

**ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД  
К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СВОЙСТВА БИНАРНОГО  
ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА**

**Смирнов С.Н., Заночкин А.Ю.**  
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

---

*Поступила в редакцию 14.01.2020, после переработки 20.02.2020.*

---

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка: задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращение цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. В общем случае рассматривается рынок с торговыми ограничениями и предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана – Айзекса. В настоящей статье анализируется решение этих уравнений для конкретной задачи ценообразования — для бинарного опциона европейского типа, в рамках мультипликативной модели рынка, при отсутствии торговых ограничений. Получен ряд свойств решения и алгоритм численного решения уравнений Беллмана. Интерес к этой задаче, с математической точки зрения, связан с разрывностью функции выплат по опциону.

**Ключевые слова:** гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, отсутствие арбитражных возможностей, уравнения Беллмана-Айзекса, бинарный опцион.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 29–59.*  
<https://doi.org/10.26456/vtprm554>

## **Введение**

Настоящая статья примыкает к серии публикаций<sup>1</sup> [1–3, 5–7, 11], развивающих модель финансового рынка, отвечающую неопределенной детерминистской эволюции цен с дискретным временем: цены активов эволюционируют детерминистским образом в условиях неопределенности, описываемой при помощи априорной информации о возможных приращениях цен. А именно, предполагается, что они лежат в заданных компактах, зависящих от предыстории цен (такая модель является альтернативной к традиционной вероятностной модели рынка<sup>2</sup>).

---

<sup>1</sup> В работе [1], в частности, подробно описана модель рынка и приведен обзор литературы.

<sup>2</sup> В предлагаемом нами детерминистском походе изначально не задается референтная вероятностная мера, как это предполагается при вероятностном подходе, см., например, [12].

Предлагаемый подход позволяет в определенной степени упростить математическую технику и сделать формулировки утверждений более доступными для понимания экономистов; к преимуществам подхода относится теоретико-игровая интерпретация<sup>3</sup>.

В рамках вышеописанной модели рынка изучается задача ценообразования опционов, под которыми мы понимаем беспоставочные<sup>4</sup> внебиржевые контракты, выплаты по которым зависят от эволюции цен базовых активов вплоть до момента экспирации. Продавец опциона берет на себя обусловленное<sup>5</sup> обязательство, которое, в отличие от обусловленных обязательств по страховым полисам, можно защищать от рыночного риска посредством хеджирующих операций на рынках<sup>6</sup>. Одним из наиболее важных способов хеджирования обусловленных обязательств по проданному опциону заключается в суперрепликации<sup>7</sup>, другими словами, в суперхеджировании (мы предпочитаем использовать второй из двух эквивалентных терминов).

Задача ценообразования опциона при суперхеджировании состоит в определении минимального уровня средств в начальный момент<sup>8</sup>, необходимых продавцу, при выборе надлежащей стратегии хеджирования, для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону (выплаты по которому, напомним, зависят от предыстории цен).

В общем случае мы рассматриваем опционы американского типа (американские опционы) — когда контрагент продавца (владелец опциона) может исполнить опцион (т.е. потребовать выплаты в соответствии с правилами устанавливаемыми данным контрактом) в любой момент, вплоть до экспирации опциона. Опционы европейского и бермудского типов могут быть рассмотрены как частый случай американских опционов, при определенных условиях регулярности, включая “безарбитражность” рынка в определенном смысле.

Формализуем описанную выше конструкцию для задачи суперхеджирования. Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание “неопределенной” динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен<sup>9</sup> в момент времени  $t$ , а именно, что приращения  $\Delta X_t$  дисконтированных цен<sup>10</sup> лежат в априорно заданных компактах<sup>11</sup>  $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ , где точкой обозначена предыстория цен до момента  $t - 1$  включительно,  $t = 1, \dots, N$ . Обозначим через  $v_t^*(\cdot)$  точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени

<sup>3</sup> В случае отсутствия торговых ограничений эта интерпретация позволяет дать важное с экономической точки зрения объяснение возникновения риск-нейтральных вероятностей, как одно из свойств наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка.

<sup>4</sup> Для целей риск-менеджмента используются производные финансовые инструменты, как правило, являющиеся беспоставочными контрактами.

<sup>5</sup> Англ. contingent liability.

<sup>6</sup> Подразумеваются операции с базовыми активами и безрисковым активом.

<sup>7</sup> Этот термин возник в связи с тем, что на неполных рынках невозможна репликация обусловленных обязательств (что возможно только на полных рынках).

<sup>8</sup> Иными словами, это премия, взимаемая с покупателя опциона, если продавец использует ценообразование, отвечающее суперхеджированию.

<sup>9</sup> Приращения берутся “назад”, т.е.  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ , где  $X_t$  вектор дисконтированных цен в момент времени  $t$ ;  $i$ -ая компонента этого вектора представляет собой цену единицы  $i$ -го актива.

<sup>10</sup> Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену равную единице.

<sup>11</sup> Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория  $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$  для  $K_t$ , в то время как для функций  $v_t^*$  и  $g_t$ , введенных ниже, это история  $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ .

$t$ , при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана-Айзека в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге  $t$  “наилучшей” допустимой стратегии<sup>12</sup> хеджирования  $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$  для “наихудшего” сценария  $y \in K_t(\cdot)$  приращения (дисконтированных) цен для заданных функций  $g_t(\cdot)$ , описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \\ & t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (\text{ВА})$$

где  $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$  описывает предысторию по отношению к настоящему моменту  $t$ . Условия для справедливости (ВА) сформулированы в Теореме 3.1 из [1].

При этом удобно (формально) считать, что  $g_0 = -\infty$  (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени);  $g_t \geq 0$  для  $t = 1, \dots, N$  в случае американского опциона. Множество  $D_t(\cdot)$  предполагается выпуклым и  $0 \in D_t(\cdot)$ .

Многозначные отображения  $x \mapsto K_t(x)$  и  $x \mapsto D_t(x)$ , а также функции  $x \mapsto g_t(x)$ , предполагаются заданными для всех  $x \in (\mathbb{R}^n)^t$ ,  $t = 1, \dots, N$ . Поэтому функции  $x \mapsto v_t^*(x)$  задаются уравнениями (ВА) для всех  $x \in (\mathbb{R}^n)^t$ .

В уравнениях (ВА) функции  $v_t^*$ , а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$  – двухточечной компактификации<sup>14</sup>  $\mathbb{R}$ .

Вывод уравнений Беллмана-Айзека (ВА) легко получается рассуждениями “инженерного” характера. Неформальным экономическим языком можно это пояснить следующим образом, считая для упрощения, что точные верхние и нижние грани в (ВА) достигаются. Пусть  $t \leq N$ ; к текущему (настоящему) моменту времени  $t - 1$  известна предыстория (дисконтированных) цен  $x_1, \dots, x_{t-1}$ . Стоимость  $V_{t-1}$  портфеля, хеджирующего обусловленное обязательство по проданному американскому опциону, для гарантированного исполнения обязательств должна быть, во-первых, не менее текущих обязательств, равных потенциальным выплатам  $g_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ . Во-вторых, стоимость портфеля в следующий момент  $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$  (здесь стратегия  $H_t$  формируется в момент  $t - 1$  и может зависеть только от предыстории цен  $x_1, \dots, x_{t-1}$ ) должна быть гарантированно, при любом сценарии  $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$  движения цен на шаге  $t$ , не меньше, чем  $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$ . Тем самым, для покрытия будущих обязательств стоимость  $V_{t-1}$  портфеля при выборе стратегии  $H_t = h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$  должна быть не менее величины  $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$  при наиболее неблагоприятном сценарии

<sup>12</sup> Вектор  $h$  описывает размеры занимаемых в активах позиций, т.е.  $i$ -ая компонента этого вектора представляет собой количество покупаемых или продаваемых единиц  $i$ -го актива.

<sup>13</sup> Знак  $\bigvee$  обозначает максимум,  $hy = \langle h, y \rangle$  – скалярное произведение вектора  $h$  на вектор  $y$ .

<sup>14</sup> Окрестности точек  $-\infty$  и  $+\infty$  имеют вид  $[-\infty, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  и  $(b, +\infty]$ ,  $b \in \mathbb{R}$  соответственно.

$y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$  движения цен на шаге  $t$ , т.е. при  $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ , максимизирующем выражение  $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ . Полученное значение минимизируется посредством выбора стратегии  $h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ , чтобы оценить требуемые резервы на покрытие будущих потенциальных выплат. Осталось положить  $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1})$  равным максимуму из величины текущих обязательств и величины резервов на покрытие будущих потенциальных выплат.

Траекторию на временном интервале  $[0, t] = \{0, \dots, t\}$  цен активов  $(x_0, \dots, x_t) = \bar{x}_t$  мы назовем возможной, если  $x_0 \in K_0$ ,  $\Delta x_1 \in K_1(x_0)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$ ;  $t = 0, 1, \dots, N$ . Обозначим  $B_t$  – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале  $[0, t]$ ; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \dots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}. \quad (1)$$

Одним из условий справедливости уравнений (ВА) является сформулированное в Теореме 3.1 из [1] предположение об ограниченности функций выплат  $g_t$ , благодаря которому функции  $v_t^*$  являются ограниченными сверху. Предположение заключается в следующем.

$$\begin{aligned} &\text{Найдутся константы } C_t \geq 0 \text{ такие, что для каждого } t = 1, \dots, N \\ &\text{и всех возможных траекторий } \bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in B_t \text{ выполнено} \quad (B) \\ &g_t(x_0, \dots, x_t) \leq C_t. \end{aligned}$$

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [1], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [1].

В настоящей статье рассматривается задача ценообразования при суперхеджировании бинарного опциона (европейского типа) для мультипликативной одномерной модели рынка, в предположении отсутствия торговых ограничений. Получен ряд свойств решений (ВА), в частности, непрерывность кроме одной точки. Кроме того, предложен алгоритм получения “полуявного” решения (ВА), представимого в виде кусочно-рациональной функции.

Интерес к данной задаче вызван тем, что функция выплат является разрывной, и потому результаты, касающиеся случая непрерывных функций выплат, приведенные в работах [5] и [11], здесь неприменимы.

## 1. Вспомогательные результаты

Везде ниже речь идет исключительно о дисконтированных ценах. При этом цена безрискового актива (после дисконтирования, см. [1]) тождественно равна единице.

В соответствии с терминологией, предложенной в [1], для рискованных активов динамика цен (торговые ограничения) относится к марковскому типу, если  $K_t(\cdot)$  (соответственно  $D_t(\cdot)$ ) зависят только от значения цен в предыдущий момент времени, т.е.  $K_t(\cdot)$  (соответственно  $D_t(\cdot)$ ) представимы в виде

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1}), \quad (2)$$

соответственно

$$D_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1}) \quad (3)$$

для  $t = 1, \dots, N$ .

Сформулируем несколько простых, но полезных утверждений.

**Предложение 1.** *Если динамика цен и торговые ограничения относятся к марковскому типу, а функции выплат зависят только от текущей цены, т.е. для  $t = 1, \dots, N$  представимы в виде*

$$g_t(x_0, \dots, x_t) = g_t^*(x_t), \quad (4)$$

то решения уравнений Беллмана – Айзекса также зависят только от текущей цены, т.е. для  $t = 1, \dots, N$  представимы в виде

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t^*(x_t). \quad (5)$$

*Доказательство.* Непосредственно вытекает из вида уравнений Беллмана – Айзекса.  $\square$

**Предложение 2.** *Пусть выполнены предположения (1) и (3), торговые ограничения отсутствуют<sup>15</sup>, т.е.  $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ , и выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO.<sup>16</sup>*

*Тогда для европейского опциона решения уравнений Беллмана – Айзекса монотонно убывают по времени, т.е.*

$$v_0^*(x) \geq v_1^*(x) \geq \dots \geq v_N^*(x). \quad (6)$$

*Доказательство.* В случае, когда торговые ограничения отсутствуют и выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO, можно считать, что речь идет о частном случае американского опциона с функциями выплат<sup>17</sup>

$$g_t(x) \equiv 0, \quad t = 0, \dots, N - 1, \quad g_N = g. \quad (7)$$

Используя Предложение 1 и теорему, доказанную в [3], получаем, что для  $t = 1, \dots, N$  имеет место представление (5) и справедливо равенство

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(x+y) Q(dy), Q \in \mathcal{M}_t(x) \right\}, \quad (8)$$

где  $\mathcal{M}_t(x)$  — множество вероятностных мер на  $K_t^*(x)$  с конечным носителем (при этом достаточно ограничиться мерами с количеством точек носителя, не превосходящим  $n + 1$ ), удовлетворяющих условию<sup>18</sup> “мартингальности”:  $\int y Q(dy) = 0$ . В частности,  $\delta_0 \in \mathcal{M}_t(x)$ , где  $\delta_0$  — вероятностная мера, сосредоточенная в точке 0, поэтому

$$v_{t-1}^*(x) \geq v_t^*(x).$$

$\square$

<sup>15</sup>В этом случае условие (3), очевидно, выполняется

<sup>16</sup>В этом случае условие NDAO эквивалентно  $0 \in \text{conv}(K_t(\cdot))$ ,  $t = 1, \dots, N$ , см. [2].

<sup>17</sup>В принципе, для этого достаточно выполнение более слабого условия — отсутствия гарантированного арбитража NDSA, см. [2].

<sup>18</sup>Точнее, приращения цен образуют мартингал-разности.

**Предложение 3.** Пусть для одномерной модели<sup>19</sup> выполнены предположения Предложения 1 и функции выплат  $g_t^*$ ,  $t = 1, \dots, N$  являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими). Тогда решения уравнений Беллмана–Айзекса  $v_t^*$ ,  $t = 1, \dots, N$  также являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими).

*Доказательство.* Непосредственно вытекает из вида уравнений Беллмана–Айзекса.  $\square$

Далее будем рассматривать одномерную модель рынка, когда в мультипликативном представлении динамика дисконтированной цены рискового актива описывается соотношениями<sup>20</sup>

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где<sup>21</sup> мультипликатор

$$M_t \in [\alpha, \beta], \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (10)$$

торговые ограничения отсутствуют и выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO, что в данном случае равносильно неравенствам

$$\alpha < 1 < \beta. \quad (11)$$

Модель такого вида была впервые предложена В.М. Колокольцовым [4].

**Предложение 4.** Пусть модель динамики цен описывается соотношениями (9), (10), (11); фиксируем  $t \in \{1, \dots, N\}$ . Тогда для европейского опциона имеют место следующие утверждения.

1. Если функция  $v_t^*$  удовлетворяет условию Липшица на некотором интервале  $[a, b]$ , то функция  $v_{t-1}^*$  также удовлетворяет условию Липшица на (более узком) интервале  $[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$ , причем на этом интервале константа Липшица для  $v_{t-1}^*$  не превосходит константы Липшица для  $v_t^*$  на интервале  $[a, b]$ .
2. Если имеет место оценка сверху  $v_t^*(x) \leq cx + d$  при  $x \in [a, b]$ , то  $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$  при  $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$ ;
3. Если функции выплат  $g_s^*$ ,  $s = 1, \dots, N$  полунепрерывны сверху, то строгое неравенство  $v_t^*(x) < cx + d$  при  $x \in [a, b]$  влечет строгое неравенство  $v_{t-1}^*(x) < cx + d$  при  $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$ .
4. Если  $x_1 > 0$ ,  $x_1 < x_2$  и  $\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{\beta}{\alpha}$ , то для  $x \in [\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}]$  имеет место неравенство  $v_{t-1}^*(x) \geq cx + d$ , где

$$c = \frac{v_t^*(x_2) - v_t^*(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad d = v_t^*(x_1). \quad (12)$$

<sup>19</sup>Г.е. для модели с одним рисковым активом (и одним безрисковым).

<sup>20</sup>В соответствии с терминологией, предложенной в [1], в данном случае динамика цен относится к мультипликативно-независимому типу.

<sup>21</sup>Здесь цены рассматриваются как неопределенные величины (детерминистский аналог случайных величин).

*Доказательство.* 1. Воспользуемся мультипликативным аналогом формулы (8) для европейского опциона:

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(mx) Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\}, \quad (13)$$

где  $\mathcal{N}$  — множество вероятностных мер на  $[\alpha, \beta]$  с конечным носителем (при этом достаточно ограничиться мерами с количеством точек носителя, не превосходящим  $n + 1$ ), удовлетворяющих “мультипликативному условию мартингалности”:  $\int m Q(dm) = 1$ .

Обозначим константу Липшица для  $v_t^*$  на интервале  $[a, b]$  через  $L$ . Поскольку для  $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$  имеет место включение  $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$ , то для точек  $x_1$  и  $x_2$ , таких что  $\frac{a}{\alpha} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{b}{\beta}$  имеем неравенства:

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(x_2) - v_{t-1}^*(x_1)| &\leq \sup \left\{ \int |v_t^*(mx_2) - v_t^*(mx_1)| Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\} \\ &\leq L|x_2 - x_1| \int m Q(dm) = L|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

2. Учитывая включение  $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$  при  $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$ , имеем для любого  $Q \in \mathcal{N}$

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) \leq cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

откуда в соответствии с (13) получаем  $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$ .

3. Поскольку при сделанных предположениях точная верхняя грань в (13) достигается (см. [6]) для некоторой меры  $Q_{t,x} \in \mathcal{N}$ , то

$$\int v_t^*(mx) Q_{t,x}(dm) < cx \int m Q_{t,x}(dm) + d = cx + d.$$

4. Для  $x \in [\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}]$ , полагая  $m_1 = \frac{x_1}{x}$  и  $m_2 = \frac{x_2}{x}$ , имеем  $\alpha \leq m_1 < m_2 \leq \beta$ . Выбирая (зависящую от  $t, x, x_1$  и  $x_2$ ) меру  $Q \in \mathcal{N}$ , сосредоточенную в точках<sup>22</sup>  $m_1$  и  $m_2$ , учитывая, что благодаря выбору (12) констант  $c$  и  $d$  функции  $m \mapsto v_t^*(mx)$  и  $m \mapsto cmx + d$  совпадают в точках носителя меры  $Q \in \mathcal{N}$ , получаем

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) = cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

откуда, с использованием (13), получаем требуемое неравенство.  $\square$

## 2. Бинарный опцион европейского типа

### 2.1 Общй случай носителя распределения неопределенного мультипликатора

В рамках модели динамики цен, описываемой соотношениями (9), (10) и (11), нас будет интересовать задача суперхеджирования в рамках гарантированного

<sup>22</sup>Вероятности этих точек однозначно определяются из условий нормировки и “мартингалности”.

детерминистского подхода для бинарного опциона европейского типа. Не ограничивая общности, можно считать, что цена исполнения равна единице; для определенности<sup>23</sup> рассмотрим бинарный опцион “call”, функция выплат которого  $g$  в терминальный момент равна

$$g(x) = \mathbb{I}_{[1,+\infty)}(x), \quad (14)$$

где  $\mathbb{I}_A$  — индикатор множества  $A$ .

Отметим, что в нашей модели применимо Предложение 2, так что решения уравнений Беллмана–Айзека монотонно убывают по времени.

В силу выполнения условия отсутствия арбитражных возможностей NDAO, как отмечалось выше, задача суперхеджирования европейского опциона сводится к задаче суперхеджирования американского опциона, с функциями выплат, описываемыми соотношениями (7), т.е. с нулевыми функциями выплат, кроме терминальной (14). Тем самым, применимо Предложение 1 и для решения соответствующих уравнений Беллмана–Айзека имеет место представление вида (5). Везде далее будем рассматривать нашу задачу как суперхеджирование американского опциона с нулевыми функциями выплат кроме терминальной.

Поскольку терминальная функция выплат является монотонно неубывающей, то применимо Предложение 3. Таким образом, решения соответствующих уравнений Беллмана–Айзека также являются монотонно неубывающими, или, что равносильно в силу обозначения (18), монотонно неубывающими являются функции  $v_s^*$ ,  $s = 0, \dots, N$ . Поэтому эти функции могут иметь разрывы только первого рода (скачки).

Поскольку функция выплат  $g$  полунепрерывна сверху, а многозначные отображения  $K_t(\cdot)$  и  $D_t(\cdot)$  непрерывны, то решения уравнений Беллмана–Айзека  $v_s^*$ ,  $s = 0, \dots, N$  также полунепрерывны сверху см. [5]. Для монотонно неубывающих функций полунепрерывность сверху равносильна их непрерывности справа.

В силу полунепрерывности сверху решения уравнений Беллмана–Айзека  $v_s^*$ ,  $s = 0, \dots, N$  имеется игровое равновесие (на каждом шаге), см. [6]. При этом, в соответствии с результатами [6] для седловой точки наиболее неблагоприятные смешанные стратегии достигаются в классе распределений, сосредоточенных не более чем в двух точках. Для нахождения решения уравнений Беллмана (после отделения задачи ценообразования от задачи хеджирования), достаточно (см. [7]) строить на каждом шаге  $t = 1, \dots, N$  на отрезке  $[\alpha x, \beta x]$  (полунепрерывные сверху) вогнутые оболочки<sup>24</sup>  $\tilde{v}_t^*$  функций Беллмана  $v_t^*$ , полагая  $v_{t-1}^*(x) = \tilde{v}_t^*(x)$ .

## 2.2 Предположение Кокса–Росса–Рубинштейна о концах носителя неопределенного мультипликатора

Общий случай параметров  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно сложен для анализа в силу хаотического поведения (в том числе, взаимного расположения) произведений вида  $\alpha^i \beta^j$ , где  $i$  и  $j$  — целые неотрицательные числа, если только  $\ln \alpha$  и  $\ln \beta$  не являются рационально соизмеримыми. Мы выберем простейший случай рациональной соизмеримости  $\ln \alpha$  и  $\ln \beta$ , предложенной в модели Кокса–Росса–Рубинштейна [8], а

<sup>23</sup>Случай бинарного опциона “put” может быть исследован аналогичными методами.

<sup>24</sup>Называемые также вогнутыми огибающими.

именно, положим

$$\beta = \alpha^{-1}; \quad (15)$$

в этом случае условие отсутствия арбитражных возможностей (11) автоматически выполняется для  $\alpha < 1$ . Отметим, что предположение (15) сильно упрощает анализ, поскольку если на шаге  $s = 1, \dots, N$  точка  $x$  — значение цены в предыдущий момент времени — лежит в интервале вида  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 0, \dots, s + 1$ , то границы интервала  $[\alpha x, \alpha^{-1}x)$  возможных значений неопределенной величины  $X_s$ , при условии что  $X_{s-1} = x$ , т.е. точки  $\alpha x$  и  $\alpha^{-1}x$ , лежат в смежных интервалах, соответственно  $[\alpha^{k+1}, \alpha^k)$  и  $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ . Будем говорить, что точки  $\alpha^k$ ,  $k = 0, \dots, s$  образуют *остов* на шаге  $s = 1, \dots, N$ .

Наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка на шаге  $t$  при заданной цене  $x$  на предыдущем шаге, могут быть неединственными. Так, например, при  $x \in [1, \infty)$  таковым будет любое распределение с носителем, содержащемся в  $[1, \infty)$  и барицентром  $x$ , а при  $x \in (0, \alpha^{t-1})$  — любое распределение с носителем, содержащемся в  $(0, \alpha^{t-1})$  и барицентром  $x$ . В точках  $x$ , где имеется неединственность наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка, для фиксации единственной “оптимальной” смешанной стратегии рынка договоримся выбирать распределение с барицентром  $x$ , имеющее минимальное количество точек носителя. Таких точек будет всегда не более двух и потому, с учетом “мартингалности”, соответствующее распределение определено единственным образом.

Принимая эту конвенцию, в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка на шаге  $s = 1, \dots, N$ , когда достигается максимум в (13), будет выбрано условное распределение  $Q_x^s$  цены  $X_s$ , при условии что  $X_{s-1} = x$ , сосредоточенное не более чем в двух точках. Носитель распределения  $Q_x^s$  будем называть *сценарием*. В случае, когда сценарий представляет собой одноточечное множество,  $Q_x^s = \delta_x$ , где  $\delta_a$  обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке  $a$ . В случае, когда сценарий представляет собой множество из двух точек,  $Q_x^s$  имеет вид

$$Q_x^s = p_s(x) \delta_{a_s(x)} + q_s(x) \delta_{b_s(x)}, \quad (16)$$

при этом договоримся, что  $a_s(x) < b_s(x)$ . При заданном сценарии вероятности  $p_s(x)$  и  $q_s(x)$  однозначно определяются из условия нормировки

$$p_s(x) + q_s(x) = 1$$

и условия мартингалности цен:

$$a_s(x) p_s(x) + b_s(x) q_s(x) = x,$$

откуда

$$p_s(x) = \frac{b_s(x) - x}{b_s(x) - a_s(x)}; \quad q_s(x) = \frac{x - a_s(x)}{b_s(x) - a_s(x)}, \quad (17)$$

Для удобства везде далее будем использовать обозначения

$$u_s(x) = v_{N-s}^*(x), \quad s = 0, \dots, N, \quad (18)$$

в частности  $u_0 = g$ , где  $g$  задается формулой (14). Рекуррентные соотношения для  $u_s$ ,  $s = 1, \dots, N$  имеют вид

$$u_s(x) = p_s(x) u_{s-1}(a_s(x)) + q_s(x) u_{s-1}(b_s(x)). \quad (19)$$

Везде ниже, с использованием обозначений (18), будем исследовать свойства решения  $u_s$ ,  $s = 1, \dots, N$  задачи суперхеджирования европейского бинарного опциона “call”, с функцией выплат в терминальный момент, задаваемой формулой (14), для рынка, описываемого при помощи соотношений (9), (10), (11) и (15).

### 2.3 Решения уравнений Беллмана для первых двух шагов

Для  $x < \alpha$  функция  $u_1$  тождественно равна нулю, поскольку интервал  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  содержится в  $(0, 1)$ , где функция  $u_0 = g$  равна нулю. Для  $x \geq 1$  функция  $u_1$  тождественно равна единице, поскольку (полу)непрерывная сверху) вогнутая оболочка  $\tilde{u}_0$  функции  $u_0$  на  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  в точке  $x$  равна единице.

Заметим, что на первом шаге для  $x \in [\alpha, 1)$  в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка можно выбрать условное распределение  $Q_x^1$ , сосредоточенное в двух точках  $\alpha x$  и  $1$ , имеющих вероятности  $p_1(x)$  и  $q_1(x)$  соответственно; формула (41) в данном случае приобретает вид

$$p_1(x) = \frac{1-x}{1-\alpha x}; \quad q_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x},$$

а по формуле (42) значения функции  $u_1$  на отрезке  $[\alpha, 1)$  задаются выражением

$$u_1(x) = p_1(x)g(\alpha x) + q_1(x)g(1) = q_1(x).$$

Тем самым, на интервале  $[\alpha, 1)$  реализуется сценарий вида  $\{\alpha x, 1\}$ , функция  $u_1$  имеет вид гиперболы

$$u_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x}, \quad (20)$$

является строго монотонно возрастающей и (строго) выпуклой. В точке  $\alpha$  функция  $u_1$  имеет единственный разрыв (скачок), непрерывна справа и

$$u_1(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}. \quad (21)$$

На правом конце интервала  $[\alpha, 1)$  по формуле (20) получаем

$$u_1(1-0) = 1, \quad (22)$$

так что функция  $u_1$  в точке  $1$  непрерывна.

Заметим, что прямая, проходящая через точки гиперболы (20) на плоскости, отвечающие аргументам  $\alpha$  и  $1$ , т.е. через точки с координатами  $(\alpha, u_1(\alpha))$  и  $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$ , задаваемая функцией

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= u_1(\alpha) + \frac{u_1(\alpha^{-1}x) - u_1(\alpha)}{\alpha^{-1}x - \alpha} (z - \alpha) \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{z - \alpha}{(1+\alpha)(1-x)} \\ &= \frac{z - \alpha x}{(1+\alpha)(1+x)}, \end{aligned} \quad (23)$$

имеет корень  $\alpha x$ , т.е.

$$\omega_1(\alpha x) = 0. \tag{24}$$

В частности, при  $x = \alpha$  получаем, что прямая, проходящая через концы гиперболы (20), отвечающим аргументам  $\alpha$  и 1, имеет корень  $\alpha^2$ . Для полноты геометрической картины отметим также, что касательная в точке  $\alpha$  к сужению функции  $u_1$  на интервал  $[\alpha, 1)$ , задаваемая функцией

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= u_1(\alpha) + (z - \alpha) u_1'(\alpha + 0) \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{z - \alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^2}, \end{aligned}$$

имеет корень  $\alpha^3$ .

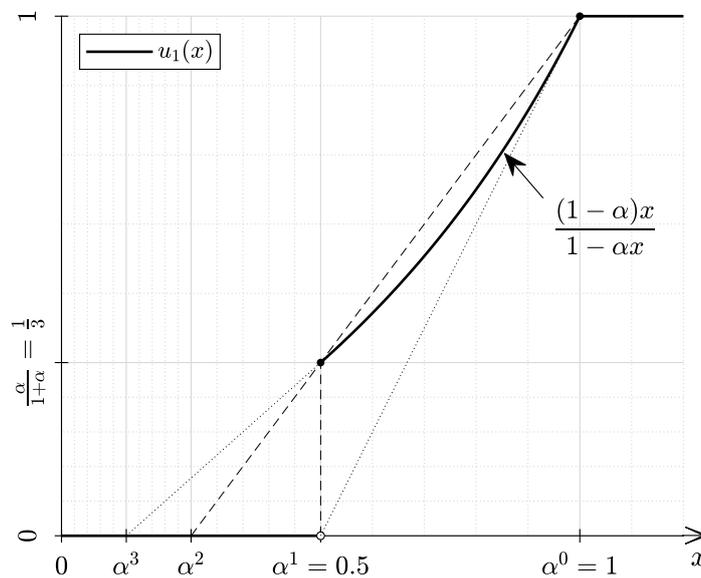


Рис. 1:  $u_1(x)$  при  $\alpha = 0.5$

Из (23) и (24) следует, что для  $x \in [\alpha^2, \alpha)$  отрезок прямой, задаваемой функцией (23), соединяющий точки с координатами  $(\alpha x, 0)$  и  $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$ , представляет собой на отрезке  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  (полу)непрерывную сверху вогнутую оболочку  $\tilde{u}_1$  функции  $u_1$ , а значит

$$u_2(x) = \tilde{u}_1(x) = \frac{x - \alpha x}{(1 + \alpha)(1 - x)} \tag{25}$$

для  $x \in [\alpha^2, \alpha)$ . Отметим, что что на правом конце гиперболы (25) выполняется равенство

$$u_2(\alpha - 0) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \tag{26}$$

Заметим теперь, что на втором шаге для  $x \in [\alpha, 1)$  в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка можно выбрать условное распределение  $Q_x^2$ , сосредоточенное в двух точках<sup>25</sup>  $\alpha$  и 1, имеющих вероятности  $p_{2,1}(x)$  и  $q_{2,1}(x)$  соответственно; формула (33) в данном случае приобретает вид

$$p_2(x) = \frac{1-x}{1-\alpha}; \quad q_2(x) = \frac{x-\alpha}{1-\alpha},$$

а по формуле (34) значения функции  $u_2$  на отрезке  $[\alpha, 1)$ , с учетом (21), задаются аффинной функцией

$$u_2(x) = p_2(x)u_1(\alpha) + q_2(x)u_1(1) = \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha^2}. \quad (27)$$

В частности,

$$u_2(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

так что, с учетом (26), функция  $u_2$  непрерывна в точке  $\alpha$ . Функция  $u_2$  является не только непрерывной на  $[\alpha^2, +\infty)$ , но более того, в точке  $\alpha$  имеет место гладкое сопряжение, т.е. в этой точке существует производная, равная  $(1-\alpha^2)^{-1}$ , так что функция  $u_2$  дифференцируема на  $[\alpha^2, 1)$ .

Легко видеть, что для  $x < \alpha^2$  функция  $u_2$  тождественно равна нулю, а для  $x \geq 1$  функция  $u_2$  тождественно равна единице. Поскольку из (27) следует  $u_2(1-0) = 1$ , то функция  $u_2$  непрерывна в точке 1, а значит функция  $u_2$  непрерывна на  $[\alpha^2, +\infty)$ .

#### 2.4 Решения уравнений Беллмана: рекуррентные свойства

Фиксируем теперь  $s \in \{1, \dots, N\}$ .

**Предложение 5.** *Вне интервала  $[\alpha^s, 1)$  функция  $u_s$  принимает следующие значения:*

$$\begin{aligned} u_s(x) &= 0 \text{ при } x < \alpha^s, \\ u_s(x) &= 1 \text{ при } x \geq 1. \end{aligned} \quad (28)$$

*Доказательство.* Соотношения (28) получаются по индукции, учитывая отмеченное в предыдущем разделе свойство, и то, что концы интервала  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  для  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 0, \dots, s+1$  лежат в смежных интервалах, т.е.  $\alpha x \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k)$  и  $\alpha^{-1}x \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ . Для  $s = 1$  это свойство установлено в предыдущем разделе. Если (28) справедливы для  $s = t$ , то для  $s = t+1$  при  $x < \alpha^{t+1}$  функция  $u_t$  тождественно равна нулю, поскольку интервал  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  содержится в  $(0, \alpha^t)$ , где функция  $u_t$  равна нулю. Для  $x \geq 1$  функция  $u_{t+1}$  тождественно равна единице, поскольку (полу)непрерывная сверху) вогнутая оболочка  $\tilde{u}_t$  функции  $u_t$  на  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  в точке  $x$  равна единице.  $\square$

<sup>25</sup>Отметим, что при  $x = \alpha$  наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка не будет единственной — это любое распределение с барицентром  $x = \alpha$ , сосредоточенное в не более чем в трех точках:  $\alpha^2$ ,  $\alpha$  и 1, т.е. распределение, представимое в виде смеси  $p\delta_\alpha + (1-p)(\frac{1}{1+\alpha}\delta_{\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\delta_1)$ ,  $p \in [0, 1]$ .

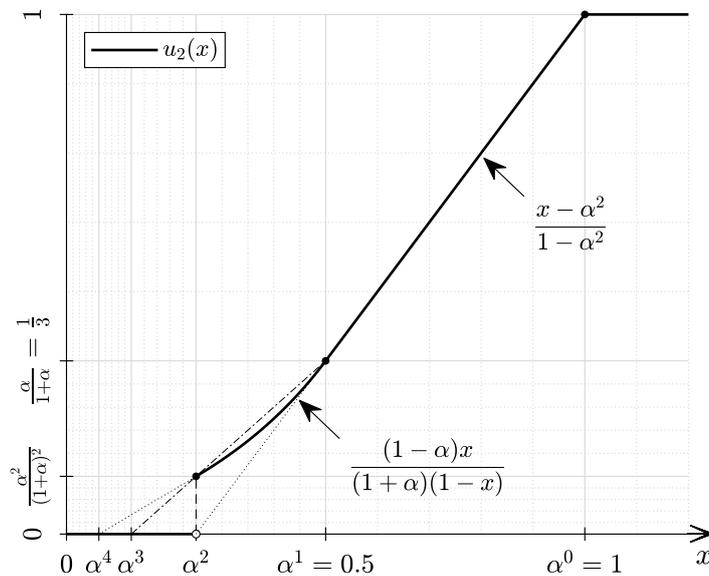


Рис. 2:  $u_2(x)$  при  $\alpha = 0.5$

**Предложение 6.** Функция  $u_s$ ,  $s = 1, \dots, N$  имеет разрыв (скачок) в точке  $\alpha^s$ , в которой  $u_s$  непрерывна справа, а на интервале  $[\alpha^s, \alpha^{s-1})$  функция  $u_s$  удовлетворяет свойству автомодельности:<sup>26</sup>

$$u_s(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{s-1} \cdot u_1(\alpha^{-(s-1)}x). \tag{29}$$

*Доказательство.* При  $s = 1$  формула (16) является тождеством. Сделаем индуктивное предположение, что (29) имеет место для  $s = t \geq 1$  и проверим, что оно выполняется для  $s = t + 1$ . Подставляя в (29)  $s = t$  и выражение (20) для  $u_1$ , имеем для  $x \in [\alpha^t, \alpha^{t-1})$

$$u_t(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{t-1} \cdot u_1(\alpha^{t-1}x) = \frac{\alpha^{t-1}(\alpha^{t-1} - \alpha^t)x}{(1+\alpha)^{t-1}(1 - \alpha^t x)}. \tag{30}$$

Из геометрических соображений подобия ясно, что для  $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t)$  вогнутой оболочкой  $\tilde{u}_t$  функции  $u_t$  на интервале  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$  является отрезок прямой, соединяющий точки с координатами  $(\alpha x, 0)$  и  $(\alpha^{-1}x, u_t(\alpha^{-1}x))$ , задаваемой функцией

$$\omega_t(z) = \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{-1}x - \alpha x} (z - \alpha x), \tag{31}$$

<sup>26</sup>Благодаря свойствам функции  $u_1$ , на интервале  $[\alpha^s, \alpha^{s-1})$  функция  $u_s$  является строго монотонно возрастающей и строго выпуклой.

где  $u_t(\alpha x) = 0$ , а значит, для  $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t]$

$$u_{t+1}(x) = \tilde{u}_t(x) = \omega_t(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot u_t(\alpha^{-1}x), \quad (32)$$

откуда следует формула (29) для  $s = t + 1$ . С использованием Предложения 5 имеем  $u_s(\alpha^s - 0) = 0$ , а полагая  $x = \alpha^s$  в (32), получаем

$$u_s(\alpha^s) = \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^s > 0.$$

Тем самым,  $u_{s+1}$  имеет скачок в точке  $\alpha^{s+1}$  (в которой  $u_{s+1}$  непрерывна справа).  $\square$

**Теорема 1.** 1. Для  $s = 1, \dots, N$  функция  $u_s$  является выпуклой на каждом из интервалов  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$ .

2. Для  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$ , достаточно рассматривать только четыре сценария, т.е. варианта расположения точек  $a_s(x)$  и  $b_s(x)$ , введенных в разделе 2.2:

- I. Сценарий  $a_s(x) = \alpha^k$  и  $b_s(x) = \alpha^{k-1}$ .
- II. Сценарий  $a_s(x) = \alpha^k$  и  $b_s(x) = \alpha^{-1}x$ .
- III. Сценарий  $a_s(x) = \alpha x$  и  $b_s(x) = \alpha^{k-1}$ .
- IV. Сценарий  $a_s(x) = \alpha x$  и  $b_s(x) = \alpha^{-1}x$ .

При этом число возможных переключений сценариев на интервалах  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$  не превосходит двух.

3. Для  $s = 1, \dots, N$  функция  $u_s$  является кусочно рациональной на интервале  $(0, +\infty)$ , точнее, рациональной на не более чем  $t_s \leq 3s + 1$  смежных интервалах, которые мы будем называть интервалами рациональности<sup>27</sup>, с границами  $d_{s,i}$ ,  $i = 0, \dots, t_s + 1$ ; все точки вида  $\alpha^t$ ,  $t = 0, \dots, s$  являются границами интервалов рациональности для функции  $u_s$ . При этом разбиение на интервалы рациональности для функции  $u_{s+1}$  является измельчением разбиения на интервалы рациональности для функции  $u_s$ . Для заданных на интервалах рациональности рациональных функций, представленных в виде несократимой дроби полиномов, степень полиномов не выше  $s$ , причем эта степень на интервалах  $(0, \alpha^s)$  и  $[1, +\infty)$  равна нулю, где реализуется сценарий I равна единице, а где реализуется сценарий IV — не превосходит  $s - 1$ .

4. Для  $s = 1, \dots, N$  производная функции  $u_s$  положительна там, где определена<sup>28</sup>. В частности, функция  $u_s$  является строго монотонной на интервале  $[\alpha^s, 1)$ .

<sup>27</sup>В частности, для  $s = 1, \dots, N$  функция  $u_s$  является бесконечно дифференцируемой внутри интервалов рациональности.

<sup>28</sup>В точках, являющимися границами интервалов рациональности, может происходить скачок производной функции  $u_s$ , но не обязательно, как это видно на примере функции  $u_2$ .

*Доказательство.* Для удобства выпишем для сценариев I, II, III и IV конкретный вид формул, задаваемых в общем случае посредством (16), (17) и (19). Отметим, что для тех точек  $x$ , для которых выполняется один из сценариев I, II, III и IV, точки носителя  $a_s(x)$  и  $b_s(x)$  распределения, задаваемого (16), а следовательно и вероятности  $p_s(x)$  и  $q_s(x)$  не зависят от  $s$ , поэтому для этих сценариев у точек носителя и вероятностей индекс  $s$  будет опускаться.

Для сценария I, когда  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ ,  $k = 1, \dots, s$ , а  $a(x) = \alpha^k$  и  $b(x) = \alpha^{k-1}$ , вероятности  $p(x)$  и  $q(x)$  принимают вид аффинных функций

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (33)$$

а значения функции  $u_s$  выражаются через значения функции  $u_{s-1}$  посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha^k) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (34)$$

тем самым, в случае реализации сценария I на интервале  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$  функция  $u_s$  на этом интервале является аффинной; в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k), \quad (35)$$

а в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \quad (36)$$

Для сценария II, когда  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ ,  $k = 1, \dots, s$ , а  $a(x) = \alpha^k$  и  $b(x) = \alpha^{-1}x$ , вероятности  $p(x)$  и  $q(x)$  принимают вид

$$p(x) = \frac{\alpha^{-1}x - x}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}, \quad (37)$$

а значения функции  $u_s$  выражаются через значения функции  $u_{s-1}$  посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha^k) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{-1}x); \quad (38)$$

в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k), \quad (39)$$

а в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (40)$$

Для сценария III, когда  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ ,  $k = 1, \dots, s$ , а  $a(x) = \alpha x$  и  $b(x) = \alpha^{k-1}$ , вероятности  $p(x)$  и  $q(x)$  принимают вид

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}, \quad (41)$$

а значения функции  $u_s$  выражаются через значения функции  $u_{s-1}$  посредством формулы

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha x) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (42)$$

в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}), \quad (43)$$

а в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \quad (44)$$

Для сценария IV, когда  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$ , а  $a_k(x) = \alpha x$  и  $b_k(x) = \alpha^{-1}x$ , вероятности  $p(x)$  и  $q(x)$  принимают вид

$$p(x) = \frac{1}{1+\alpha}; \quad q(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad (45)$$

а значения функции  $u_s$  выражаются через значения функции  $u_{s-1}$  посредством формулы

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha x) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{-1}x); \quad (46)$$

в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}), \quad (47)$$

а в случае выполнения данного сценария при  $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения “сопряжения”:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1+\alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (48)$$

Покажем по индукции, что для  $s \geq 2$  и функция  $u_s$  удовлетворяет четырем свойствам из формулировки теоремы. Для  $s = 2$  эти свойства выполнены<sup>29</sup>. Пусть это свойство выполнено для  $s = t \geq 2$ , проверим его выполнение для  $s = t + 1$ . Для  $x$  из интервала  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , когда  $k = s + 1$ , это вытекает из формулы (29). Если  $k \leq s$ , а точка  $x$  лежит в интервале вида  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , то как уже отмечалось выше, границы интервала  $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ , т.е. точки  $\alpha x$  и  $\alpha^{-1}x$  лежат в смежных интервалах, соответственно  $[\alpha^{k+1}, \alpha^k)$  и  $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ . В точках  $\alpha^k$ ,  $k = 1, \dots, s$  при этом, в принципе, возможен положительный скачок<sup>30</sup> и имеет место непрерывность справа. При наличии скачка в точке  $\alpha^{k-1}$ , функция сохраняет выпуклость на замкнутом интервале  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ , если она является выпуклой на интервале  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ . В силу выпуклости функции  $u_t$  на интервале  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ , для  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$  можно не рассматривать точки открытого интервала  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  в качестве “кандидатов”

<sup>29</sup>Отметим, что для функции  $u_2$  на интервале  $[\alpha^2, \alpha)$  имеет место сценарий II, а на интервале  $(\alpha, 1)$  имеет место сценарий I.

<sup>30</sup>Ниже будет доказано, что в этих точках имеет место непрерывность.

точек носителя наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка  $Q_x^s$ , достаточно из отрезка  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$  оставить для такого рассмотрения крайние точки  $\alpha^k$  и  $\alpha^{k-1}$ .

Далее, фиксируем числа  $a \leq \alpha^k$ ,  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$  и рассмотрим распределение  $Q$ , сосредоточенное в точках  $a$  и  $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$  с вероятностями соответственно  $p$  и  $q$ , удовлетворяющее условию  $pa + qy = x$ ; с учетом нормировки

$$p = \frac{y - x}{y - a}, \quad q = \frac{x - a}{y - a}. \quad (49)$$

Покажем, что интеграл  $\int u_t dQ$ , рассматриваемый как функция  $y$ , т.е. функция  $y \mapsto pu_t(a) + qu_t(y) = V(y)$  является монотонно неубывающей на  $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ , где  $p$  и  $q$  задаются (49) и рассматриваются как функции переменной  $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ .

Нам потребуется следующий результат из математического анализа: если функции  $f$  и  $g$  абсолютно непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , а  $f'$  и  $g'$  (определенные почти всюду относительно меры Лебега) производные, то функции  $f'g$  и  $fg'$  суммируемы<sup>31</sup> и

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \int_a^x f'(z)g(z) dz + \int_a^x f(z)g'(z) dz \quad (50)$$

для  $x \in [a, b]$ , см. например, Теорема 5 из § 7 главы IX в книге [9]. Добавим к этому, что выпуклая функция абсолютно непрерывна, а для ее производной можно выбрать эквивалентную ей<sup>32</sup> всюду монотонно неубывающую, см., например, [10] Теорема 24.2, а также Следствие 24.2.1 и Теорема 24.1.

$$\begin{aligned} V(y) - V(\alpha^{k-1}) &= \int_{\alpha^{k-1}}^y V'(z) dz \\ &= \int_{\alpha^{k-1}}^y [p'u_t(a) + q'u_t(z) + qu'_t(z)] dz \\ &= \int_{\alpha^{k-1}}^y \{q'[u_t(z) - u_t(a)] + qu'_t(z)\} dz. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$q' = -\frac{x - a}{(y - a)^2} = -\frac{1}{y - a}q,$$

получаем, что для  $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$

$$V(y) - V(\alpha^{k-1}) = \int_{\alpha^{k-1}}^y q \left[ u'_t(z) - \frac{u_t(z) - u(a)}{z - a} \right] dz. \quad (51)$$

В силу выпуклости (по индуктивному предположению) функции  $u_t$  выражение в квадратных скобках под интегралом в (51) почти всюду неотрицательно, откуда получаем, что функция  $V$  является монотонно неубывающей. Таким образом, из “кандидатов” для точек носителя распределения  $Q_x^{s,k}$  из интервала  $[\alpha^{k-1}, \alpha^{-1}x]$  можно оставить лишь точку  $\alpha^{-1}x$ .

<sup>31</sup>При этом произведение  $fg$  абсолютно непрерывно на отрезке  $[a, b]$ , в чем, кстати, можно убедиться непосредственно по определению, учитывая ограниченность функций  $f$  и  $g$ .

<sup>32</sup>Речь идет о функции, совпадающей с исходной почти всюду (относительно меры Лебега).

Аналогично рассматриваются “кандидаты” для точек носителя распределения  $Q_x^{s,k}$  слева, т.е. из интервала  $[\alpha x, \alpha^k]$ . Фиксируем теперь числа  $b \geq \alpha^{k-1}$ ,  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$  и рассмотрим распределение  $Q$ , сосредоточенное в точках  $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k]$  и  $b$ , с вероятностями соответственно  $p$  и  $q$ , удовлетворяющее условию  $pz + qb = x$ ; с учетом нормировки

$$p = \frac{b-x}{b-z}, \quad q = \frac{x-z}{b-z}. \quad (52)$$

Покажем, что интеграл  $\int u_t dQ$ , рассматриваемый как функция  $z$ , т.е. функция  $z \mapsto pu_t(z) + qu_t(b) = W(z)$ , является монотонно невозрастающей на  $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ , где  $p$  и  $q$  задаются (52) и рассматриваются как функции переменной  $z$ . Используя равенство

$$p' = \frac{b-x}{(b-z)^2} = \frac{p}{b-z},$$

нетрудно убедиться, что для  $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k]$

$$W(z) - W(\alpha^{k+1}) = \int_{\alpha^{k+1}}^z p \left[ u_t'(y) - \frac{u_t(b) - u_t(y)}{b-y} \right] dy. \quad (53)$$

В силу выпуклости функции  $u_t$  выражение в квадратных скобках под интегралом в (53) почти всюду неположительно, откуда получаем, что функция  $W$  является монотонно невозрастающей. Таким образом, из “кандидатов” для точек носителя распределения  $Q_x^{s,k}$  из интервала  $[\alpha x, \alpha^k]$  можно оставить лишь точку  $\alpha x$ .

Тем самым, для рассмотрения вариантов расположения точек носителя распределения  $Q_x^{s,k}$  достаточно рассматривать лишь сценарии I, II, III и IV.

Рассмотрим теперь различные варианты, приводящие к возникновению того или иного сценария в зависимости от взаимного расположения четырех точек плоскости, которые будем называть *ключевыми*, а именно  $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ ,  $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$  и прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е. множества  $\{(\xi, \varphi_{t,k}(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$ , где

$$\varphi_{t,k}(\xi) = u_t(\alpha^k) + \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} (\xi - \alpha^k). \quad (54)$$

1) Если точки плоскости  $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$  и  $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$  лежат не выше прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е. с использованием обозначений (54)

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то реализуется сценарий I, для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ .

2) Если точка плоскости  $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$  лежит не выше, а точка  $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$  — выше прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то, обозначая

$$y_k = \inf \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}) : \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}x) < u_t(\alpha^{-1}x)\}, \quad (55)$$

получаем, что для  $x \in [\alpha^k, y_k]$  реализуется сценарий I, а для  $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II.

3) Если точка плоскости  $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$  лежит выше, а точка  $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$  — не выше прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то, обозначая

$$z_k = \sup \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}) : \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}x) < u_t(\alpha^{-1}x)\}, \quad (56)$$

получаем, что для  $x \in [\alpha^k, z_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий I.

4) Если точки плоскости  $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$  и  $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$  обе лежат выше прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

тогда могут возникнуть три возможных случая.

4а) Если  $y_k < z_k$ , где  $y_k$  и  $z_k$  задаются (55) и (56) соответственно, для  $x \in (y_k, z_k)$  реализуется сценарий IV, для  $x \in [\alpha^k, y_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II.

4б) Если  $y_k = z_k$ , то для  $x \in [\alpha^k, y_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II.

4в) Если же  $y_k > z_k$ , то для  $x \in [\alpha^k, z_k)$  реализуется сценарий III, для  $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II, а для  $x \in [z_k, y_k]$  реализуется сценарий I.

Будем называть точки  $y_k$  и  $z_k$ , задаваемые (55) и (56) соответственно, точками переключения сценариев (на шаге  $t$ ). Отметим, что точки переключения сценариев, а также некоторые из точек  $\alpha^k$ ,  $k \in \{0, \dots, t\}$ , могут быть отнесены одновременно к двум сценариям. Приведенный выше анализ вариантов расположения четырех ключевых точек плоскости позволяет заключить, что интервал  $[0, +\infty)$  можно разбить на непересекающиеся смежные интервалы, на которых реализуется один из четырех сценариев; эти интервалы будем называть сценарными на шаге  $t$ ; такой интервал может подразбиваться на несколько интервалов рациональности.

Границы интервалов рациональности на шаге  $t$  — это точки  $\alpha^k$ ,  $k \in \{0, \dots, t\}$  и, возможно, точки переключения сценариев на всех шагах до  $t$  включительно, если таковые имеются. Добавляя точку  $\alpha^{t+1}$  и, возможно, точки переключения сценариев на шаге  $t$  (если таковые имеются, то в количестве не более  $2t$ ) к множеству  $\{d_{t,i}, i = 0, \dots, m_t + 1\}$ , получаем множество  $\{d_{t+1,i}, i = 0, \dots, m_{t+1} + 1\}$  границ интервалов рациональности для функции  $u_{t+1}$ . То, что функция  $u_{t+1}$  является кусочно-рациональной на каждом из сценарных интервалов — рациональна на интервалах рациональности, образующих подразбиение данного сценарного

интервала, легко проверить по индукции, учитывая что для  $u_0$  это утверждение справедливо, используя рекуррентные соотношения (34), (38), (42) и (46) для четырех сценариев и соответствующие выражения вероятностей, задаваемых формулами (33), (37), (41) и (45). В частности, функция  $u_{t+1}$  является бесконечно дифференцируемой на внутренности интервалов рациональности.

Поскольку выражения для вероятностей представляют собой рациональные функции, представимые в виде несократимой дроби полиномов степени единица, то на интервалах рациональности соответствующие рациональные функции, представленные в виде несократимой дроби полиномов, имеют степень не выше  $s$ .<sup>33</sup>

В случае реализации сценария I формулы (33) и (34) влекут на  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$  аффинность функции  $u_{t+1}$ , а значит, и выпуклость, а по индуктивному предположению о строгой монотонности  $u_t$ , строгую монотонность<sup>34</sup>  $u_{t+1}$ .

На интервале рациональности, содержащемся в  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ , на котором реализуется сценарий IV, формулы (45) и (46) непосредственно влекут строгую монотонность и выпуклость  $u_{t+1}$ , в силу строгой монотонности и выпуклости  $u_t$  (по индуктивному предположению).

Внутри интервала рациональности, содержащегося в  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ , где реализуется сценарий II и функция  $u_t$  бесконечно дифференцируема; используя (38), имеем

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'(x) u_t(\alpha^k) + q'(x) u_t(\alpha^{-1}x) + q(x) \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}x) \\ &= q'(x) [u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + q(x) \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}x) > 0, \end{aligned} \quad (57)$$

используя положительность производной функция  $u_t$  (по индуктивному предположению) и то, что

$$q'_k(x) = \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^2} > 0.$$

Далее,

$$q''_k(x) = -\frac{2\alpha^{-1}(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^3} = -\frac{2\alpha^{-1}q'_k(x)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k},$$

$$\begin{aligned} u''_{t+1}(x) &= q''_k(x) [u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + 2\alpha^{-1}q'_k(x) u'_t(\alpha^{-1}x) + q_k(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \\ &= 2\alpha^{-1}q'_k(x) \left[ u'_t(\alpha^{-1}x) - \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k} \right] + q_k(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку, в силу предположения о выпуклости функции  $u_t$ , ее вторая производная и выражение в квадратных скобках неотрицательны.

Внутри интервала рациональности, содержащегося в  $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ , где реализуется сценарий III и функция  $u_t$  бесконечно дифференцируема, используя (42) имеем

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'_k(x) u_t(\alpha x) + p_k(x) \alpha u'_t(\alpha x) + q'_k(x) u_t(\alpha^{k-1}) \\ &= -p'(x) [u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + p(x) \alpha u'_t(\alpha x) > 0, \end{aligned}$$

<sup>33</sup>Нетрудно заметить, что эта степень на интервалах  $(0, \alpha^s)$  и  $[1, +\infty)$  равна нулю, где реализуется сценарий I равна единице, а где реализуется сценарий IV — не превосходит  $s - 1$ .

<sup>34</sup>Напомним, что в соответствии с Предложением 3 решения уравнений Беллмана являются неубывающими (для неубывающей функции выплат).

используя положительность производной функция  $u_t$  (по индуктивному предположению) и то, что

$$p'(x) = -\frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^2} < 0.$$

Далее,

$$p''(x) = -\frac{2\alpha(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^3} = \frac{2\alpha p'_k(x)}{\alpha^{k-1} - \alpha x},$$

$$\begin{aligned} u''_{t+1}(x) &= -p''(x) [u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + 2\alpha p'(x) u'_t(\alpha x) + p(x) \alpha^2 u''_t(\alpha x) \\ &= 2\alpha p'(x) \left[ u'_t(\alpha x) - \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{k-1}x - \alpha x} \right] + q(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0, \end{aligned}$$

так как, в силу выпуклости функция  $u_t$ , ее вторая производная неотрицательна, а выражение в квадратных скобках неположительно.

Необходимо еще исследовать поведение функции  $u_{t+1}$  в точках переключения сценариев  $y_k$  и  $z_k$  для вариантов 2) 3) и 4), приводящих к возникновению того или иного сценария и, возможно, к их переключению.

Если имеет место вариант 2) расположения ключевых точек, а производная справа<sup>35</sup> функции  $u_t$  в точке  $\alpha^{k-1}$  не меньше наклона прямой, соединяющей точки  $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$  и  $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ , т.е.

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) \geq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (58)$$

то сценарий II реализуется для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ .

Если же

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) < \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k},$$

то в точке  $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , задаваемой (55), имеет место трансверсальное пересечение графика выпуклой функции  $u_t$  и прямой — графика функции  $\varphi_{t,k}$ , так что  $u_t(\alpha^{-1}y_k) = \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k)$  и

$$u'_t(\alpha^{-1}y_k + 0) > \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k},$$

поэтому

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(y_k + 0) &= q'_t(y_k) [u_t(\alpha^{-1}y_k) - u_t(\alpha^k)] + q_t(y_k) \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}y_k + 0) > \\ &> \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}y_k - \alpha^k)^2} [\varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) - \varphi_{t,k}(\alpha^k)] + \frac{y_k - \alpha^k}{\alpha^{-1}y_k - \alpha^k} \alpha^{-1} \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \\ &= \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} = u'_{t+1}(y_k - 0); \end{aligned}$$

Тем самым, в точке  $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$  выпуклость функции  $u_{t+1}$  не нарушается, однако функция  $u_{t+1}$  недифференцируема в этой точке — имеется скачок производной.

<sup>35</sup>На левом конце интервала, где имеет место непрерывность справа функции  $u_t$ , производная справа совпадает с пределом справа производной, в силу непрерывности производных (благодаря индуктивному предположению).

Аналогично может быть исследован вариант 3) расположения ключевых точек; в этом случае, если

$$u'_t(\alpha^k - 0) \leq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (59)$$

то сценарий III реализуется для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , а если (59) не выполняется, то имеет место трансверсальное пересечение графика выпуклой функции  $u_t$  и прямой — графика функции  $\varphi_{t,k}$  в точке  $z_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , задаваемой (56), причем в точке  $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$  выпуклость функции  $u_{t+1}$  не нарушается, однако функция  $u_{t+1}$  недифференцируема в этой точке (имеется скачок производной).

Для варианта 4) расположения четырех ключевых точек проверяется оба условия (58) и (59). Когда оба эти неравенства выполняются, то сценарий IV реализуется для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , а в противном случае возникают одна или две точки переключения сценариев, поведение функции  $u_{t+1}$  в которых аналогично рассмотренным выше случаям; при этом необходимо учитывать их взаимное расположение (случаи 4а), 4б) и 4в)).  $\square$

**Теорема 2.** *Функция  $u_s$  является непрерывной<sup>36</sup> на интервале  $[\alpha^s, +\infty)$ , для  $s = 0, \dots, N$ .*

*Доказательство.* Проверим это свойство по индукции. Для  $s \in \{0, 1, 2\}$  это свойство выполнено. Пусть это выполнено для  $s = t \geq 2$ , покажем, что это выполнено для  $s = t + 1$ . На открытых интервалах  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 0, \dots, t + 1$  функция  $u_{t+1}$  непрерывна в силу выпуклости. Поэтому достаточно проверить ее непрерывность в точках  $\alpha^k$ ,  $k = 0, \dots, t$ . Фиксируем  $k \in \{0, \dots, t - 1\}$  и рассмотрим интервал вида  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ , который будем называть левым (по отношению к точке  $\alpha^{k-1}$ ), соответствующие четыре ключевых точки для этого интервала (с абсциссами  $\alpha^{k+1}, \alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}$  и ординатами — значениями функции  $u_t$  в этих точках), и смежный интервал  $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ , который будем называть правым, соответствующие четыре ключевых точки (с абсциссами  $\alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}, \alpha^{k-3}$  и ординатами — значениями функции  $u_t$  в этих точках).

Если для левого интервала имеет место вариант 1) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 1) или 2); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария I, (36), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценариев I и II, (35) и (39), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда, используя индуктивное предположение о непрерывности  $u_t$ , получаем непрерывность  $u_{t+1}$  в точке  $\alpha^{k-1}$ .

Если для левого интервала имеет место вариант 2) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 3) или 4); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для

<sup>36</sup> Тем самым, с учетом Предложений 5 и 6, функция  $u_s$  является непрерывной на интервале  $(0, +\infty)$ , за исключением единственной точки  $\alpha^s$ , в которой она испытывает скачок и является непрерывной справа.

сценария II, (40), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — для сценария III, (43), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность  $u_{t+1}$  в точке  $\alpha^{k-1}$ .

Если для левого интервала имеет место вариант 3) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 1) или 2); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария I, (36), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценариев I и II, (35) и (39), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность  $u_{t+1}$  в точке  $\alpha^{k-1}$ .

Если для левого интервала имеет место вариант 4) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 3) или 4); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария II, (40), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценария III, (43), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность  $u_{t+1}$  в точке  $\alpha^{k-1}$ .

Таким образом, установлена непрерывность  $u_{t+1}$  в точках<sup>37</sup>  $\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}, \dots, 1$ .

Рассмотрим теперь интервал  $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$  и заметим, что благодаря свойствам функции  $u_1$  и автомодельности, установленной в Предложении 5, точки

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \text{ и } (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

лежат на одной прямой. Поэтому, в зависимости от положения точки  $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$ , для интервала  $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$  возможными вариантами будут 1) или 2); на левом конце интервала  $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$  условия сопряжения задаются соотношениями для сценариев I и II, (35) и (39), т.е.

$$u_{t+1}(\alpha^t) = u_t(\alpha^t).$$

---

<sup>37</sup> Отметим, что для интервала  $[\alpha, 1)$  возможными вариантами расположения ключевых точек могут быть только 1) или 2).

Из (29) и (21) имеем

$$u_t(\alpha^t) = \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^t,$$

а из (29) и (22) имеем

$$u_{t+1}(\alpha^t - 0) = \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^t,$$

откуда следует непрерывность  $u_{t+1}$  в точке  $\alpha^t$ .  $\square$

Утверждение Теоремы 2 может быть усилено — функция  $u_s$  является даже липшицевой на интервале  $[\alpha^s, +\infty)$ , для  $s = 0, \dots, N$  (см. Теорему 3 ниже). Однако, по нашему мнению, доказательство Теоремы 2 представляет самостоятельный интерес, поскольку хорошо проясняет существо проблемы.

Для функции  $f$  на  $[a, b]$  обозначим

$$L(f, [a, b]) = \sup \left\{ \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} : x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \right\}. \quad (60)$$

Если  $L(f, [a, b])$  в (60) конечно, то это константа Липшица функции  $f$  на  $[a, b]$ .

**Теорема 3.** *Функция  $u_s$  удовлетворяет условию Липшица на интервале  $[\alpha^s, +\infty)$ , для  $s = 1, \dots, N$ , причем константы Липшица  $L(u_s, [\alpha^s, +\infty))$  по  $s$  являются невозрастающими, а  $L(u_1, [\alpha, +\infty)) = (1 - \alpha)^{-1}$ .*

*Доказательство.* Заметим сначала, что если для  $r \geq 2$  заданы точки  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{r-1} < c_r = b$ , то, с использованием обозначений (60), имеет место равенство:

$$L(f, [a, b]) = \bigvee_{j=1}^r L(f, [c_{j-1}, c_j]). \quad (61)$$

Проверим справедливость пункта 2 теоремы по индукции. Для  $s = 1$  это утверждение выполняется, причем в этом случае константа Липшица

$$L(u_1, [\alpha, +\infty)) = u'_1(1 - 0) = (1 - \alpha)^{-1}.$$

Предположим, что для  $s = t$  константа Липшица  $L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty$ . Применяя Предложение 4 с параметрами  $a = \alpha^t$ ,  $b = \alpha^{-1}$ ,  $\beta = \alpha^{-1}$ , получаем, с учетом (61), что

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, +\infty)) = L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, 1]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{-1}]) = L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty.$$

В силу автомодельности (29), установленной в Предложении 6, а также доказанной выше непрерывности, для  $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t]$  имеет место соотношение

$$u_{t+1}(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_t(\alpha^{-1}x),$$

откуда

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t+1}, \alpha^t]) \leq \frac{1}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (62)$$

Как было замечено выше при доказательстве непрерывности, точки

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \text{ и } (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

лежат на одной прямой, так что, в зависимости от положения точки  $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$ , для интервала  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  возможными вариантами расположения ключевых точек будут 1) или 2).

В случае варианта 1) на интервале  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  реализуется сценарий I, так что, с учетом непрерывности, функция  $u_{t+1}$  будет аффинной на  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  и

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) = \frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t},$$

а в силу выпуклости функции  $u_t$  на интервале  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  и ее непрерывности

$$\frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t} \leq u'_t(\alpha^{t-1} - 0) = L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]), \quad (63)$$

так что

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (64)$$

В случае варианта 2) на интервале  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  реализуется сценарий I, так что на нем производная функции  $u_{t+1}$  задается (57) для  $k = t$ ; замечая, что

$$q'_t(x) = \frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{(x - \alpha^t)(\alpha^{-1}x - \alpha^t)} q_t(x),$$

получаем

$$u'_{t+1}(x) = q_t(x) \left[ \frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{x - \alpha^t} \cdot \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{-1}x - \alpha^t} + \alpha^{-1}u'_t(\alpha^{-1}x) \right].$$

С учетом (63) и выпуклости функции  $u_{t+1}$  на интервале  $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$  и ее непрерывности

$$\begin{aligned} L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) &= u'_{t+1}(\alpha^{t-1} - 0) \\ &\leq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left[ L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \alpha^{-1}u'_t(\alpha^{t-2} - 0) \right] \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \frac{1}{1 + \alpha} L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) \\ &\leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \vee L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) \\ &= L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-2}]). \end{aligned} \quad (65)$$

Таким образом, из (62), (64) и (65) вытекает требуемое утверждение.  $\square$

### 3. Алгоритм численного решения

Для получения “полуявного” решения уравнения Беллмана, резюмируя полученные выше результаты, можно предложить следующий рекуррентный алгоритм.

Пусть на шаге  $s \geq 1$  получено разбиение отрезка  $[\alpha^s, 1)$  на интервалы рациональности  $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m_s$ , причем в число границ этих интервалов  $d_{s+1,i}$ ,  $i = 0, \dots, m_{s+1} + 1$  входят точки  $\alpha^k$ ,  $k = 0, \dots, s$ . Предположим, что на

интервалах  $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m_s$  найдены явные (аналитические) выражения функции  $u_s$  в виде рациональных функций и их производные.<sup>38</sup>

Для нахождения функции  $u_{s+1}$  производятся следующие действия.

1. Вычисляются значения функции  $u_s$  в точках  $\alpha^k$ ,  $k = 0, \dots, s$ , определяются варианты расположения ключевых точек для интервалов вида  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$  и возможные сценарии для данного варианта.
2. Определяется наличие точек переключения сценариев для интервалов вида  $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, s$ , а в случае их наличия точки переключения сценариев находятся численно.<sup>39</sup>

Для варианта 1) расположения ключевых точек реализуется сценарий I, для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ .

Для варианта 2) расположения ключевых точек вычисляется производная  $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$  и

- если неравенство (58) выполняется, то реализуется сценарий I, для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ;
- если неравенство (58) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев  $y_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения

$$\varphi_{s,k}(\alpha x) = u_s(\alpha x), \quad (66)$$

где функция  $\varphi_{t,k}$  задается посредством (54); при этом для  $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II, а для  $x \in (\alpha^k, y_k]$  реализуется сценарий I.

Для варианта 3) расположения ключевых точек вычисляется производная  $u'_s(\alpha^k - 0)$  и

- если неравенство (59) выполняется, то реализуется сценарий III, для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ;
- если неравенство (59) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев  $z_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения

$$\varphi_{s,k}(\alpha^{-1}x) = u_s(\alpha^{-1}x); \quad (67)$$

при этом для  $x \in [\alpha^k, z_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий I.

Для варианта 4) расположения ключевых точек вычисляются обе производные  $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$  и  $u'_s(\alpha^k - 0)$ , проверяются два неравенства (58) и (59), причем

- если оба неравенства (58) и (59) выполняются, то реализуется сценарий IV, для любого  $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ ;

<sup>38</sup> Это, в частности, может быть найдено с использованием символьных вычислений.

<sup>39</sup> Что, на самом деле, равносильно отысканию корня многочлена степени не выше  $s + 1$ .

- если неравенство (58) выполняется, а неравенство (59) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев  $z_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения (67); при этом для  $x \in [\alpha^k, z_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий IV;
- если неравенство (59) выполняется, а неравенство (58) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев  $y_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения (66); при этом для  $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II, а для  $x \in (\alpha^k, y_k]$  реализуется сценарий I;
- если оба неравенства (58) и (59) не выполняются, то численно находятся две точки: точка переключения сценариев  $z_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения (67) и точка переключения сценариев  $y_k$  как единственный на интервале  $(\alpha^k, \alpha^{k-1})$  корень уравнения (66); в зависимости от взаимного расположения  $y_k$  и  $z_k$  могут возникнуть три возможных случая.
  - 4а) Если  $y_k < z_k$ , где  $y_k$  и  $z_k$  задаются (55) и (56) соответственно, для  $x \in (y_k, z_k)$  реализуется сценарий IV, для  $x \in [\alpha^k, y_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II.
  - 4б) Если  $y_k = z_k$ , то для  $x \in [\alpha^k, y_k)$  реализуется сценарий III, а для  $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II.
  - 4в) Если же  $y_k > z_k$ , то для  $x \in [\alpha^k, z_k)$  реализуется сценарий III, для  $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$  реализуется сценарий II, а для  $x \in [z_k, y_k]$  реализуется сценарий I.

Тем самым, на шаге  $t$  получаем разбиение для  $[0, +\infty)$  на смежные интервалы, на которых реализуется один из четырех сценариев, причем границы этих интервалов — точки  $\alpha^k$ ,  $k \in \{0, \dots, s\}$  и, возможно, точки переключения сценариев на шаге  $t$  (если таковые имеются).

3. Строится измельчение разбиения на интервалы рациональности: с целью получения множества  $\{d_{s+1,i}, i = 0, \dots, m_{s+1} + 1\}$  границ интервалов рациональности для функции  $u_{s+1}$  к множеству  $\{d_{s,i}, i = 0, \dots, m_s + 1\}$  добавляется точка  $\alpha^{s+1}$  и, возможно, точки переключения сценариев на шаге  $s$  (если таковые имеются, то в количестве не более  $2t$ ). Договоримся, что конечная последовательность  $d_{s,i}, i = 0, \dots, m_s + 1$  является возрастающей (по  $i$ ). На каждом интервале полученного разбиения  $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m_{s+1}$  реализуется один сценарий на шаге  $s$  и заданы явные выражения для функции  $u_s$ , а для четырех возможных сценариев имеются явные рекуррентные формулы (34), (38), (42) и (46), выражающие функцию  $u_{s+1}$  через функции  $u_s$  и сохраняющие рациональность. Используя явное выражение для функцию  $u_{s+1}$  в виде рациональной функции, вычисляется производная  $u'_{s+1}$  на каждом интервале разбиения  $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m_{s+1}$ .

## Заключение

В настоящей статье рассматривалась задача ценообразования бинарного опциона “call” европейского типа в рамках гарантированного детерминистского подхода

да к суперхеджированию для мультипликативной модели динамики цен, с одним рисковым активом, при отсутствии торговых ограничений. Основные результаты получены для случая предположения о концах интервалов, задающих возможные значения неопределенной величины — мультипликатора цен, которые аналогичны предположениям из классической работы Кокса, Росса и Рубинштейна. Получен ряд свойств решений уравнений Беллмана–Айзекса (или же, уравнений Беллмана, возникающих после использования игрового равновесия на каждом временном шаге). Показано, в частности, что решения являются числовыми функциями, являющимися монотонно неубывающими, непрерывными справа и кусочно-выпуклыми, непрерывными за исключением одной точки (в которой имеется скачок 1); на интервале от этой точки до цены исполнения решения строго монотонно возрастают, причем константы Липшица функций-решений с увеличением срока до исполнения не возрастают.

Кроме того, решения являются кусочно-рациональными, что позволило предложить алгоритм построения “полуявного” решения, — рекуррентного построения решений в виде формул на некоторых интервалах, что, в частности, можно выполнить при помощи символьных вычислений. Результаты численного анализа будут представлены в последующей публикации.

### Список литературы

- [1] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, № 4. С. 59–99.
- [2] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства безарбитражности рынка // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, № 2. С. 68–95.
- [3] Smirnov S.N. Guaranteed deterministic approach to superhedging: equilibrium in the case of no trading constraints // Journal of Mathematical Sciences. 2020. (to appear)
- [4] Kolokoltsov V.N. Nonexpansive maps and option pricing theory // Kybernetika. 1998. Vol. 34, № 6. Pp. 713–724.
- [5] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, № 4. С. 87–115.
- [6] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая теория игр и ее приложения. 2020. Т. 11, № 2. (в печати)
- [7] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая теория игр и ее приложения. 2020. Т. 12, № 3. (в печати)

- [8] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach // Journal of Financial Economics. 1979. Vol. 7, № 3. Pp. 229–263.
- [9] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
- [10] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [11] Smirnov S.N. A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations // Frontiers of Dynamics Games: Game Theory and Management, St. Petersburg, 2017. Birkhauser Basel, 2018. Pp. 267–288.
- [12] Follmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. 4th edition. New York: Walter de Gruyter, 2016. 608 p.

#### Образец цитирования

Смирнов С.Н., Заночкин А.Ю. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства бинарного европейского опциона // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 29–59. <https://doi.org/10.26456/vtprmk554>

#### Сведения об авторах

**1. Смирнов Сергей Николаевич**

доцент кафедры системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

*Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: [s.n.smirnov@gmail.com](mailto:s.n.smirnov@gmail.com)*

**2. Заночкин Андрей Юрьевич**

аспирант кафедры системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

*Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: [andyzanochkin@gmail.com](mailto:andyzanochkin@gmail.com)*

# GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: PROPERTIES OF BINARY EUROPEAN OPTION

**Smirnov Sergey Nikolaevich**

Associate Professor at System Analysis department,  
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,  
Lomonosov Moscow State University  
*Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskie gory, Lomonosov MSU.*  
*E-mail: [s.n.smirnov@gmail.com](mailto:s.n.smirnov@gmail.com)*

**Zanochkin Andrey Yurievich**

PhD student at System Analysis department,  
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,  
Lomonosov Moscow State University  
*Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskie gory, Lomonosov MSU.*  
*E-mail: [andyzanochkin@gmail.com](mailto:andyzanochkin@gmail.com)*

---

*Received 14.01.2020, revised 20.02.2020.*

---

For a discrete-time superreplication problem, a guaranteed deterministic formulation is considered: the problem is to ensure a complete coverage of the contingent claim on an option under all scenarios which are set using a priori defined compacts, depending on the price history: price increments at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The market is considered with trading constraints and without transaction costs. The statement of the problem is game-theoretic in nature and leads directly to the Bellman–Isaacs equations. In the present paper, we study the solution of these equations for the pricing in the case of binary European option in the framework of a multiplicative market model with no trading constraints. Certain properties of the solution are established and an algorithm of numerical solution of Bellman equation is proposed. From mathematical prospect, the interest is due to the discontinuity of the payout function.

**Keywords:** guaranteed estimates, deterministic price dynamics, superreplication, no arbitrage opportunities, Bellman-Isaacs equations, binary option.

## Citation

Smirnov S.N., Zanochkin A.Yu., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: properties of binary European option”, *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 29–59 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtppmk554>

## References

- [1] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: market model, trading constraints and Bellman-Isaacs equations”, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya [Mathematical Games Theory and its Applications]*, **10:4** (2018), 59–99 (in Russian).
- [2] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: “no arbitrage” properties of the market”, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya [Mathematical Games Theory and its Applications]*, **11:2** (2019), 68–95 (in Russian).
- [3] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: equilibrium in the case of no trading constraints”, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020 (to appear).
- [4] Kolokoltsov V.N., “Nonexpansive maps and option pricing theory”, *Kybernetika*, **34:6** (1998), 713–724.
- [5] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: properties of semicontinuity and continuity of solutions of Bellman-Isaacs equations”, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya*, **11:4** (2019), 87–115 (in Russian).
- [6] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: mixed strategies and game equilibrium”, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya [Mathematical Games Theory and its Applications]*, **11:2** (2020) (to appear) (in Russian).
- [7] Smirnov S.N., “Guaranteed deterministic approach to superhedging: most unfavorable market scenarios and the problem of moments”, *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya [Mathematical Games Theory and its Applications]*, **12:3** (2020) (to appear) (in Russian).
- [8] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M., “Option pricing: A simplified approach”, *Journal of Financial Economics*, **7:3** (1979), 229–263.
- [9] Natanson I.P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Dover Publications, New York, 2016, 544 pp.
- [10] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970, 451 pp.
- [11] Smirnov S.N., “A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations”, *Frontiers of Dynamics Games: Game Theory and Management, St. Petersburg, 2017*, Birkhauser Basel, 2018, 267–288.
- [12] Follmer H., Schied A., *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, 4th edition, Walter de Gruyter, New York, 2016, 608 pp.