

## КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СО СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С.

Тверской государственной университет, г. Тверь

---

*Поступила в редакцию 03.07.2019, после переработки 02.09.2019.*

---

Предложена космологическая модель с двумя вещественными скалярными полями  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , которые играют роль темной материи и темной энергии. При этом интерпретация поля  $\phi_1$  как темной материи определяется равенством нулю соответствующего эффективного давления  $p_1$ . За счет выбора подходящего потенциала  $V(\phi_1)$  модель способна воспроизводить классические решения Фридмана с любым знаком кривизны, а также соответствующие решения моделей  $\Lambda$ CDM и  $w$ CDM. Предложенная модель естественным образом описывает взаимодействие темных компонент — скалярных полей через их общий потенциал  $V(\phi_1, \phi_2)$ . Найдена связь потенциала и вида взаимодействия, рассмотрены различные варианты взаимодействия.

**Ключевые слова:** космологическая модель, скалярное поле, темная материя, темная энергия, взаимодействие.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 97–111.*  
<https://doi.org/10.26456/vtppmk558>

## 1. Введение

Совокупность современных наблюдательных данных в области космологии [1,2] свидетельствует о том, что видимое в электромагнитном спектре вещество во Вселенной представляет собой малую долю — лишь около 4% всей гравитирующей материи. Остальное вещество в большинстве космологических моделей включает две составляющие: темную материю с близким к нулю давлением и темную энергию с отрицательным давлением. Темная энергия обеспечивает наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной [1–6].

В частности, наиболее популярную на текущий момент космологическую модель  $\Lambda$ CDM можно рассматривать как двухкомпонентную модель, которая в качестве первой составляющей включает холодную темную материю (cold dark matter) вместе с барионной материей с плотностью  $\rho_1 = \rho_m$  и равным нулю давлением, а роль второй составляющей (темной энергии) играет  $\Lambda$ -член в уравнении Эйнштейна, или, что эквивалентно, особая компонента материи, давление которой  $p_2 = p_{de}$  связано с плотностью энергии  $\rho_2 = \rho_{de}$  соотношением  $p_2 = -\rho_2$ . Модель  $\Lambda$ CDM достаточно хорошо описывает современные наблюдения сверхновых типа Ia, барионных акустических осцилляций, оценки параметра Хаббла и другие данные [1–4], однако при этом она вызывает ряд вопросов, связанных с неясностью природы

темной энергии, малостью наблюдаемого значения константы  $\Lambda$ , малой вероятностью примерного совпадения сегодняшних значений долей материи и темной энергии.

Эти проблемы стимулируют создание альтернативных космологических моделей [8], в частности, с различными вариантами обобщения уравнения состояния темной энергии  $p_2 = f(\rho_2)$  [4–7], с взаимодействием темных компонент [9, 10], с дополнительными пространственными измерениями [11], с модифицированным действием  $F(R)$  [12, 13] и др.

Одна из идей, направленных на решение проблемы темных компонент во Вселенной, включает описание темной энергии с помощью скалярного поля  $\phi$  [14–16]. В таких моделях действие включает зависящее от  $\phi$  слагаемое

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{\epsilon}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + S^m, \quad (1)$$

а также слагаемое  $S^m$ , представляющее видимую и темную материю. Здесь  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  — скалярная кривизна,  $(\nabla\phi_j)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_j \partial_\nu \phi_j$ , множитель  $\epsilon = \pm 1$  определяет тип скалярного поля: квинтэссенция при  $\epsilon > 0$  или фантом при  $\epsilon < 0$ . Сценарии со скалярным полем обеспечивают определяемые наблюдениями параметры темной энергии, характер ее эволюции во времени, возможность взаимодействия с темной материей [14–16]. При этом темная материя рассматривалась в классическом виде — как компонента тензора энергии-импульса в  $S^m$ .

Мы предлагаем модель, которая обобщает данный подход, естественным образом описывает взаимодействие темных компонент, воспроизводит известные космологические решения других моделей и открывает новые возможности.

## 2. Модель со скалярными полями

В настоящей работе мы рассмотрим космологическую модель, в которой как темная материя, так и темная энергия представлены в виде двух вещественных скалярных полей  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Они могут взаимодействовать — в этом случае их взаимодействие описывается общим потенциалом  $V(\phi_1, \phi_2)$  в действии [17–20]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{\epsilon_1}{2} (\nabla\phi_1)^2 - \frac{\epsilon_2}{2} (\nabla\phi_2)^2 - V(\phi_1, \phi_2) \right] + S^m. \quad (2)$$

Здесь, как и в действии (1), множители  $\epsilon_j = \pm 1$ ,  $j = 1, 2$  определяют природу скалярного поля (квинтэссенция или фантом), а слагаемое  $S^m$  описывает остальную материю — барионную составляющую и излучение.

Действие (2) симметрично относительно слагаемых, содержащих скалярные поля  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Такое представление удобно для описания взаимодействия этих полей, но отличается от подхода, используемого в работах [8, 14–16], где скалярное поле  $\phi$  используется лишь для описания темной энергии.

Варьируя действие (2) при варьировании полей  $g^{\mu\nu}$ ,  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , получим систему уравнений эволюции (движения) для данной модели

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ \sum_{j=1}^2 \epsilon_j \left( \partial_\mu \phi_j \partial_\nu \phi_j - \frac{1}{2} (\nabla\phi_j)^2 g_{\mu\nu} \right) - V g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^m \right], \quad (3)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi_j = \epsilon_j \frac{\partial V}{\partial \phi_j}, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Ковариантная дивергенция уравнения (3) сводится к уравнению сохранения энергии  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^m = 0$  для барионов и излучения, так как слагаемые с  $\dot{\phi}_j$  обращаются в нуль в силу равенств (4).

Для системы уравнений (3), (4) будем рассматривать космологические решения, удовлетворяющие условиям однородности и изотропии пространства. Для этого подставим в них метрику Фридмана–Робертсона–Уокера со знаком кривизны  $k$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (5)$$

при этом уравнение (3) сводится к системе

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot}, \quad (6)$$

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi G(p_{tot} + \rho_{tot}). \quad (7)$$

Здесь точка — производная по времени  $t$ ,  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла,  $\rho_{tot}$ ,  $p_{tot}$  — соответственно суммарные плотность и давление, которые определены следующими выражениями:

$$\rho_{tot} = \frac{\epsilon_1}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 + V(\phi_1, \phi_2) + \rho_b + \rho_r, \quad p_{tot} = \frac{\epsilon_1}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 - V(\phi_1, \phi_2) + p_b + p_r. \quad (8)$$

Здесь  $\rho_b$ ,  $p_b$  — плотность и давление барионной материи,  $\rho_r$ ,  $p_r$  — излучения.

Уравнения (4) для скалярных полей в метрике (5) принимают вид

$$\ddot{\phi}_j + 3H\dot{\phi}_j = -\epsilon_j \frac{\partial V}{\partial \phi_j}, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Эта система распадается на два независимых уравнения относительно  $\phi_1$  и  $\phi_2$  (нет взаимодействия этих полей), если потенциал  $V(\phi_1, \phi_2)$  равен сумме  $V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$ . В противном случае — компоненты взаимодействуют.

Представим потенциал  $V(\phi_1, \phi_2)$  в виде суммы двух слагаемых

$$V(\phi_1, \phi_2) = V_1(\phi_1, \phi_2) + V_2(\phi_1, \phi_2), \quad (10)$$

при выборе которых в общем случае имеет место произвол. Введем обозначения для плотностей и давлений темных компонент, выразив их через  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$\rho_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \dot{\phi}_1^2 + V_1, \quad p_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \dot{\phi}_1^2 - V_1, \quad \rho_2 = \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 + V_2, \quad p_2 = \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 - V_2. \quad (11)$$

В этих обозначениях уравнения (9) для скалярных полей преобразуются в систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 + 3H(\rho_1 + p_1) &= Q, \\ \dot{\rho}_2 + 3H(\rho_2 + p_2) &= -Q, \end{aligned} \quad (12)$$

в которой функция взаимодействия  $Q$  выражена через  $V_1(\phi_1, \phi_2)$  и  $V_2(\phi_1, \phi_2)$ :

$$Q = \frac{\partial V_1}{\partial \phi_2} \dot{\phi}_2 - \frac{\partial V_2}{\partial \phi_1} \dot{\phi}_1. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) наглядно показывают, что взаимодействие  $Q$  скалярных полей отсутствует тогда и только тогда, когда потенциал  $V$  может быть представлен суммой

$$V(\phi_1, \phi_2) = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2). \quad (14)$$

Мы будем полагать ниже, что скалярное поле  $\phi_1$  описывает темную материю. Это означает, что знак кинетического члена

$$\epsilon_1 = 1 \quad (15)$$

и соответствующее давление  $p_1$  (11) обязано обратиться в нуль (как для пылевидной материи):

$$p_1 = 0 \iff \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 - V_1(\phi_1, \phi_2) = 0. \quad (16)$$

В рамках этих ограничений, а также в предположении (14) об отсутствии взаимодействия скалярных полей мы покажем в следующем разделе, что предложенная модель (2) естественным образом воспроизводит известные космологические решения Фридмана с  $k = 0, \pm 1$ , а также соответствующие решения модели  $\Lambda$ CDM.

### 3. Решения Фридмана

Классические решения Фридмана имеют место при отсутствии темной энергии (равенстве нулю  $\Lambda$ -члена). Для пылевидной материи с давлением  $p_1 = 0$  ее плотность  $\rho_1$  стандартным образом зависит от масштабного фактора:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (17)$$

Здесь и ниже индекс “0” отмечает значение величины в настоящее время  $t = t_0$ , символом “ $a$ ” будем обозначать безразмерный нормированный масштабный фактор (введя обозначение “ $a_d$ ” для масштабного фактора с размерностью длины в формулах (5)–(7)):

$$a(t) = \frac{a_d(t)}{a_0}, \quad a_d(t_0) = a_0.$$

Зависимость  $\rho_1(a)$  (17) воспроизводится в полевой модели (2), если приравнять к нулю слагаемые с темной энергией — полем  $\phi_2$ , в частности, положить  $\phi_2 = 0$  и  $V_2 = 0$ . При этом потенциал  $V_1$  поля  $\phi_1$  (темной материи) в рамках условия (14) равен

$$V(\phi_1) = V_1(\phi_1).$$

Условие  $p_1 = 0$  (16) для такого потенциала в совокупности с равенством (11)  $\rho_1 = \frac{1}{2}\dot{\phi}_1^2 + V_1(\phi_1)$  приводит к соотношениям

$$2V_1(\phi_1) = \rho_1 = \dot{\phi}_1^2. \quad (18)$$

В случае плоской модели ( $k = 0$ ) решение Фридмана  $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$  определяет эволюцию плотности (17)  $\rho_1 = \rho_0/a^3 = \rho_0(t/t_0)^{-2}$ , а уравнение (18) приводит к равенству  $\dot{\phi}_1 = \pm\sqrt{\rho_0}(t/t_0)^{-1}$  и следующим выражениям для  $\phi_1$  и потенциала:

$$V_1(\phi_1) \equiv V(\phi_1) = A \exp(\mp 2\sqrt{6\pi G} \phi_1), \quad \phi_1 = \pm \frac{\ln t}{\sqrt{6\pi G}} + \text{const.} \quad (19)$$

Для закрытой модели ( $k = 1$ ) решение Фридмана имеет параметрический вид:

$$a(\eta) = \frac{4\pi G \rho_0}{3}(1 - \cos \eta), \quad t(\eta) = \frac{4\pi G \rho_0}{3}(\eta - \sin \eta).$$

В этом случае, учитывая равенство (17) и интегрируя уравнение (18)

$$\frac{d\phi_1}{d\eta} = \dot{\phi}_1 \frac{dt}{d\eta} = \pm \frac{\sqrt{\rho_0}}{a^{3/2}} \frac{4\pi G \rho_0}{3}(1 - \cos \eta),$$

найдем:

$$\phi_1(\eta) = \pm \sqrt{\frac{3}{2\pi G}} \ln \left| \text{tg} \frac{\eta}{4} \right| + C_1, \quad V_1(\eta) = \frac{27}{2(4\pi G)^3 \rho_0^2 (1 - \cos \eta)^3}.$$

Эти уравнения определяют зависимость  $\phi_1(t)$  как  $\phi_1(\eta(t))$ .

Найдем  $V_1$  как  $V_1(\phi_1)$ . Используя равенства

$$1 - \cos \eta = 2 \sin^2 \frac{\eta}{2} = \frac{8 \text{tg}^2(\eta/4)}{[1 + \text{tg}^2(\eta/4)]^2} = 2 \text{ch}^{-2} \ln \left| \text{tg} \frac{\eta}{4} \right|,$$

получим

$$V_1(\phi_1) = \frac{27}{2(8\pi G)^3 \rho_0^2} \text{ch}^6 \gamma \check{\phi}_1. \quad (20)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\pi G}{3}}, \quad \check{\phi}_1 \equiv \phi_1 - C_1 = \phi_1 - \text{const}; \quad (21)$$

последнее из них учитывает, что значения  $\phi_j$  всегда определены с точностью до аддитивной константы.

Для открытой модели ( $k = -1$ ), используя решение Фридмана

$$a(\eta) = \frac{4\pi G \rho_0}{3}(\text{ch} \eta - 1), \quad t(\eta) = \frac{4\pi G \rho_0}{3}(\text{sh} \eta - \eta),$$

равенства (17) и (18), аналогичным образом находим зависимость  $\phi_1$  от  $\eta$  (и, следовательно, — от  $t$ )

$$\phi_1(\eta) = \pm \gamma^{-1} \ln \left| \text{th} \frac{\eta}{4} \right| + \text{const}$$

и потенциал

$$V_1(\phi_1) = \frac{1}{2(2\gamma)^6 \rho_0^2} \text{sh}^6 \gamma \check{\phi}_1. \quad (22)$$

#### 4. Решения в модели $\Lambda$ CDM

Модель  $\Lambda$ CDM будет воспроизведена в рамках полевой модели (2), если в выражении (14) мы положим

$$\phi_2 = 0, \quad V_2 = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \text{const}.$$

В этом случае уравнение эволюции (6) будет иметь соответствующий  $\Lambda$ CDM вид

$$H^2 + \frac{k}{a_d^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (23)$$

где  $\rho = \rho_{tot} - \rho_2 = \rho_1 + \rho_b + \rho_r$ . Ниже мы будем моделировать решения в модели  $\Lambda$ CDM, предполагая, что в уравнении (23)  $\rho = \rho_1$ , другими словами, мы пренебрегаем барионной и радиационной компонентами.

Так же, как и в случае модели Фридмана, для пылевидной материи с давлением  $p_1 = 0$  (16) и плотностью  $\rho_1 = \rho_0/a^3$  (17) из приведенных равенств получаем соотношения (18)  $2V_1(\phi_1) = \rho_1 = \dot{\phi}_1^2$ , откуда можно выразить

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\rho_0}}{a^{3/2}} \implies \frac{d\phi_1}{da} = \pm \frac{1}{\dot{a}} \frac{\sqrt{\rho_0}}{a^{3/2}} = \pm \frac{\sqrt{\rho_0}}{Ha^{5/2}}.$$

Используя выражение (23) для параметра Хаббла, запишем предыдущее уравнение в виде

$$\frac{d\phi_1}{da} = \pm \frac{\sqrt{3\rho_0}}{a\sqrt{8\pi G\rho_0 + \Lambda a^3 - 3ak/a_0^2}}. \quad (24)$$

В случае плоской модели ( $k = 0$ ) уравнение (24) можно проинтегрировать, сделав замену  $8\pi G\rho_0 + \Lambda a^3 = x^2$ . В результате интегрирования получим  $\phi_1$  как функцию переменной  $a$ :

$$\phi_1(a) = \frac{1}{\sqrt{24\pi G}} \ln \left| \frac{\sqrt{8\pi G\rho_0 + \Lambda a^3} - \sqrt{8\pi G\rho_0}}{\sqrt{8\pi G\rho_0 + \Lambda a^3} + \sqrt{8\pi G\rho_0}} \right| + \text{const.}$$

Выразив отсюда  $a^3 = 8\pi G\rho_0/[\Lambda \text{sh}^2(\sqrt{6\pi G}\check{\phi})]$ , найдем потенциал  $V_1 = \frac{1}{2}\rho_0 a^{-3}$ :

$$V_1(\phi_1) = \frac{\Lambda}{16\pi G} \text{sh}^2(\sqrt{6\pi G}\check{\phi}_1), \quad V_1(t) = \frac{\Lambda}{16\pi G} \text{sh}^{-2}\left[\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}(t - t_*)\right]. \quad (25)$$

В случае закрытой и открытой моделей ( $k = \pm 1$ ), используя уравнение (24) и равенство  $a^3 = \rho_0/(2V_1)$ , можно установить связь между  $V_1$  и  $\phi_1$  в виде следующего интеграла

$$\phi_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \int \left[ 16\pi G V_1^2 + \Lambda V_1 - \frac{3kV_1}{a_0^2} \left(\frac{2V_1}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} dV_1. \quad (26)$$

Это выражение неявно определяет зависимость  $V_1(\phi_1)$  для данной модели, ее вид при различных значениях  $k$  представлен на Рис. 1 (слева) для безразмерных величин  $v_1 = V_1/\rho_0$  и  $\gamma\phi_1$  с константой  $\gamma$  (21). Все кривые на Рис. 1 построены при фиксированном (в соответствии с последними наблюдательными данными [2]) значении параметра  $\Omega_\Lambda/\Omega_m^0$  для трех различных значений отношения  $\Omega_k/\Omega_m^0$ :

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m^0} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G\rho_0} = 2,2; \quad \frac{\Omega_k}{\Omega_m^0} = \begin{cases} -1/2, & k = 1, \\ 0, & k = 0, \\ 1/2, & k = -1. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь мы используем стандартные обозначения для современных долей холодной материи, темной энергии и кривизны в модели  $\Lambda$ CDM [3–5]:

$$\Omega_m^0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}.$$

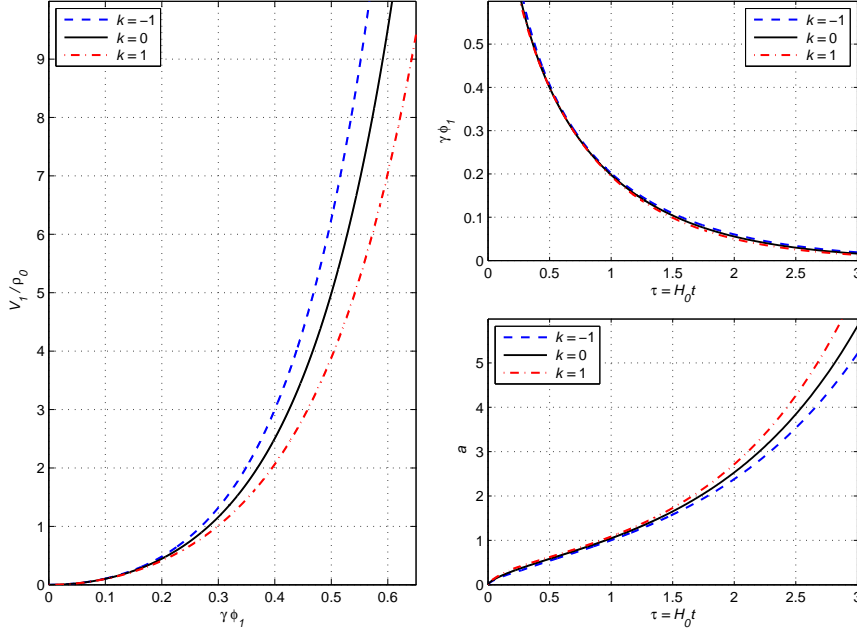


Рис. 1: Для полевого аналога модели  $\Lambda$ CDM представлены зависимость потенциала  $V_1$  от  $\phi_1$  (слева), а также эволюция во времени поля  $\phi_1$  и масштабного фактора  $a$  при  $\Omega_\Lambda/\Omega_m^0 = 2,2$  и трех значений отношения  $\Omega_k/\Omega_m^0$  (27)

С учетом тождества  $\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$  условия (27) определяют конкретные значения  $\Omega_j$  для примеров на Рис. 1. В этих обозначениях интеграл (26) можно представить как

$$\phi_1 = \pm \frac{\sqrt{\Omega_m^0}}{6\gamma} \int \frac{dv_1}{v_1 \sqrt{\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda/(2v_1) + \Omega_k(2v_1)^{-1/3}}}, \quad \text{где } v_1 = \frac{V_1}{\rho_0}. \quad (28)$$

Сплошные линии на Рис. 1, описывающие плоскую модель с  $k = 0$ , определены формулами (25) и следующим из них соотношением  $\text{sh}(\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda}t) = \text{sh}^{-1} 3\gamma\dot{\phi}_1$ , где  $t = t_* = 0$  и  $\dot{\phi}_1 \rightarrow \infty$  соответствуют Большому Взрыву. С другой стороны, линии, соответствующие  $k = \pm 1$  (точнее,  $\Omega_k = \mp \frac{1}{2}\Omega_m^0$ ), построены с помощью численного интегрирования выражения (26) и уравнения (18)

$$\dot{\phi}_1 = -\sqrt{2V_1(\phi_1)},$$

которое для безразмерных скаляра  $\gamma\phi_1$  и времени  $\tau = H_0 t$  можно переписать в виде

$$\frac{d(\gamma\phi_1)}{d\tau} = -\sqrt{\frac{\Omega_m^0}{2} v_1}.$$

В расчетах, иллюстрируемых Рис. 1, величины  $\gamma\phi_1$  и времени  $\tau$  вычислены как функции параметра  $v_1$ ; масштабный фактор  $a$  выражается через  $v_1$  с помощью уравнений (17) и (18):  $a = (2v_1)^{-1/3}$ .

## 5. Модель $w$ CDM

Модель  $w$ CDM представляет собой простейшую двухкомпонентную модель с общей плотностью  $\rho_{tot} = \rho_1 + \rho_2$  (пренебрегаем вкладом  $\rho_b + \rho_r$ ), где  $\rho_1$  (17) — плотность холодной пылевидной материи с давлением  $p_1 = 0$  (16), в то время как плотность  $\rho_2$  и давление  $p_2$  темной энергии связаны уравнением состояния [6, 7]

$$p_2 = w\rho_2, \quad w = \text{const.} \quad (29)$$

Если эти компоненты не взаимодействуют, то есть в уравнениях (11)  $Q = 0$ , то эти уравнения приводят к их эволюции (для  $\rho_1$  — выражение (17)):

$$\rho_1 = \rho_0 a^{-3}, \quad \rho_2 = \rho_{20} a^{-3(1+w)}. \quad (30)$$

Для воспроизведения сценария  $w$ CDM в рамках полевой модели (2) ищем потенциал (без взаимодействия) вида (14)  $V(\phi_1, \phi_2) = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$ , который обеспечивает закон (30) эволюции компонент.

Условие  $p_1 = 0$  (16) для пылевидной компоненты материи приводит к равенствам (18) для  $V_1(\phi_1)$ . Аналогичные соотношения для  $V_2(\phi_2)$  следуют из уравнений состояния (29) и эволюции (30), если подставить в них выражения (11):

$$p_2 = \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 - V_2(\phi_2) = w \left( \frac{\epsilon_2}{2} \dot{\phi}_2^2 + V_2 \right) = w \rho_{20} a^{-3(1+w)}.$$

Отсюда мы выражаем  $\dot{\phi}_2$  и  $V_2$  через  $\rho_2(a)$  по аналогии с равенствами (18):

$$\epsilon_2 \dot{\phi}_2^2 = 2 \frac{1+w}{1-w} V_2(\phi_2) = (1+w) \rho_{20} a^{-3(1+w)}. \quad (31)$$

Эти равенства явно демонстрируют, что скалярное поле  $\phi_2$  является квинтэссенцией ( $\epsilon_2 > 0$ ) при  $w > -1$  или фантомом ( $\epsilon_2 < 0$ ) при  $w < -1$ .

Используя равенства

$$\frac{dV_j}{d\phi_j} = \frac{dV_j}{da} \Big/ \frac{d\phi_j}{da} = \frac{dV_j}{da} \frac{aH}{\dot{\phi}_j}, \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{\rho_{20}}{a^{3(1+w)}} \right] - \frac{k}{a_d^2},$$

мы находим искомые потенциалы  $V_1(\phi_1)$  и  $V_2(\phi_2)$  в виде квадратур, подобных интегралу (28):

$$\frac{dV_1}{d\phi_1} = \pm 6\gamma V_1 \left[ 1 + \frac{\Omega_2^0}{\Omega_m^0} (2v_1)^w + \frac{\Omega_k}{\Omega_m^0} (2v_1)^{-1/3} \right]^{1/2}, \quad (32)$$

$$\frac{dV_2}{d\phi_2} = \pm 6\gamma \sqrt{|1+w|} V_2 \left[ \frac{\Omega_m^0}{\Omega_2^0} (2v_2)^{-\frac{w}{1+w}} + 1 + \frac{\Omega_k}{\Omega_2^0} (2v_2)^{-\frac{1+3w}{3+3w}} \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Здесь  $\Omega_2^0 = 8\pi G \rho_{20} / (3H_0^2)$ ,  $v_1 = V_1 / \rho_0$ ,  $v_2 = V_1 / [(1-w)\rho_0]$ .

Эти выражения позволяют найти  $V_j(\phi_j)$  и полный потенциал без взаимодействия (14)  $V = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$ , воспроизводящий сценарий  $w$ CDM. В частном случае  $w = -1$  эта модель переходит в  $\Lambda$ CDM, что легко проследить и в предложенной полевой версии: при  $w = -1$  уравнение (32) переходит в (28), а уравнение (33) сводится в виду  $V_2 = \text{const} = \Lambda / (8\pi G)$ .



## 6. Модели с взаимодействием

Возможности модели (2) с двумя скалярными полями и их общим потенциалом  $V(\phi_1, \phi_2)$  наиболее полно раскрываются в сценариях с взаимодействием полей, в которых отлична от нуля функция взаимодействия  $Q$  в уравнениях (12). Напомним, что эта функция посредством формулы (13) выражается через потенциал  $V$ , точнее, через слагаемые  $V_1(\phi_1, \phi_2)$  и  $V_2(\phi_1, \phi_2)$  на которые этот потенциал разделен равенством (10) (с наличием некоторого произвола в этом разделении).

Один из первых примеров взаимодействующих скалярных полей был построен в работе [18], который включал потенциал

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{\phi_0^2}{2t_0^2} \left[ (A-1)e^{-2\phi_1/\phi_0} + (A+1)e^{-2\phi_2/\phi_0} + 2Ae^{-(\phi_1+\phi_2)/\phi_0} \right] \quad (34)$$

(где  $\phi_0, t_0$  — константы,  $A = 12\pi G\phi_0^2$ ) и решение

$$\phi_1 = \phi_0 \log \frac{t}{t_0}, \quad \phi_2 = \phi_0 \log \frac{t_s - t}{t_0}, \quad H = \frac{A}{3} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t - t_s} \right), \quad \epsilon_2 = -1, \quad (35)$$

описывающее сингулярность вида Большой Разрыв (при  $t = t_s$ ) [18–20].

Заметим, что решение (34), (35) не удовлетворяет условию (16)  $p_1 = 0$ .

Если разделить слагаемое “взаимодействия” с  $e^{-(\phi_1+\phi_2)/\phi_0}$  в потенциале (34) симметрично между  $V_1$  и  $V_2$  в выражении (10), то функция взаимодействия  $Q$  (13), выраженная через  $\phi_j$  и через плотности  $\rho_j$  (11), примет вид

$$Q = \frac{\phi_0^2 A}{2t_0^3} (e^{-\phi_1/\phi_0} + e^{-\phi_2/\phi_0}) e^{-(\phi_1+\phi_2)/\phi_0} = \frac{3H}{A} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Построим пример взаимодействия скалярных полей, в котором выполняется условие (16)  $p_1 = 0$ , что означает возможность интерпретации поля  $\phi_1$  как темной материи. Рассмотрим потенциал вида (34), но без симметрии между  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$V(\phi_1, \phi_2) = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_1, \phi_2) = \frac{\phi_0^2}{2t_1^2} e^{-2\phi_1/\phi_0} + B_2 e^{\gamma_1 \phi_1/\phi_0 + \gamma_2 \phi_2/\psi_0}. \quad (36)$$

Здесь  $\phi_0, \psi_0, B_2, t_j, \gamma_j$  — константы,  $\gamma_j$  связаны соотношением  $\gamma_1 + \gamma_2 = -2$ . Будем искать решение

$$\phi_1 = \phi_0 \ln \frac{t}{t_1}, \quad \phi_2 = \psi_0 \ln \frac{t}{t_2}, \quad H = \frac{h_0}{t}, \quad h_0 = \text{const}, \quad (37)$$

которое, в отличие сценария (35) не имеет сингулярности в будущем. Наложив условие (16)  $p_1 = 0$ , мы получим равенства

$$\rho_1 = \dot{\phi}_1^2 = 2V_1 = \frac{\phi_0^2}{t^2}, \quad V_2 = \frac{A_2}{t^2}, \quad A_2 = B_2 t_1^{-\gamma_1} t_2^{-\gamma_2}.$$

Подставив эти соотношения в уравнения (6), (9), мы выразим константы в потенциале (36) через безразмерные параметры  $\gamma_1$  и  $h_0$ :

$$\phi_0^2 = \frac{\gamma_1 h_0 (3h_0 - 1)}{8\pi G (2 - 3h_0 + \gamma_1/2)}, \quad \epsilon_2 \psi_0^2 = \frac{(2 + \gamma_1) h_0 (2 - 3h_0)}{8\pi G (2 - 3h_0 + \gamma_1/2)}, \quad A_2 = \frac{2 - 3h_0}{\gamma_1} \phi_0^2.$$

Отметим, что в случае  $h_0 = \frac{2}{3}$  взаимодействие исчезает и мы получаем потенциал (14)  $V = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$  (или  $V_2 = 0$ ). Но при  $h_0 \neq \frac{2}{3}$  функция взаимодействия (13)  $Q = -\dot{\phi}_1 \frac{\partial V_2}{\partial \phi_1}$  отлична от нуля и может быть представлена в виде

$$Q = 3H \frac{3h_0 - 2}{3h_0} \rho_1.$$

Это выражение описывает различные формы взаимодействия, порождаемые скалярными полями. В частности, передача энергии от темной энергии к темной материи ( $Q > 0$ ) реализуется при  $h_0 > \frac{2}{3}$  с возможными значениями  $\epsilon_2 = \pm 1$ , обратная передача энергии ( $Q < 0$ ) — при  $0 < h_0 < \frac{2}{3}$  и  $\epsilon_2 = 1$ .

### Заключение

Предложенная модель (2) с двумя скалярными полями  $\phi_1, \phi_2$ , описывающими, соответственно, темную материю и темную энергию, обладает широким спектром возможностей и способна с помощью уравнений (6), (11), (12) воспроизводить различные космологические сценарии. В частности, в варианте с отсутствием взаимодействия темных компонент, который соответствует виду  $V = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$  (14) потенциала, при условии равенства нулю эффективного давления  $p_1$  модель воспроизводит решения Фридмана со знаком кривизны  $k = 0$  (19) и  $k = \pm 1$  (20), (22), а также при произвольных  $k$  — решения моделей  $\Lambda$ CDM (25), (26) и  $w$ CDM (32), (33).

Наибольший интерес вызывают приложения модели к описанию взаимодействия темных компонент, которое реализуется естественным образом — через общий потенциал  $V(\phi_1, \phi_2)$  скалярных полей. При этом функция взаимодействия  $Q$  в уравнениях эволюции (12) определяется выражением (13). В качестве примеров рассмотрены потенциалы взаимодействия (34) и (36).

### Список литературы

- [1] Ade P.A.R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // *Astronomy and Astrophysics*. 2016. Vol. 594. ID A13.
- [2] Ade P.A.R. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters [Electronic resource]. URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
- [3] Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологическая модель с обобщенным чаплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2014. № 1. С. 21–38.
- [4] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2014. № 10. ID 057.
- [5] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Последние оценки астрофизических параметров и предсказания модели с модифицированным газом Чаплыгина // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2015. № 2. С. 7–24.

- [6] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели с интегрируемыми уравнениями состояния // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 5–26.
- [7] Sharov G.S. Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. № 6. ID 023.
- [8] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // Astrophysics and Space Science. 2012. Vol. 342, № 1. Pp. 155–228.
- [9] Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 466, № 3. Pp. 3497–3506.
- [10] Pan S., Sharov G.S. A model with interaction of dark components and recent observational data // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 472, № 4. Pp. 4736–4749.
- [11] Grigorieva O.A., Sharov G.S. Multidimensional gravitational model with anisotropic pressure // International Journal of Modern Physics D. 2013. Vol. 22, № 13. ID 1350075.
- [12] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // The European Physical Journal C - Particles and Fields. 2017. Vol. 77. ID 862.
- [13] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S. Testing logarithmic corrections on  $R^2$ -exponential gravity by observational data // Physical Review D. 2019. Vol. 99, № 2. ID 024003.
- [14] Wetterich C. The cosmion model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological “constant” // Astronomy and Astrophysics. 1995. Vol. 301. Pp. 321–328.
- [15] Carroll S.M. Quintessence and the Rest of the World // Physical Review Letters. 1998. Vol. 81. Pp. 3067–3071.
- [16] Amendola L. Coupled Quintessence // Physical Review D. 2000. Vol. 62. ID 043511.
- [17] Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D. Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: dark energy and the cosmic speed-up // Physical Review D. 2004. Vol. 70. ID 043539.
- [18] Nojiri S., Odintsov S.D., Tsujikawa S. Properties of singularities in (phantom) dark energy universe // Physical Review D. 2005. Vol. 71. ID 063004.
- [19] Nojiri S., Odintsov S.D. Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy // General Relativity and Gravitation. 2006. Vol. 38. Pp. 1285–1304.

- [20] Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard // Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. 2006. Vol. 632. Pp. 597–604.

#### Образец цитирования

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели со скалярными полями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 97–111. <https://doi.org/10.26456/vtprmk558>

#### Сведения об авторах

1. **Воронцова Елена Геннадьевна**

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [Vorontsova.EG@tversu.ru](mailto:Vorontsova.EG@tversu.ru)*

2. **Шаров Герман Сергеевич**

заведующий кафедрой функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [Sharov.GS@tversu.ru](mailto:Sharov.GS@tversu.ru)*

## COSMOLOGICAL MODELS WITH SCALAR FIELDS

**Vorontsova Elena Gennadievna**

Associate Professor at General Mathematics and Mathematical Physics Department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, Zhelyabov str., 33, TverSU.*

*E-mail: [Vorontsova.EG@tversu.ru](mailto:Vorontsova.EG@tversu.ru)*

**Sharov German Sergeevich**

Head of Functional Analysis and Geometry Department, Tver State University

*Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.*

*E-mail: [Sharov.GS@tversu.ru](mailto:Sharov.GS@tversu.ru)*

---

*Received 03.07.2019, revised 02.09.2019.*

---

We suggest a cosmological model with two real scalar fields  $\phi_1$  and  $\phi_2$ , which play the role of both dark matter and dark energy. The field  $\phi_1$  is interpreted as dark matter, because the corresponding effective pressure  $p_1$  equals zero. When we choose a suitable potential  $V(\phi_1)$ , the model can reproduce the classical Friedmann solutions with any curvature sign and also the correspondent solutions of the  $\Lambda$ CDM and  $w$ CDM models. The suggested model describes interaction of the dark components (scalar fields) in a natural way via their common potential  $V(\phi_1, \phi_2)$ . We determined a connection between the potential and a type of interaction, studied different variants of this interaction.

**Keywords:** cosmological model, scalar field, dark matter, dark energy, interaction.

### Citation

Vorontsova E.G., Sharov G.S., “Cosmological models with scalar fields”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 97–111 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk558>

### References

- [1] Ade P.A.R. et al., “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”, *Astronomy and Astrophysics*, **594** (2016), A13.
- [2] Ade P.A.R. et al, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
- [3] Sharov G.S., Vorontsova E.G., “Cosmological model with generalized Chaplygin gas and recent astronomical observations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2014, № 1, 21–38 (in Russian).

- [4] Sharov G.S., Vorontsova E.G., “Parameters of cosmological models and recent astronomical observations”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014, № 10, 057.
- [5] Vorontsova E.G., Sharov G.S., “Recent estimations of astrophysical parameters and forecast of the model with modified Chaplygin gas”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 2, 7–24 (in Russian).
- [6] Vorontsova E.G., Sharov G.S., “Cosmological models with integrable equations of state”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 2, 5–26 (in Russian).
- [7] Sharov G.S., “Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, № 6, 023.
- [8] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D., “Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests”, *Astrophysics and Space Science*, **342**:1 (2012), 155–228.
- [9] Sharov G.S. et al., “A new interacting two fluid model and its consequences”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **466**:3 (2017), 3497–3506.
- [10] Pan S., Sharov G.S., “A model with interaction of dark components and recent observational data”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **472**:4 (2017), 4736–4749.
- [11] Grigorieva O.A., Sharov G.S., “Multidimensional gravitational model with anisotropic pressure”, *International Journal of Modern Physics D*, **22**:13 (2013), 1350075.
- [12] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S., “Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history?”, *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, **77** (2017), 862.
- [13] Odintsov S.D., Saez-Chillon Gomez D., Sharov G.S., “Testing logarithmic corrections on  $R^2$ -exponential gravity by observational data”, *Physical Review D*, **99**:2 (2019), 024003.
- [14] Wetterich C., “The cosmological model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological “constant””, *Astronomy and Astrophysics*, **301** (1995), 321–328.
- [15] Carroll S.M., “Quintessence and the Rest of the World”, *Physical Review Letters*, **81** (1998), 3067–3071.
- [16] Amendola L., “Coupled Quintessence”, *Physical Review D*, **62** (2000), 043511.
- [17] Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D., “Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: dark energy and the cosmic speed-up”, *Physical Review D*, **70** (2004), 043539.

- 
- [18] Nojiri S., Odintsov S.D., Tsujikawa S., “Properties of singularities in (phantom) dark energy universe”, *Physical Review D*, **71** (2005), 063004.
- [19] Nojiri S., Odintsov S.D., “Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy”, *General Relativity and Gravitation*, **38** (2006), 1285–1304.
- [20] Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D., “Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard”, *Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, **632** (2006), 597–604.