УДК 517.95, 532.5

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 22.01.2020, после переработки 05.03.2020.

Доказано совпадение ограниченных в пространстве в произвольный момент времени однородно-винтовых бесконечно дифференцируемых решений задачи Коши для квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса. Показано, что любое гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, подчиняющееся обобщенному условию Громеки–Бельтрами, а также некоторым условиям ограниченности в пространстве, удовлетворяет квазигидродинамической системе. Приведены примеры решений. Дана постановка нерешенной задачи, в которой требуется доказать существование и единственность гладкого решения задачи Коши для квазигидродинамической системы.

Ключевые слова: система Навье-Стокса, квазигидродинамическая система, задача Коши, однородно-винтовые решения, обобщенное условие Громеки-Бельтрами.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96.
https://doi.org/10.26456/vtpmk557

Введение

Классическая система Навье–Стокса является основной математической моделью в динамике ньютоновской жидкости [1]. В 1993 году автором была предложена [2] альтернативная система уравнений для описания движений слабосжимаемой вязкой жидкости, получившая название квазигидродинамической (КГД). Теоретическое обоснование подхода дано в [3]. Выявлению глубоких связей уравнений Навье–Стокса и КГД посвящена монография [4]. В работах автора [5–9] продолжено аналитическое исследование свойств КГД системы. В частности, приведены примеры ее однородно-винтовых решений [6], а также решений, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами [7].

В настоящей работе доказано совпадение ограниченных в пространстве в произвольный момент времени однородно-винтовых бесконечно дифференцируемых

решений задач Коши для квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса. Показано, что любое гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, подчиняющееся обобщенному условию Громеки–Бельтрами, а также некоторым условиям ограниченности в пространстве, удовлетворяет квазигидродинамической системе. Приведены примеры решений. Дана постановка нерешенной задачи, в которой требуется доказать существование и единственность гладкого решения задачи Коши для квазигидродинамической системы.

1. Задача Коши для квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в виде

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla \big(\operatorname{div} \vec{u}\big) + \operatorname{div} \, (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле $\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big)$. Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Символом Δ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь членами, содержащими τ, то получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.4}$$

Пусть $\Omega = \big\{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}},\ t \geqslant 0\big\}$ – множество в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Добавим к системам (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Для системы Навье–Стокса векторное поле $\vec{u}_0$ соленоидально, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{u}_0 = 0. \tag{1.6}$$

В случае квазигидродинамической системы ограничение (1.6) не накладывается. Давление $p = p(\vec{x}, t)$ в (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) определено с точностью до произвольной функции времени. Чтобы исключить эту неоднозначность, можно положить

$$p(\vec{0}, t) = p_0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Здесь p_0 – заданное положительное число.

Определение 1. *Гладким решением задачи Коши* (1.1) – (1.2), (1.5) *для квазигидродинамической системы назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^\infty(\Omega)$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in \Omega$ *уравнениям* (1.1) – (1.2), *а также начальному условию* (1.5).

Определение 2. *Гладким решением задачи Коши* (1.3) – (1.4), (1.5) *для системы Навье–Стокса назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^\infty(\Omega)$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in \Omega$ *уравнениям* (1.3) – (1.4), *а также начальному условию* (1.5).

Будем рассматривать гладкие решения задачи Коши, ограниченные в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ в произвольный фиксированный момент времени, т.е. для любого $t \in [0, +\infty)$ существуют положительные числа $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$, такие, что каждого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ выполняются неравенства

$$|\vec{u}(\vec{x}, t)| \leqslant C_1, \qquad |p(\vec{x}, t)| \leqslant C_2. \tag{1.8}$$

2. Совпадение однородно-винтовых решений задачи Коши для обеих систем

Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение задачи Коши для одной из рассматриваемых систем при заданном начальном условии (1.5). Определим вихрь поля скорости $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ по формуле

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты правой прямоугольной декартовой системы координат $oxyz$.

Определение 3. *Решение* $(\vec{u}, p)$ *назовем однородно-винтовым, если существует такая вещественная постоянная* $\lambda \neq 0$, *что выполнено равенство*

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{u}. \tag{2.2}$$

Для дальнейшего исследования свойств однородно-винтовых решений потребуется

Теорема 1. *Ж. Лиувилль Гармоническая в пространстве* $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *ограниченная функция постоянна.*

Доказательство этой теоремы приведено в [10] на с. 257–258. Сформулируем основной результат данного пункта.

Теорема 2. *Для того, чтобы пара функций* $(\vec{u}, p)$, *ограниченных на* $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *в любой момент времени, являлась гладким однородно-винтовым решением задачи Коши для квазигидродинамической системы, необходимо и достаточно, чтобы* $(\vec{u}, p)$ *была таким решением для системы Навье–Стокса.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\vec{u}, p)$ – гладкое однородно-винтовое решение задачи Коши (1.1) – (1.2), (1.5), удовлетворяющее условию (1.8). Подействуем оператором «div» на обе части равенства (2.2). Принимая во внимание (2.1), получим

$$\lambda \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{\omega} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{u}) = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, из (2.3) следует, что векторное поле $\vec{u}$ на множестве Ω является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{2.4}$$

Из (1.1) находим

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0. \tag{2.5}$$

Справедлива цепочка равенств

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big) = \tau\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) + \tau\big[\vec{\omega}\times\vec{u}\big] =$$

$$= \tau\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) + \tau\lambda\big[\vec{u}\times\vec{u}\big] = \tau\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big). \tag{2.6}$$

При проведении выкладок было использовано соотношение (2.2), а также известное (см. [1], с. 32) векторное тождество

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \big[\vec{\omega}\times\vec{u}\big]. \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.6) выводим уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.8}$$

где

$$\varphi = \frac{\vec{u}^2}{2} + p. \tag{2.9}$$

При каждом $t \in [0, +\infty)$ гармоническая в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ функция φ ограничена, так как

$$|\varphi| = \Big|\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big| \leqslant \frac{|\vec{u}|^2}{2} + |p| \leqslant \frac{C_1^2}{2} + C_2 = C. \tag{2.10}$$

При получении оценки (2.10) использованы неравенства (1.8). По теореме Лиувилля функция φ не зависит от $\vec{x}$, т.е.

$$\varphi = \frac{\vec{u}^2}{2} + p = p_0(t). \tag{2.11}$$

Отсюда

$$p = p_0(t) - \frac{\vec{u}^2}{2}, \tag{2.12}$$

где $p_0(t)$ – произвольная функция времени, принадлежащая классу гладкости $C^\infty\big([0,+\infty)\big)$. Из (2.6) и (2.11) находим

$$\vec{w} = 0. \tag{2.13}$$

В силу (2.4), (2.13) все добавочные к уравнениям Навье–Стокса члены в (1.1) – (1.2) обращаются в ноль. Пара функций $(\vec{u}, p)$, где давление p определяется формулой (2.12), удовлетворяет на Ω системе Навье–Стокса (1.3) – (1.4). Равенство (1.6) получается из (2.4), если положить t равным нулю.

Достаточность. Пусть пара функций $(\vec{u}, p)$ задает гладкое однородно-винтовое решение задачи Коши (1.3) – (1.4), (1.5) для системы Навье–Стокса, удовлетворяющее условию (1.8). Принимая во внимание (2.7), представим (1.4) в форме Громеки–Лэмба

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} = -\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) + \big[\vec{u}\times\vec{\omega}\big]. \tag{2.14}$$

В силу (2.2) и свойств векторного произведения последнее слагаемое в правой части (2.14) обращается в ноль. Поэтому

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} = -\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big). \tag{2.15}$$

Подействуем оператором «div» на обе части равенства (2.15). Принимая во внимание (1.3), (2.9) и теорему Шварца, получим уравнение (2.8). Из него вытекают равенства (2.11) – (2.13). Уравнение (2.15) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{u}. \tag{2.16}$$

Пара $(\vec{u}, p)$ образует точное решение задачи Коши (1.1) – (1.2), (1.5) для квазигидродинамической системы. □

3. Построение однородно-винтовых решений задачи Коши

Примеры общих однородно-винтовых решений задач Коши для систем Навье–Стокса и КГД можно построить по схеме, предложенной чешским физиком Виктором Тркалом [11]. Используя известное тождество

$$\Delta\vec{u} = \nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) - \mathrm{rot}\ \vec{\omega}, \tag{3.1}$$

а также формулы (2.1), (2.2) и (2.4), представим (2.16) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nu\lambda^2\vec{u} = 0. \tag{3.2}$$

Из (3.2) находим

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-\nu\lambda^2 t}. \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (2.12) дает

$$p = p_0(t) - \frac{\vec{u}_0^2}{2} e^{-2\nu\lambda^2 t}. \tag{3.4}$$

Формулы (3.3) и (3.4) задают на множестве Ω искомое гладкое решение задачи Коши. Бесконечно дифференцируемое и ограниченное на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ поле скорости $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ в начальный момент времени должно удовлетворять уравнению Громеки–Бельтрами

$$\mathrm{rot}\ \vec{u}_0 = \lambda \vec{u}_0, \quad \lambda = const \neq 0, \tag{3.5}$$

которое может иметь нетривиальные решения. Пусть

$$\vec{u}_0 = U\left(\sin\left(\frac{z}{H}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{z}{H}\right)\vec{j}\right). \tag{3.6}$$

Здесь U и H – константы, имеющие размерности скорости и длины соответственно, $U \neq 0$, $H > 0$. Вычислим

$$\mathrm{rot}\ \vec{u}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U\sin\left(\frac{z}{H}\right) & U\cos\left(\frac{z}{H}\right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{U}{H}\left(\sin\left(\frac{z}{H}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{z}{H}\right)\vec{j}\right) = \lambda\vec{u}_0,$$

где $\lambda = 1/H$. Таким образом, равенство (3.5) выполняется и $\vec{u}_0$ является собственной функцией оператора «rot». Если принять во внимание (1.7), то зависимости (3.3) и (3.4) принимают вид

$$\vec{u} = U\left(\sin\left(\frac{z}{H}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{z}{H}\right)\vec{j}\right)e^{-\dfrac{\nu t}{H^2}}, \tag{3.7}$$

$$p = p_0. \tag{3.8}$$

Помимо (3.7), (3.8), можно построить и другие решения задачи Коши, например, решение Арнольда–Бельтрами–Чайлдресса (ABC) и решение Беркера [6], [12]. Подчеркнем еще раз, что все эти однородно-винтовые решения являются точными не только для системы Навье–Стокса, но и для системы КГД. Однако они не удовлетворяют классической системе Эйлера

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0.$$

4. Решения задачи Коши, удовлетворяющие обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Точные решения нестационарной системы Навье–Стокса, удовлетворяющие обобщенному условию Громеки–Бельтрами, рассматривались в [13]. В [7] приведены примеры таких решений, общих для систем Навье–Стокса и КГД. Центральный результат данного пункта может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $(\vec{u}, p)$ – гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, удовлетворяющее неравенствам* (1.8) *и обобщенному условию Громеки–Бельтрами*

$$rot\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{4.1}$$

Кроме того, для каждого $t \in [0, +\infty)$ существует положительное число $C_3 = C_3(t)$, такое, что для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ выполняется неравенство

$$|\Psi(\vec{x}, t)| \leqslant C_3, \tag{4.2}$$

где

$$\Psi = \Psi(\vec{x}, t) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds \tag{4.3}$$

– криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования, соединяющего точки $\vec{0}$ и $\vec{x}$. Тогда пара $(\vec{u}, p)$ является гладким решением задачи Коши для квазигидродинамической системы.

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, удовлетворяющее неравенствам (1.8) и подчиняющееся обобщенному условию Громеки–Бельтрами (4.1). Тогда на множестве Ω выполняется равенство

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0. \tag{4.4}$$

Запишем вектор $\vec{w}$ следующим образом:

$$\vec{w} = \tau\Big(\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) - [\vec{u} \times \vec{\omega}]\Big). \tag{4.5}$$

Подействуем оператором «div» на обе части равенства (2.14). Принимая во внимание (4.4), а также гладкость решения, получим

$$\mathrm{div}\ \Big(\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) - [\vec{u} \times \vec{\omega}]\Big) = 0. \tag{4.6}$$

С помощью (4.5) и (4.6) находим

$$\mathrm{div}\ \vec{w} = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, равенство (1.1) выполняется.

Из (4.3) следует, что

$$\nabla\Psi = [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \tag{4.8}$$

Подстановка (4.8) в (4.6) дает

$$\Delta\varphi = 0,$$

где

$$\varphi = \frac{\vec{u}^2}{2} + p - \Psi. \tag{4.9}$$

При любом $t \in [0, +\infty)$ гармоническая в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ функция φ ограничена, так как

$$|\varphi| = \Big|\frac{\vec{u}^2}{2} + p - \Psi\Big| \leqslant \frac{|\vec{u}|^2}{2} + |p| + |\Psi| \leqslant \frac{C_1^2}{2} + C_2 + C_3 = C. \tag{4.10}$$

При получении оценки (4.10) были использованы неравенства (1.8) и (4.2). В силу теоремы Лиувилля функция φ не зависит от $\vec{x}$, т.е.

$$\varphi = \frac{\vec{u}^2}{2} + p - \Psi = p_0(t). \tag{4.11}$$

Здесь $p_0(t)$ – произвольная функция времени, принадлежащая классу гладкости $C^\infty\big([0,+\infty)\big)$. Отсюда

$$p = p_0(t) + \Psi - \frac{\vec{u}^2}{2}. \tag{4.12}$$

Следствием (4.5), (4.8) и (4.9) является равенство

$$\vec{w} = \tau\nabla\varphi. \tag{4.13}$$

Подстановка (4.11) в (4.13) дает

$$\vec{w} = 0. \tag{4.14}$$

Равенства (4.4) и (4.14) позволяют сделать вывод о том, что все добавочные к уравнениям Навье–Стокса члены в КГД системе обращаются в ноль. Таким образом, пара функций $(\vec{u}, p)$ будет гладким решением КГД системы. $\square$

5. Построение решений задачи Коши, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Пусть векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ имеет в правой декартовой системе координат компоненты

$$u_x = -\frac{A}{H}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{5.1}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{5.2}$$

$$u_z = 0. \tag{5.3}$$

Здесь A – положительная постоянная, имеющая размерность *см*^{2}/*с*. Символами L и H обозначены положительные константы, имеющие размерность *см*. Определенное таким образом векторное поле $\vec{u}$ подчиняется равенствам

$$\operatorname{div}\,\vec{u} = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} = 0. \tag{5.5}$$

Подстановка (5.1) – (5.3) в (2.1) дает

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L}\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A\Big(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\Big)\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{k}.$$

Вычислим векторное произведение:

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] = \frac{A^2}{L}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{i}+$$
$$+\frac{A^2}{H}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\ \vec{j}. \tag{5.6}$$

Так как правая часть (5.6) отлична от нуля, течение не является однородно-винтовым. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (4.1) выполняется.

По формуле (4.3) находим

$$\Psi = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}}\big([\vec{u}\times\vec{\omega}]\cdot\vec{l}\big)\,ds =$$

$$= A^2\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\Big[\sin\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)d\Big(\frac{x_*}{L}\Big)+$$
$$+\sin\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\cos\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)d\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$
$$= -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\ \Big[\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big] =$$
$$= -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}\cos^2\Big(\frac{x_*}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y_*}{H}\Big)\Big|_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} =$$
$$= \frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\Big)\Big(1-\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Big)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{5.7}$$

Подстановка (5.1) – (5.3), (5.7) в (4.12) дает

$$p = p_0(t)+\frac{A^2}{2}\Big[\frac{1}{H^2}\Big(1-\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\Big)+\frac{1}{L^2}\Big(1-\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Big)\Big]e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}.$$

Распределение давления, подчиняющееся ограничению (1.7), имеет вид

$$p = p_0+\frac{A^2}{2}\Big[\frac{1}{H^2}\Big(1-\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\Big)+\frac{1}{L^2}\Big(1-\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Big)\Big]e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{5.8}$$

Если учесть (4.8), то уравнение движения в системе Навье–Стокса (2.14) может быть записано так:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u} = -\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+p-\Psi\Big). \tag{5.9}$$

Принимая во внимание (4.11) и (5.5), приходим к заключению об истинности равенства (5.9). Таким образом, формулы (5.1) – (5.3) и (5.8) задают гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса. Оно было построено Джеффри Инграмом Тейлором. Оценки (1.8) и (4.2) выполняются. По теореме 3 указанный набор функций образует решение задачи Коши для квазигидродинамической системы.

Заключение

В данной статье приведены примеры гладких точных решений поставленной задачи Коши, общих для систем Навье–Стокса и КГД. Однозначная разрешимость задачи Коши для уравнений Навье–Стокса – одна из мировых проблем математики [14]. Аналогичная трудная задача для квазигидродинамической системы может быть сформулирована следующим образом.

Нерешенная задача (Ю.В. Шеретов). *Доказать существование и единственность гладкого решения задачи Коши* (1.1) – (1.2), (1.5), (1.7) *для квазигидродинамической системы.*

Если утверждение окажется неверным для бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ функции $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$, то можно попытаться предъявить более жесткие требования к начальному распределению скорости. Например, считать функцию $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ бесконечно дифференцируемой и финитной на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$.

Еще одно из возможных ограничений на $\vec{u}_0$ может быть записано следующим образом: для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и произвольного положительного числа β найдется число $C = C(\alpha, \beta) > 0$, такое, что для каждого $\vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ выполняется неравенство $\left|D^\alpha \vec{u}_0\right| \leqslant \frac{C}{(1+|\vec{x}|)^\beta}$. Здесь

$$D^\alpha \vec{u}_0 = \frac{\partial^{|\alpha|} \vec{u}_0}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

α_1, α_2, α_3 – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Кроме того, должна существовать такая положительная константа K, что для любого $t \in [0, +\infty)$ на решении задачи Коши выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_{\vec{x}}} \left|\vec{u}(\vec{x}, t)\right|^2 dV \leqslant K.$$

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[4] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[5] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[6] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[7] Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5–18. https://doi.org/10.26456/vtpmk507

[8] Шеретов Ю.В. Точные решения квазигидродинамической системы на основе формулы Био-Савара // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49. https://doi.org/10.26456/vtpmk525

[9] Шеретов Ю.В. О свойствах решений основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 5–19. https://doi.org/10.26456/vtpmk536

[10] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976. 391 с.

[11] Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. Vol. 44, № 2. Pp. 97–106.

[12] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[13] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[14] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. 2003. Т. 58, № 2. С. 45–78. https://doi.org/10.4213/rm610

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON THE SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEM FOR QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 22.01.2020, revised 05.03.2020.

The coincidence of bounded in space at arbitrary instant of time homogeneously screw infinitely differentiable solutions of the Cauchy problem for quasi–hydrodynamic system and Navier–Stokes system is proved. It is shown that any smooth solution of Cauchy problem for Navier–Stokes system that obeys the generalized Gromeki–Beltrami condition, as well as some boundedness conditions in space, satisfies to quasi-hydrodynamic system. Examples of solutions are given. The formulation of an unsolved problem is given, in which it is required to prove the existence and uniqueness of a smooth solution of Cauchy problem for the quasi–hydrodynamic system.

Keywords: Navier-Stokes system, quasi-hydrodynamic system, Cauchy problem, homogeneously screw solutions, generalized Gormeki-Beltrami condition.

Citation

Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk557

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[3] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[4] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[5] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk169.

[6] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[7] Sheretov Yu.V., "On the exact solutions of quasi–hydrodynamic system that satisfy the generalized Gromeki-Beltrami condition", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 5–18 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk507.

[8] Sheretov Yu.V., "Exact solutions of quasi-hydrodynamic system on the base of Biot-Savart formula", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 38–49 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk525.

[9] Sheretov Yu.V., "On the properties of solutions of main initial-boundary value problem for quasi-hydrodynamic equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 3, 5–19 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk536.

[10] Mikhajlov V.P., *Differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 391 pp.

[11] Trkal V., "A note on the hydrodynamics of viscous fluids", *Czechoslovak Journal of Physics*, **44**:2 (1994), 97–106.

[12] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[13] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[14] Ladyzhenskaya O.A., "Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness", *Russian Mathematical Surveys*, **58**:2 (2003), 251–286, https://doi.org/10.4213/rm610.