\}$. В работе [7] приведены описания всех состояний и длительности пребывания в них, которые выражаются через некоторые параметры T_i, $i = \overline{1,6}$.

Будем рассматривать систему в моменты τ_i, $i \geqslant 0$, или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь величина τ_0 — начальный момент времени, а τ_i, $i \geqslant 0$ — моменты смены состояний обслуживающего устройства (ОУ). Пусть $y_0 = (0, 0)$, $y_1 = (1, 0)$, $y_2 = (0, 1)$ и X — целочисленная одномерная неотрицательная решетка. Для нелокального описания системы при $i = 0, 1, \dots$ введем следующие случайные величины и элементы:

1. $\Gamma_i(\omega) \in \Gamma$ — состояние ОУ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
2. $\eta_{j,i}(\omega) \in X$ — число заявок j-го потока, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;
3. $\eta'_{j,i}(\omega)$ — случайный вектор, принимающий значение y_0, если в систему на i-ом такте $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не поступило ни одной заявки, и значение y_j, если на i-ом такте первой пришла заявка (или заявки) j-го потока;
4. $\kappa_{j,i}(\omega) \in X$ — число заявок j-го потока, которые находятся в системе в момент τ_i, $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$;
5. $\xi_{j,i}(\omega)$ — максимально возможное число заявок j-го потока, которые система может обслужить на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\xi_i = (\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$.

Примем следующие соотношения для параметров (длительностей) T_i, $i = \overline{1,6}$,

$$T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\theta_j\mu_{j,1}^{-1}, \quad T_{3j-1} = l_{3j-1}\theta_j\mu_{j,2}^{-1}, \quad T_{3j} = l_{3j}\theta_j\mu_{j,2}^{-1},$$

где $l_{3j-2} \in X$, l_{3j-1}, $l_{3j} \in X\backslash\{0\}$. При этом постоянные величины $\mu_{j,1}^{-1}$ и $\mu_{j,2}^{-1}$ определяют длительности обслуживания одной заявки на первом (начало обслуживания) и втором (продолжение обслуживания) этапе соответственно. Величина $0 < \theta_j \leqslant 1$ обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае $\theta_j < 1$ одновременно может обслуживаться несколько требований.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается с помощью рекуррентного по $i = 0,\ 1,\ \dots$ соотношения вида

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta'_i) =$$
$$= \begin{cases} \Gamma^{(3j-2)}, & \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& \left[(\kappa_{j,i} > 0) \vee (\kappa_{s,i} \geqslant K_s) \vee (\eta'_i = y_j)\right]\right\} \vee \\ & \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}\right] \& [\kappa_{s,i} = 0] \& [\kappa_{j,i} \leqslant K_j] \& [\eta'_i = y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(3j-1)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i = y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(3j)}, & \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}\right] \& [\eta'_i \neq y_j]\right\}, \\ \Gamma^{(6+j)}, & \left[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}\right] \& [\kappa_{j,i} = 0] \& [\kappa_{s,i} < K_s] \& [\eta'_i = y_0]. \end{cases} \tag{2}$$

В формуле (2) и далее в работе $j \neq s$ и j, $s = 1$, 2. Постоянная K_s определяет пороговую длину очереди по потоку Π_s. При этом, если длина очереди превышает K_s, то продлеваем состояние $\Gamma^{(3s-1)}$.

Как видно из приведенного соотношения состояние ОУ на следующем шаге зависит от состояния на предыдущем шаге, длин очередей и очередности прихода заявок. При этом динамика длины очереди задается следующими рекуррентными соотношениями

$$\kappa_{j,i+1} = v_j(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = \begin{cases} \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0, \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases}$$

Ниже рассматривается векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geqslant 0\}$, определяющая динамику состояний ОУ и флуктуацию длин очередей.

Лемма 1. *Последовательность* $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geqslant 0\}$ *при заданном векторе* $\{(\Gamma_0, \kappa_0)\}$ *является марковской.*

Проанализируем пространства состояний изучаемой марковской последовательности. По доказанной лемме, последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geqslant 0\}$ является марковской цепью с множеством состояний $G = \Gamma \times X \times X$. Марковская цепь, изучаемая в данной работе, является разложимой (то есть все ее состояния не образуют один класс сообщающихся состояний). Далее мы классифицируем состояния изучаемой марковской последовательности.

Теорема 1. *Пусть* $x = (x_1, x_2) \in X^2$ *и*

$$G = \{(\Gamma^{(h)}, x) \colon \Gamma^{(h)} \in \Gamma, x \in X^2\},$$
$$G^{(3j-2)} = \{(\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$
$$G^{(3j-1)} = \{(\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) \colon x_s < K_s - l_{3s}\},$$
$$G^{(6+j)} = \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_j > 0\} \cup \{(\Gamma^{(6+j)}, x) \colon x_s \geqslant K_s - l_{3s}\},$$
$$G_j = \begin{cases} G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)}, & l_{3j-2} > 0, \\ G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} \cup G^{(3j-1)}, & l_{3j-2} = 0. \end{cases}$$

Тогда: 1) *состояния из* G_j *являются несущественными;* 2) *класс* $G_0 = G \backslash (G_1 \cup G_2)$ *является неразложимым апериодическим классом существенных состояний.*

Доказательства леммы 1 и теоремы 1 приведены в [8].

2. Свойства условных распределений входных потоков системы

Обозначим
$$\varphi_{3j-2}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x),$$
где $b = (b_1, b_2)$, $x \in X^2$.

В силу независимости потоков и того, что поступление заявок имеет распределение (1), а также время пребывания в состоянии $\Gamma^{(3j-2)}$ фиксировано и равно $T^{(3j-2)}$ получаем:
$$\varphi_{3j-2}(b) = P_1(T_{3j-2}, b_1) P_2(T_{3j-2}, b_2). \tag{3}$$

Обозначим условное распределение

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j, b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x),$$

где $b = (b_1, b_2)$; $x \in X^2$; $k = \overline{1, n_j}$; k — число продлений; l_{3j-1} — число заявок, которые могут быть обслужены за один такт продления. Найдем $\varphi_{3j-1,k}(x_j, b)$. Введем случайную величину $\eta^{(d)}_{j,i}(\omega)$, равную числу заявок j-го потока, которые поступили в систему на интервале $[\tau_i + (d-1)T_{3j-1}; \tau_i + dT_{3j-1}]$. Тогда, событие

$$A_{j,i}(x, k, b) = \{\omega\colon \eta_i(\omega) = b, \xi_i(\omega) = kl_{3j-1}y_j, \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i(\omega) = x\}$$

согласно принятому алгоритму можно записать следующим образом:
1) $1 \leqslant k < n_j$

$$\begin{aligned}
&A_{j,i}(x, k, b) = \{\omega\colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i(\omega) = x,\\
&(\kappa_{j,i}(\omega) + \sum_{v=1}^{d} \eta^{(v)}_{j,i}(\omega) \geqslant K_j + dl_{3j-1})\ or\ (\eta^{(d)}_{j,i}(\omega) > 0, d < k),\\
&\sum_{v=1}^{k-1} \eta^{(v)}_{j,i}(\omega) = b_j, \eta^{(k)}_{j,i}(\omega) = 0, \eta_{s,i}(\omega) = b_s\}, x_j - kl_{3j-1} + b_j < K_j;
\end{aligned}$$

2) $k = n_j$

$$\begin{aligned}
&A_{j,i}(x, k, b) = \{\omega : \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i(\omega) = x,\\
&(\kappa_{j,i}(\omega) + \sum_{v=1}^{d} \eta^{(v)}_{j,i}(\omega) \geqslant K_j + dl_{3j-1})\ or\ (\eta^{(d)}_{j,i}(\omega) > 0, d < k),\\
&\sum_{v=1}^{n_j} \eta^{(v)}_{j,i}(\omega) = b_j, \eta^{(k)}_{j,i}(\omega) = 0, \eta_{s,i}(\omega) = b_s\};
\end{aligned}$$

3) во всех других случаях: $A_{j,k}(x, k, b) = \emptyset$.

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{3j-1,k}(x_j, b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) =\\
&= \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j, \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, k_i = x | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) =\\
&= \mathbf{P}(A_{j,i}(x, k, b) | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x).
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&A^{(1)}_j(x_j, 0) = \{h_1 = 0\}, \text{при } x_j < K_j + l_{3j-1};\\
&A^{(k)}_j(x_j, b_j) =\\
&= \{h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in X^k\colon x_j + \sum_{m=1}^{v} h_v \geqslant K_j + vl_{3j-1} \quad \text{или} \quad h_m > 0,\\
&v < k, h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} = b_j, h_k = 0\}, \quad \text{если } 1 \leqslant k \leqslant n_j;
\end{aligned}$$

$A_j^{(n_j)}(x_j,b_j)=$

$\{h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)\in X^{n_j}\colon x_j+\sum\limits_{m=1}^{v}h_v\geqslant K_j+vl_{3j-1}\quad$ или $\quad h_m>0,$

$v<n_j, h_1+h_2+\ldots+h_{n_j}=b_j\}$;

$A_j^{(k)}(x_j,b_j)=\emptyset$ при других значениях x_j, b_j.

Поскольку для любого $i\geqslant 0$ случайные величины $\eta_{j,i}^{(d)}(\omega)$, $d=\overline{1,n_j}$ являются независимыми и имеющими распределение (1), то вид условных распределений можно найти с помощью теорем умножения и сложения:

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j,b)=P_s(kT_{3j-1},b_s)\sum_{h\in A_j^{(k)}(x_j,b_j)}\prod_{d=1}^{k}P_j(T_{3j-1},h_d). \tag{4}$$

Пусть произошло событие $\{\omega_i\colon\Gamma(\omega)=\Gamma^{(6+j)}\}$, где $j=1,2$. В этом случае опять необходимо рассматривать условные совместные распределения векторов η_i,η_i'. Длительность пребывания ОУ в состоянии $\Gamma^{(6+j)}$ является случайной величиной. Значит, распределение случайного вектора ξ_i не будет вырожденным. Следовательно, нужно рассматривать условные совместные распределения случайных векторов ξ_i,η_i,η_i'.

Обозначим:

$$\varphi_{6+j,d,a_j}(b)=\mathbf{P}(\eta_i=b,\xi_i=a_jy_j,\eta_i'=y_d|\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)},\kappa_i=x),$$

где $d=0,1,2$; $a_j\in\{0,1,\ldots l_{3j-2}\}$.

Если случайный вектор η_i' принимает значение y_0 или y_j, а случайный элемент Γ_i принимает значение $\Gamma^{(6+j)}$, то в силу применяемого алгоритма случайная величина $\Delta_i=\tau_{i+1}-\tau_i$ принимает значение $T^{(3j-2)}$. Следовательно, случайный вектор ξ_i принимает значение $l_{3j-2}y_j$. Отсюда, при любом $x\in X^2$ получаем:

$$\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)=\mathbf{P}(\eta_i=\eta_i'=y_0|\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)},\kappa_i=x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)T_{3j-2}}. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим событие $\{\omega\colon\Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s\}$. В этом случае ОУ переключается из состояния $\Gamma^{(6+j)}$ в состояние $\Gamma^{(3j)}$ в момент прихода первой заявки s-го потока. Таким образом, событие $\{\omega\colon\Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s,\eta=b\}$ является возможным только при $b=ky_s$. Если $\omega\in\{\omega\colon\Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s\}$, то $\Delta_i(\omega)=\theta_{s,i}(\omega)$, где случайные величины $\theta_{1,i}(\omega)$ и $\theta_{2,i}(\omega)$ равны длительности промежутков времени, прошедших с момента τ_i до момента прихода первой заявки 1-го и 2-го потоков. Для $i\geqslant 0$ случайные величины $\theta_{1,i}(\omega)$, $\theta_{2,i}(\omega)$ являются независимыми и распределенными по экспоненциальному закону. Таким образом, $\xi_{j,i}(\omega)$ и $\theta_{j,i}(\omega)$ связаны соотношением:

$$\xi_{j,i}(w)=\begin{cases}\max\{0,\frac{\theta_{j,i}(w)-\mu_{j,1}^{-1}}{\theta_j\mu_{j,1}^{-1}}\}, & \text{если } \frac{\theta_{j,i}(w)-\mu_{j,1}^{-1}}{\theta_j\mu_{j,1}^{-1}} - \text{целое};\\ \max\{0,\left[\frac{\theta_{j,i}(w)-\mu_{j,1}^{-1}}{\theta_j\mu_{j,1}^{-1}}\right]+1\}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Итак, при любых значениях $x \in X^2$ находим:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{6+j,s,0}(ky_s) = \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \theta_{s,i} < \mu_{j,1}^{-1}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \theta_{s,i} < \mu_{j,1}^{-1}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x, \theta_{s,i} = u) \times \\
&\times f(u | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) du = \\
&= \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x, \theta_{s,i} = u) du = \qquad (6) \\
&= \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \int_u^{+\infty} P_s(k) \lambda_j e^{-\lambda_j v} dv du = P_s(k) \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \times e^{-\lambda_j u} du = \\
&= P_s(k) \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-(\lambda_s + \lambda_j) u} du = \frac{\lambda_s P_s(k)}{\lambda_s + \lambda_j} (1 - e^{-(\lambda_s + \lambda_j) \mu_{j,1}^{-1}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) = \\
&= \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1} \leqslant \theta_{s,i} < \mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \\
&= \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1} \leqslant \theta_{s,i} < \mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \\
&= \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times f(u | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) du = \\
&= \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x, \theta_{s,i} = u) du = \\
&= \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \int_u^{+\infty} P_s(k) \lambda_j e^{-\lambda_j u} du = \\
&= P_s(k) \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \times e^{-\lambda_j u} du = \\
&= P_s(k) \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1} + a_j \theta_j \mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-(\lambda_s + \lambda_j) u} du = \\
&= \frac{\lambda_s P_s(k)}{\lambda_s + \lambda_j} e^{-(\lambda_s + \lambda_j)(\mu_{j,1}^{-1} + (a_j - 1)\theta_j \mu_{j,1}^{-1})} \times (1 - e^{-(\lambda_s + \lambda_j)\theta_j \mu_{j,1}^{-1}}),\ 0 < a_j < l_{3j-2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь условную вероятность $\mathbf{P}(\eta_i = b, \eta'_i = y_d | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x)$, которую будем обозначать через $\varphi_{3j,d}(b)$, где $d = 0,\ 1,\ 2$. Используя распределение (1) и независимость потоков, найдем формулу для $\varphi_{3j,0}(b)$ в следующем виде

$$\varphi_{3j,0}(y_0) = \mathbf{P}(\eta_i = 0, \eta'_i = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, k_i = x) = e^{-(\lambda_j + \lambda_s) T_{3j}}. \tag{8}$$

Для $\varphi_{3j,j}(b)$ получим следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{3j,j}(b) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i(\omega) = b, \eta_i'(\omega) = y_j\}|\{\omega\colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i(\omega) = x\}) = \\
&= \mathbf{P}(\{\omega\colon \theta_{j,i}(\omega) < \min(\theta_{s,i}(\omega), T_{3j}), \eta_i(\omega) = b\}|\{\omega\colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i(\omega) = x\}) = \\
&= \mathbf{P}(\theta_{j,i} < \theta_{s,i}, \theta_{j,i} < T_{3j}, \eta_i = b|\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x) = \\
&= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i u}\mathbf{P}(\theta_{j,i} < \theta_{s,i}, \theta_{j,i} < T_{3j}, \eta_i = b|\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x, \theta_{j,i} = u)du = \\
&= \int_0^{T_{3j}} \lambda_i e^{-\lambda_i u}\mathbf{P}(u < \theta_{s,i}, \eta_{ji} = b_j, \eta_{si} = b_s|\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x, \theta_{j,i} = u)du = \\
&= \int_0^{T_{3j}} \lambda_i e^{-\lambda_i u}\mathbf{P}(\eta_{j,i} = b_j|\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x, \theta_{j,i} = u)\times \\
&\times \mathbf{P}(u < \theta_{s,i}, \eta_{si} = b_s|\eta_{j,i} = b_j, \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x, \theta_{j,i} = u)du.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Таким образом, было установлено следующее утверждение.

Теорема 2. *При b, $x \in X^2$, $k = \overline{1, n_j}$, $d \in \{0, 1, 2\}$, $a_j \in \{0, 1, \dots, l_{3j-2}\}$ условные распределения*

$$
\begin{aligned}
\varphi_{3j-2}(b) &= \boldsymbol{P}(\eta_i = b|\Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x), \\
\varphi_{3j-1,k}(x_j, b) &= \boldsymbol{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j|\Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x), \\
\varphi_{6+j,d,a_j}(b) &= \boldsymbol{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y_d|\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x), \\
\varphi_{3j,d}(b) &= \boldsymbol{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_d|\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x),
\end{aligned}
$$

для случайных векторов η_i, ξ_i, η_i' задаются с помощью соотношений (3) – (9).

3. Рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geqslant 0\}$

Для $i \geqslant 0, r = \overline{1, 8}$, $x \in X^2$ обозначим: $Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x)$. Далее приведем окончательные соотношения, которые позволяют при известных значениях $Q_i^{(r)}(x)$, $(\Gamma^{(r)}, x) \in G$, находить значения $Q_{i+1}^{(r')}(w)$ для любого $(\Gamma^{(r')}, w) \in G$ и $w = (w_1, w_2) \in X^2$. Если $(\Gamma^{(r)}, w) \in G_1 \cup G_2$ и $i \geqslant 0$, то $Q_{i+1}^{(r)}(w) = 0$. Остальные рекуррентные соотношения находятся по формуле полной вероятности, где в качестве гипотез выступают события $\{\Gamma_i(w) = \Gamma^{(r)}, \kappa_i(w) = x\}$, $r = \overline{1, 8}$, $x \in X^2$. При выводе рекуррентных соотношений были использованы формула (2) и выражения (3) – (9) для совместных распределений случайных векторов η_i, ξ_i, η_i'.

Сначала приведем вывод и рекуррентные формулы для $Q_{i+1}^{(6+j)}(w)$.

Лемма 2. *Для $Q_{i+1}^{(6+j)}(w)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$
\begin{gathered}
Q_{i+1}^{(6+j)}(y_0) = \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(y_0), \quad \textit{при } w_s = 0; \\
Q_{i+1}^{(6+j)}(w_s y_s) = Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s})y_s)\varphi_{3s}(y_0), \quad \textit{при } 0 < w_s < K_s - l_{3s}.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:
1) при $w_s = 0$ выводим

$$Q_{i+1}^{(6+j)}(y_0) = \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} P(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$
$$\times P(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = y_0) =$$
$$= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\ P(\eta_i = y_0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) = \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(y_0);$$

2) если $0 < w_s < K_s - l_{3s}$, то

$$Q_{i+1}^{(6+j)}(w_s y_s) = \sum_x \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} P(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$
$$\times P(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) =$$
$$= Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s}) y_s) P(\eta_i = y_0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) =$$
$$= Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s}) y_s) \varphi_{3s}(y_0).$$

□

Доказательство остальных рекуррентных соотношений для $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$, $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)$ и $Q_{i+1}^{(3j)}(w)$, $w \in X^2$, аналогично доказательству для $Q_{i+1}^{(6+j)}(w)$. Поэтому для этих случаев приведем только окончательные рекуррентные соотношения.

Лемма 3. *Для $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:*
1) *если $w_j > 0$ и $w_s = 0$, то*

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_j y_j) = \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}((w_j - x_j) y_j) + \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s,j}(w_j y_j) +$$
$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}(w_j y_j) + \sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1, w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}((w_j - l_{3j}) y_j);$$

2) *если $w_j > 0$, $w_s \leqslant K_s - l_{3s}$, то*

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w) = \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w - x_j y_j) + \sum_{x_j=1}^{w_j} \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w - x + l_{3s}) +$$
$$+ \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w) + \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1, w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w + (l_{3s} - x_s) y_s) +$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w)+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_j)y_j);$$

3) *если* $w_j>0$, $w_s\geqslant K_s-l_{3s}$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x_jy_j)+\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})+$$
$$+\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s}(w+(l_{3s}-x_s)y_s)+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s,j}(w)+$$
$$+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1,w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_s)y_s)+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w)+$$
$$+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_j)y_j);$$

4) *если* $w_j=0$ *и* $w_s\geqslant K_s-l_{3s}$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_sy_s)=\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s}((w_s-x_s+l_{3s})y_s).$$

Лемма 4. *Для* $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)$ *справедливы следующие рекуррентные соотношения:*
1) *если* $w_j=0$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w_sy_s)=\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x)\sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{3j-2}(b_jy_j+(w_s-x_s)y_s)+$$
$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x)\sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_jy_j+(w_s-x_s)y_s);$$

2) *если* $w_j>0$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)=\sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x)\varphi_{3j-2}(w-x+l_{3j-2}y_j)+$$
$$+\sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x)\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w-x+l_{3j-2}y_j).$$

Лемма 5. *Для* $Q_{i+1}^{(3j)}(w)$ *справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

1) *если* $w_j = 0$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w_s y_s) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \varphi_{3j-1,k}(x_j, b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) +$$
$$+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + w_s y_s) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) +$$
$$+ \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{a_j} \sum_{k=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + (w_s - k) y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(k y_s);$$

2) *если* $0 < w_j < K_j$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{w_j + kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,k}(x_j, w - x + kl_{3j-1}) +$$
$$+ Q_i^{(6+j)}(w + l_{3j-2} y_j) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) + \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{k=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w + a_j y_j - k y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(k y_s);$$

3) *если* $w_j \geqslant K_j$, *то*

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w) = \sum_{x_j=0}^{w_j + n_j l_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,n_j}(x_j, w - x + n_j l_{3j-1}) +$$
$$+ Q_i^{(6+j)}(w + l_{3j-2} y_j) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) + \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{k=1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(w + a_j y_j - k y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(k y_s).$$

Заключение

Построена математическая модель адаптивного управления неоднородными конфликтными потоками. Получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной марковской цепи. Содержание теоремы 1 и утверждения лемм 2 – 5 позволяют в дальнейшем найти необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения в системе управления конфликтными неоднородными потоками.

Список литературы

[1] Fedotkin M.A., Litvak N.V. A conflict flows control by an information about queue lengths // Proceedings of the International Conference "Distributed Computer Communication Networks", DCCN'97 (Tel–Aviv university). 1997. Pp. 68–72.

[2] Fedotkin M.A., Litvak N.V. Random processes of adaptive control for conflict flows // Proceeding of the International conference "Prague Stochastic'98" (Prague, Czech Republic). Vol. 1. 1998. Pp. 147–152.

[3] Литвак Н.В., Федоткин М.А. Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками. Качественное и численное исследование // Автоматика и телемеханика. 2000. № 6. С. 69–78.

[4] Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V. Construction and analysis of a mathematical model of spatial and temporal characteristics of traffic flows // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. Vol. 48, № 6. Pp. 358–367.

[5] Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V. Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, № 1. Pp. 29–36.

[6] Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В. Построение математической модели адаптивного управления неординарными потоками // Материалы Международной научной конференции «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, БГУ). 2015. С. 106–111.

[7] Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В. Предельные свойства системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // Материалы 18-ой Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь», DCCN-15 (Москва). 2015. С. 233–240.

[8] Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А. Анализ дискретной модели системы адаптивного управления конфликтными неоднородными потоками // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2019. № 1. С. 19–26.

Образец цитирования

Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А. Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 23–37. https://doi.org/10.26456/vtpmk522

Сведения об авторах

1. **Кудрявцев Евгений Владимирович**
ассистент кафедры программной инженерии Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, ННГУ им. Н.И. Лобачевского. E-mail: evgkudryavcev@gmail.com

2. **Федоткин Михаил Андреевич**
профессор кафедры программной инженерии Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, ННГУ им. Н.И. Лобачевского. E-mail: fma5@rambler.ru

RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF ADAPTIVE CONTROL OF CONFLICT FLOWS OF INHOMOGENEOUS DEMANDS

Kudryavtsev Evgeniy Vladimirovich
Assistant at Software Engineering department,
Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics,
National Research Nizhny Novgorod State University N.I. Lobachevsky
Russia, 603950, Nizhny Novgorod, Gagarin Ave., 23, UNN N.I. Lobachevsky.
E-mail: evgkudryavcev@gmail.com

Fedotkin Mikhail Andreevich
Professor at Software Engineering department,
Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics,
National Research Nizhny Novgorod State University N.I. Lobachevsky
Russia, 603950, Nizhny Novgorod, Gagarin Ave., 23, UNN N.I. Lobachevsky.
E-mail: fma5@rambler.ru

Received 04.10.2018, revised 18.12.2018.

Adaptive control system of conflicting flows of inhomogeneous demands was considered in the paper. As a mathematical description of such a system, the serving device state and the length of the queues for conflicting input flows was selected. The Markov property of the sequence of states of the system is proved and their classification is carried out. Recurrence relations for one-dimensional distributions of a sequence of states of the system are found.

Keywords: conflict flows, non-cyclic control, stationary probability distribution, generating functions.

Citation

Kudryavtsev E.V., Fedotkin M.A., "Research of the Mathematical Model of Adaptive Control of Conflict Flows of Inhomogeneous demands", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 23–37 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk522

References

[1] Fedotkin M.A., Litvak N.V., "A conflict flows control by an information about queue lengths", *Proceedings of the International Conference "Distributed Computer Communication Networks"*, DCCN'97 (Tel–Aviv university), 1997, 68–72.

[2] Fedotkin M.A., Litvak N.V., "Random processes of adaptive control for conflict flows", *Proceeding of the International conference "Prague Stochastic'98"*. V. 1 (Prague, Czech Republic), 1998, 147–152.

[3] Litvak N.V., Fedotkin M.A., "An adaptive control for conflicting flows: a quantitative and numerical study of its probabilistic model", *Automation and Remote Control*, **61**:6-1 (2000), 952–960.

[4] Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V., "Construction and analysis of a mathematical model of spatial and temporal characteristics of traffic flows", *Automatic Control and Computer Sciences*, **48**:6 (2014), 358–367.

[5] Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V., "Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:1 (2015), 29–36.

[6] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., "Construction of a mathematical model of adaptive control of extraordinary flows", *Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Teoriya veroyatnostej, sluchajnye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya" [Materials of the International Scientific Conference "Theory of Probability, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications"]* (Minsk, BGU), 2015, 106–111 (in Russian).

[7] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., "Limiting properties of the system of adaptive control of conflicting flows of heterogeneous requirements", *Materialy 18-oj Mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Raspredelennye kompyuternye i telekommunikatsionnye seti: upravlenie, vychislenie, svyaz" [Materials of the 18th International Scientific Conference "Distributed Computer and Telecommunication Networks: Control, Calculation, Communication"]*, DCCN-15 (Moscow), 2015, 233–240 (in Russian).

[8] Kudryavtsev E.V., Fedotkin M.A., "Analysis of the discrete model of the system of adaptive control of conflict non-uniform flows", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2019, № 1, 19–26 (in Russian).