УДК 517.95, 532.5

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ БИО–САВАРА

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.02.2019, после переработки 20.03.2019.

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости была предложена автором в 1993 году. В работе построены новые точные решения указанной системы для установившихся течений. Они удовлетворяют также системам Эйлера и Навье–Стокса. Поле скоростей вычисляется путем сложения интеграла Био–Савара и градиента гармонической функции. Изложено обоснование подхода, доказаны соответствующие теоремы. Дана физическая интерпретация решений. Выяснен смысл констант, в них входящих.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, уравнения Эйлера и Навье–Стокса, точные решения, формула Био–Савара.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49.
https://doi.org/10.26456/vtpmk525

Введение

Магнитное поле, создаваемое элементом постоянного тока, вычисляется по известной формуле Био–Савара [1]. Интеграл Био–Савара нашел свое применение в гидродинамике (см. [2], с. 281 – 285). На его основе были построены точные решения стационарных систем Эйлера и Навье–Стокса.

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости была предложена автором в 1993 году [3]. Ее подробный феноменологический вывод приведен в [4]. В монографии [5], а также в статьях [6–8], изложены методы построения точных решений КГД системы в стационарном и нестационарном случае. Эти решения подразделяются на три непересекающихся класса. Решения первого класса являются общими сразу для трех систем: Эйлера, Навье–Стокса и КГД. Решения второго класса удовлетворяют системам Навье–Стокса и КГД, но не подходят для уравнений Эйлера. Труднее всего находить точные решения, специфические для квазигидродинамической системы и не удовлетворяющие уравнениям Эйлера и Навье–Стокса.

В настоящей работе построены новые точные решения первого класса стационарной квазигидродинамической системы. Поле скоростей вычисляется путем сложения интеграла Био–Савара и градиента гармонической функции. Изложено обоснование подхода, доказаны соответствующие теоремы. Дана физическая интерпретация решений. Выяснен смысл констант, в них входящих.

1. Стационарная квазигидродинамическая система. Системы Навье–Стокса и Эйлера

Квазигидродинамическая система для описания установившихся течений слабосжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\text{div } (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 2\nu \text{ div } \widehat{\sigma} + \text{div } \big((\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big). \tag{1.2}$$

Влияние внешних сил не учитывается. Система замкнута относительно неизвестных функций — скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и давления $p = p(\vec{x})$. Здесь и ниже использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u}\otimes\vec{u})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задает точку в правой декартовой системе координат пространства $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента в указанном пространстве. Величина ρ — средняя плотность жидкости, которая считается положительной константой. Символом ν обозначен постоянный коэффициент кинематической вязкости. Тензор скоростей деформаций вычисляется по формуле

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big).$$

Вектор $\vec{w}$ определяется с помощью выражения

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big),$$

где $\tau = \frac{\nu}{c_s^2}$ — характерное время релаксации, c_s — скорость звука в жидкости.

Формально переходя в (1.1) – (1.2) к пределу при $c_s \to +\infty$, получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости для стационарных течений:

$$\text{div } \vec{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$\text{div } (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\Delta\vec{u}. \tag{1.4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Последующий предельный переход в (1.3) – (1.4) при $\nu \to +0$ дает систему Эйлера

$$\text{div } \vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\text{div } (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \tag{1.6}$$

для установившихся течений идеальной жидкости.

2. Общие решения уравнений Эйлера, Навье–Стокса и квазигидродинамической системы

Займемся построением общих точных решений трех указанных систем. Справедлива

Теорема 1. *Пусть V — произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{C}^\infty(V)$. Если*

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

$$rot\ \vec{u} = 0 \tag{2.2}$$

при всех $\vec{x} \in V$, то для произвольной постоянной C пара функций $(\vec{u}, p)$, где

$$p = C - \frac{\rho \vec{u}^2}{2} \tag{2.3}$$

задает в V общее точное решение систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД.

Доказательство. Пользуясь известным (см. [2], с. 32) векторным тождеством

$$\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + [\vec{u}\times \text{rot }\vec{u}],$$

представим (1.5) – (1.6) в форме Громеки–Лэмба:

$$\text{div }\vec{u} = 0, \tag{2.4}$$

$$\nabla\Big(\frac{\rho\vec{u}^2}{2} + p\Big) = \rho[\vec{u}\times \text{rot }\vec{u}]. \tag{2.5}$$

Равенства (2.4), (2.5) выполняются в силу (2.1) – (2.3). Таким образом, пара $(\vec{u}, p)$ является точным решением системы Эйлера (1.5) – (1.6) в области V. Поскольку

$$\Delta\vec{u} = \nabla\big(\text{div }\vec{u}\big) - \text{rot}\big(\text{rot }\vec{u}\big) = 0,$$

правая часть (1.4) обращается в ноль. Это означает, что подстановка $(\vec{u}, p)$ в систему Навье–Стокса (1.3) – (1.4) приводит к истинным равенствам. Так как

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\bigg(\nabla\Big(\frac{\rho\vec{u}^2}{2} + p\Big) - \rho[\vec{u}\times \text{rot }\vec{u}]\bigg) = 0,$$

$$2\ \text{div }\widehat{\sigma} = \Delta\vec{u} + \nabla\big(\text{div }\vec{u}\big) = 0,$$

пара функций $(\vec{u}, p)$ удовлетворяет также квазигидродинамической системе (1.1) – (1.2). $\square$

3. Точные решения на основе интеграла Био–Савара

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ простой (без точек самопересечения) замкнутый гладкий контур

$$\gamma = \{\vec{R} = \vec{R}(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]\}.$$

Будем считать, что выполнены условия $\vec{R}(\varphi) \in \mathbf{C}^1\big([\alpha,\beta]\big)$, $\vec{R}'(\varphi) \neq 0$, $\forall \varphi \in [\alpha,\beta]$, $\alpha < \beta$. Кроме того,

$$\vec{R}(\alpha) = \vec{R}(\beta). \tag{3.1}$$

Пусть

$$V = \mathbb{R}^3_{\vec{x}} \backslash \gamma$$

— область в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Заметим, что V не является поверхностно- и линейно-односвязной областью. Зададим в V векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ по формуле

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{\big[d\vec{R} \times (\vec{x} - \vec{R})\big]}{|\vec{x} - \vec{R}|^3} + \nabla \varPhi. \tag{3.2}$$

Здесь Γ — положительная постоянная, $\varPhi = \varPhi(\vec{x})$ — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta \varPhi = 0, \qquad \vec{x} \in V. \tag{3.3}$$

Первое слагаемое в правой части (3.2) представляет собой интеграл Био–Савара. Приведем доказательства некоторых утверждений, опираясь на известные факты из теории электромагнетизма.

Теорема 2. *Равенство* (3.2) *можно представить в виде*

$$\vec{u} = rot\ \vec{A} + \nabla \varPhi, \tag{3.4}$$

где

$$\vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{d\vec{R}}{|\vec{x} - \vec{R}|}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Для произвольного $\vec{x} \in V$ имеем:

$$\operatorname{rot}\ \vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \operatorname{rot}\ \left(\frac{d\vec{R}}{|\vec{x} - \vec{R}|}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{\operatorname{rot}\ (d\vec{R})}{|\vec{x} - \vec{R}|} - \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{\big[(\vec{x} - \vec{R}) \times d\vec{R}\big]}{|\vec{x} - \vec{R}|^3} =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{\big[d\vec{R} \times (\vec{x} - \vec{R})\big]}{|\vec{x} - \vec{R}|^3}. \tag{3.6}$$

При проведении выкладок было использовано известное векторное тождество

$$\operatorname{rot}\ \big(\psi \vec{a}\big) = \psi\ \operatorname{rot}\ \vec{a} + \big[\nabla \psi \times \vec{a}\big].$$

Формула (3.2) может быть приведена к виду (3.4) с помощью (3.6). □

Следствие 1. *В области V выполняется равенство*

$$div\ \vec{u} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Принимая во внимание (3.4) и (3.3), находим

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } \big(\text{rot } \vec{A}\big) + \Delta\varPhi = 0, \qquad \vec{x} \in V.$$

□

Теорема 3. *В области V выполняются равенства*

$$div\ \vec{A} = 0, \tag{3.8}$$

$$\Delta\vec{A} = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. а) Для всех $\vec{x} \in V$ имеем:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma} \text{div } \left(\frac{d\vec{R}}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma} \frac{\text{div } (d\vec{R})}{|\vec{x}-\vec{R}|} +$$

$$+\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right)dR_i = -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial R_i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right)dR_i =$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma} d_{\vec{R}}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}(\alpha)|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}(\beta)|}\right) = 0. \tag{3.10}$$

При проведении вычислений было использовано векторное тождество

$$\text{div } \big(\psi\vec{a}\big) = \psi \text{ div } \vec{a} + \big(\vec{a}\cdot\nabla\psi\big),$$

а также условие (3.1). Из (3.10) следует (3.8).

б) При каждом $\vec{x} \in V$ выполняются равенства

$$\Delta\vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right)d\vec{R} = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{R}|}\right)\right]d\vec{R} =$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i-R_i}{|\vec{x}-\vec{R}|^3}\right)d\vec{R} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{\gamma}\left(\frac{3}{|\vec{x}-\vec{R}|^3} - \frac{3}{|\vec{x}-\vec{R}|^3}\right)d\vec{R} = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекает (3.9). □

Следствие 2. *В области V выполняется равенство*

$$rot\ \vec{u} = 0. \tag{3.12}$$

Доказательство. Вспоминая формулы (3.4), (3.8) и (3.9), находим

$$\text{rot } \vec{u} = \text{rot } \big(\text{rot } \vec{A}\big) + \text{rot } \big(\nabla\varPhi\big) = \nabla\big(\text{div } \vec{A}\big) - \Delta\vec{A} = 0, \quad \vec{x} \in V.$$

Отсюда следует (3.12). □

Теорема 4. *Пусть* $V = \mathbb{R}^3_{\vec{x}} \backslash \gamma$ *— область в пространстве* $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. *Тогда пара функций* $(\vec{u}, p)$, *определяемых равенствами*

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma} \frac{\left[d\vec{R} \times (\vec{x} - \vec{R})\right]}{|\vec{x} - \vec{R}|^3} + \nabla \varPhi, \tag{3.13}$$

$$p = C - \frac{\rho \vec{u}^2}{2}, \tag{3.14}$$

где $C = const$, *задает в* V *общее точное решение систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД.*

Доказательство. В силу следствий из теорем 2, 3 все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому указанная пара функций образует точное решение стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД. □

Выясним смысл положительной постоянной Γ. Пусть γ_* простая (без точек самопересечения) замкнутая гладкая кривая в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, охватывающая контур γ, ориентация которой согласована с вектором $d\vec{R}$ по правилу правого винта.

Теорема 5. *Справедлива формула*

$$\oint\limits_{\gamma_*} (\vec{u} \cdot d\vec{x}) = \Gamma. \tag{3.15}$$

Доказательство. Соотношение (3.15) следует из цепочки равенств

$$\oint\limits_{\gamma_*} (\vec{u} \cdot d\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma_*} \oint\limits_{\gamma} \frac{\Big(d\vec{x} \cdot \big[d\vec{R} \times (\vec{x} - \vec{R})\big]\Big)}{|\vec{x} - \vec{R}|^3} + \oint\limits_{\gamma_*} (\nabla \varPhi \cdot d\vec{x}) =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \oint\limits_{\gamma_*} \oint\limits_{\gamma} \frac{\Big((\vec{x} - \vec{R}) \cdot \big[d\vec{x} \times d\vec{R}\big]\Big)}{|\vec{x} - \vec{R}|^3} + \oint\limits_{\gamma_*} d\varPhi = \Big| \vec{r} = \vec{x} - \vec{R}, \ \big[d\vec{x} \times d\vec{R}\big] = \vec{n} dS \Big| =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n})}{|\vec{r}|^3} dS = \frac{\Gamma}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} d\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi} \Omega = \Gamma.$$

Здесь

$$\Sigma = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3_{\vec{r}} : \vec{r} = \vec{x} - \vec{R}, \ \vec{x} \in \gamma_*, \ \vec{R} \in \gamma\}$$

— поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{r}}$, топологически эквивалентная поверхности тора и ориентированная полем внешних единичных нормалей $\vec{n}$, dS — элемент площади этой поверхности около вектора $\vec{n}$. Символом $d\Omega$ обозначен телесный угол, под которым видна площадка dS из точки $\vec{r} = 0$. Телесный угол Ω, под которым видна вся поверхность Σ из указанной точки, равен 4π. □

Полученный результат аналогичен хорошо известной теореме о циркуляции вектора магнитной индукции вдоль контура, охватывающего тонкий провод с постоянным электрическим током [1].

4. Примеры точных решений

Рассмотрим некоторые примеры общих решений стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД.

Пример 1. *Кольцевой вихрь.* Пусть $oxyz$ — правая декартова система координат в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ — соответствующие ей единичные орты. Кривая γ представляет собой окружность с центром в начале координат и положительным радиусом a, лежащую в плоскости xoy:

$$\gamma = \{\vec{R} = (R_x, R_y, R_z): \ R_x = a\cos\varphi, \ R_y = a\sin\varphi, \ R_z = 0, \ \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Ориентация γ согласована с вектором $\vec{k}$ правилом правого винта. Вектор $\vec{x}$ в базисе $(\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k})$ имеет компоненты (x, y, z). Полагая в (3.13) функцию Φ равной нулю, находим составляющие вектора скорости $\vec{u}$:

$$u_x = \frac{z\Gamma a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \ d\varphi}{\big((x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \tag{4.1}$$

$$u_y = \frac{z\Gamma a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \ d\varphi}{\big((x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \tag{4.2}$$

$$u_z = \frac{\Gamma a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{a - x\cos\varphi - y\sin\varphi}{\big((x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 + z^2\big)^{3/2}} \ d\varphi. \tag{4.3}$$

Принимая во внимание (3.14), находим распределение давления:

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}\Big(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\Big). \tag{4.4}$$

Здесь

$$p_\infty = \lim_{|\vec{x}| \to +\infty} p(\vec{x})$$

— произвольная константа. Набор функций (4.1) – (4.4) задает в области $V = \mathbb{R}^3_{\vec{x}} \backslash \gamma$ точное решение квазигидродинамической системы, отвечающее кольцевому вихрю. Для КГД системы оно построено впервые. Для систем Эйлера и Навье–Стокса этот результат был известен.

Нетрудно вычислить поле скорости на оси oz. Полагая $x = 0$, $y = 0$ в (4.1) – (4.3), получим $\vec{u} = (0, \ 0, \ u_z)$, где

$$u_z = u(z) = \frac{\Gamma a^2}{2\big(a^2 + z^2\big)^{3/2}}. \tag{4.5}$$

Если $|z| \gg a$, то (4.5) принимает вид

$$u_z = u(z) = \frac{\Gamma a^2}{2|z|^3}. \tag{4.6}$$

В теории электромагнетизма доказано [1], что на больших расстояниях от кольца, т.е. при $|\vec{x}| \gg a$, векторное поле $\vec{u}$, определяемое формулами (4.1) – (4.3), асимптотически приближается к полю точечного диполя

$$\vec{u} = 3\frac{(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^5} - \frac{\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}, \tag{4.7}$$

где

$$\vec{\mu} = \frac{\Gamma a^2}{4}\vec{k}.$$

Вычислим давление:

$$p = p_\infty - \frac{\rho\vec{u}^2}{2}. \tag{4.8}$$

Заметим, что функции (4.7), (4.8) при $\vec{x} \neq 0$ также образуют общее точное решение трех рассматриваемых систем.

Пусть

$$\gamma_1 = \{\vec{R} = \vec{k}t,\ t \in (-\infty, +\infty)\}$$

— прямая, совпадающая с осью oz. Она не является замкнутой и ограниченной гладкой кривой без точек самопересечения. Однако формула

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_{\gamma_1} \frac{\left[d\vec{R}\times(\vec{x}-\vec{R})\right]}{|\vec{x}-\vec{R}|^3} + \nabla\Phi$$

к указанной прямой также применима. Интеграл Био–Савара вычисляется по той же схеме, что и для тонкого прямолинейного провода с постоянным током [1]. В результате эта формула принимает вид

$$\vec{u} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + \nabla\Phi. \tag{4.9}$$

Пример 2. *Вихреисточник (плоское течение).* В области $V_1 = \mathbb{R}^3_{\vec{x}}\backslash\gamma_1$ зададим гармоническую функцию

$$\Phi = \frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4.10}$$

Подстановка (4.10) в (4.9) позволяет найти компоненты поля скорости

$$u_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \tag{4.11}$$

$$u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \tag{4.12}$$

$$u_z = 0. \tag{4.13}$$

Распределение давления имеет вид

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big). \tag{4.14}$$

Для классических уравнений гидродинамики решение (4.11) – (4.14) рассмотрено в [10] на с. 226 в рамках теории комплексных гидродинамических потенциалов. Положительная постоянная q интерпретируется как объем жидкости, исходящий от единицы длины прямой γ_1 за единицу времени.

Пример 3. *Вихреисточник (пространственное течение).* На множестве $V_1 = \mathbb{R}^3_{\vec{x}} \backslash \gamma_1$ определим гармоническую функцию

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi|\vec{x}|} = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{4.15}$$

Подставив (4.15) в (4.9), определяем составляющие вектора скорости

$$u_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{Q}{4\pi}\frac{x}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}, \tag{4.16}$$

$$u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{Q}{4\pi}\frac{y}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}, \tag{4.17}$$

$$u_z = \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{\big(x^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}. \tag{4.18}$$

Давление вычислим по формуле

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}\big(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\big). \tag{4.19}$$

Положительная константа Q равна объему жидкости, вытекающему из начала координат за единицу времени. Решение вида (4.16) – (4.19) для КГД системы построено впервые.

Заключение

Ясно, что для установившихся течений рассматриваемого класса справедлив принцип суперпозиции в следующем смысле: если $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — два распределения скорости, то для любых вещественных постоянных λ_1 и λ_2 векторное поле

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$$

также будет некоторым распределением скорости. Новое скалярное поле давления может быть найдено с помощью выражения

$$p = C - \frac{\rho\vec{u}^2}{2},$$

где $C = const$.

Заметим, что известные решения стационарной системы Навье–Стокса, соответствующие вихрям Хилла, Бюргерса и Салливана, не удовлетворяют квазигидродинамической системе. Построить точные решения, описывающие указанные вихри в рамках модели КГД, пока не удалось.

Список литературы

[1] Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука, 1983. 688 с.

[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[6] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[7] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[8] Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5–18. https://doi.org/10.26456/vtpmk507

[9] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. Точные решения квазигидродинамической системы на основе формулы Био-Савара // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49. https://doi.org/10.26456/vtpmk525

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

EXACT SOLUTIONS OF QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM ON THE BASE OF BIOT-SAVART FORMULA

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova st., TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 20.02.2019, revised 20.03.2019.

The quasi-hydrodynamic system for a slightly compressible viscous fluid was proposed by the author in 1993. In the work new exact solutions of this system for steady-state flows are constructed. They also satisfy to Euler and Navier-Stokes systems. The velocity field is calculated as the sum of Biot-Savart integral and gradient of harmonic function. The substantiation of the approach is made, the corresponding theorems are proved. Physical interpretation of solutions is given. The meaning of included constants is clarified.

Keywords: quasi-hydrodynamic system, Euler and Navier–Stokes equations, exact solutions, Biot–Savart formula.

Citation

Sheretov Yu.V., "Exact solutions of quasi-hydrodynamic system on the base of Biot-Savart formula", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 38–49 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk525

References

[1] Sivukhin D.V., *General course of physics*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 688 pp.

[2] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[3] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[4] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[5] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[6] Sheretov Yu.V., “On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk169.

[7] Sheretov Yu.V., “On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[8] Sheretov Yu.V., “On the exact solutions of quasi–hydrodynamic system that satisfy the generalized Gromeki-Beltrami condition”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 5–18 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk507.

[9] Lavrentev M.A., Shabat B.V., *Methods of the theory of functions of a complex variable*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 688 pp.