СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.7

К ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОТИПНЫХ СРЕДСТВ ОБОРОНЫ ПО КРИТЕРИЮ РАЗНОСТИ ПОТЕРЬ

Перевозчиков А.Г.[*], Решетов В.Ю.[**], Лесик А.И.[***]
[*]НПО «РусБИТех», г. Тверь
[**]МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[***]Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 23.04.2018, после переработки 14.05.2019.

Изучается задача оптимального распределения разнотипных средств обороны по разнотипным средствам нападения на дальних подступах к обороняемым объектам, когда точная информация по целераспределению средств нападения отсутствует. В качестве критерия используется разность потерь сторон, изучается задача его оптимизации в непрерывной постановке. Получено явное выражение для функции потерь обороны, основанное на критерии упорядочивания очередности атак обороны Е.А.Берзина, что приводит в общем случае неоднородности ресурсов сторон к вогнутой задаче математического программирования, которая может быть решена методом градиентного подъема.

Ключевые слова: задача распределения ресурсов по критерию разности потерь сторон, неоднородность ресурсов сторон, критерий упорядочивания очередности атак, выражение для функции потерь обороны на основе критерия упорядочивания, непрерывная постановка задачи, оптимальная стратегия обороны, численный метод оптимизации.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 26–41.
https://doi.org/10.26456/vtpmk497

Введение

Работа основана на результатах из [3] и является дальнейшим развитием построений в [4]. Классическая задача распределения однородных ресурсов обороны была определена и изучена в работе [1], в которой функция выигрыша обороны с учетом возможности игровой постановки имеет вид

$$F(x,y) = \sum_{j=1}^{N} B_j y_j (1 - q_j^{\frac{x_j}{y_j}}), \tag{1}$$

где $B_j > 0$ интерпретируются как важность типов j средств нападения, $y_j > 0$ – их количество, q_j – вероятность непоражения средства нападения в дуэльной ситуации с одним средством обороны, а x_j – количество средств обороны, удовлетворяющее ограничению:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \leqslant K, x_j \geqslant 0, j = 1, 2, ..., N. \tag{2}$$

Обозначим через x,y N-мерные векторы с координатами x_j, y_j. Неравенства между векторами будем понимать покомпонентно. В работе [3] было показано, что функция (1) является вогнутой по x для любого $y > 0$ и выпуклой по y для любого x в области, определенной совместными ограничениями:

$$\frac{1}{x_j} + \frac{\ln q_j^{-1}}{y_j} \leqslant 1, j = 1, 2, ..., N. \tag{3}$$

Кроме этого, функция (1) является возрастающей по x и по y в области $x, y > 0$.

Для выполнения (3) достаточно, например, условий

$$x_j \geqslant 1 + \ln q_j^{-1},\ y_j \geqslant 1 + \ln q_j^{-1},\ j = 1, 2, ..., N, \tag{4}$$

которые в отличии от (3) являются распадающимися, что существенно в игровой постановке задачи, изученной в [4]. Таким образом, в непрерывных стратегиях функция (1) имеет седловую точку в области (4) и, следовательно, допускает решение соответствующей антагонистической игры в чистых стратегиях (см.[5]), в отличие от игры «нападение-оборона», определенной и исследованной в [2], имеющей выпуклую функцию выигрыша нападения по обеим переменным и в силу этого имеющей чистую оптимальную стратегию защиты и смешанную нападения.

В работе [3] изучалась дискретная постановка задачи максимизации (1) при ограничениях (2) с условием целочисленности переменных и метод максимального элемента для ее точного решения. В непрерывной постановке такие задачи решаются на основе леммы Гиббса (см.[6]), имеющей дискретный аналог (см. там же), на основе которого также может быть построен конечный алгоритм решения дискретной задачи. Лемма Гиббса в свою очередь представляет собой принцип уравнивания Ю.Б.Гермейера [2] для производных или соответствующих конечных разностей в дискретном варианте (см.[6]). Наконец, в работе [7] получено обобщение принципа уравнивания для неоднородных ресурсов в линейном случае, которое естественно назвать принципом уравнивания Гермейера-Краснощекова.

В [4] рассматривалось обобщение задачи (1), (2) на случай неоднородных ресурсов обороны, в которой ее функция выигрыша имеет вид

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{N} B_j y_j \left(1 - \prod_{i=1}^{r} q_{ij}^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right), \tag{5}$$

где $q_{ij} = 1 - p_{ij}$, p_{ij} – вероятность поражения цели j-го типа в одиночном бою с истребителем-перехватчиком i-го типа, x_{ij} – количество средств обороны i-го типа назначенных по средствам нападения j-го типа, удовлетворяющее ограничениям

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leqslant K_i, x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2, ..., r, j = 1, 2, ..., N. \tag{6}$$

Предполагается, что выделенная для уничтожения одной единицы j-го типа группа x_{ij}/y_j (исходя из равномерного распределения перехватчиков по целям) используется последовательно, так что с каждым самолетом перехватчиком из выделенной группы и атакуемой единицей j-го типа (если она не была уничтожена предыдущими перехватчиками) происходит одиночный бой. Было указано, что метод максимального элемента для приближенного решения задачи (5), (6) в дискретной постановке имеет погрешность порядка 4-5%.

В работе [4] задача (5), (6) изучалась в игровой постановке. В этом случае переменная $y_j > 0$ интерпретировалась как количество однородных средств нападения на j-м направлении при ограничениях, заданных условиями

$$\sum_{j=1}^{N} y_j \leqslant M, j = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

Рассматривалась возможность использования метода максимального элемента для приближенного нахождения гарантированных результатов сторон. Аналогом выпуклости по $y > 0$ критерия (5) будут условия

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij} \ln q_{ij}^{-1}} + \frac{1}{y_j} \leqslant 1, j = 1, 2, ..., N. \tag{8}$$

Для выполнения (8) достаточно, например условий

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} \ln q_{ij}^{-1} \geqslant 2, y_j \geqslant 2, j = 1, 2, ..., N. \tag{9}$$

Наконец, в [4] поставлена задача распределения разнотипных средств обороны по критерию разности потерь

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{N} B_j y_j \left(1 - \prod_{i=1}^{r} q_{ij}^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right) - \mu \Pi(x, y), \tag{10}$$

где $\Pi(x, y)$ – функция потерь обороны, $\mu > 0$ – управляющий параметр. Потери складываются из потерь в каждой группе средств обороны, выделенных для воздействий по средствам нападения j-го типа

$$\Pi(x, y) = \sum_{j=1}^{N} \Pi_j(x_j, y_j), \tag{11}$$

где $x_j = (x_{ij}, i = 1, 2, ..., r)$ – вектор средств обороны, назначаемых по средствам нападения j-го типа, а $x_j/y_j = (x_{ij}/y_j, i = 1, 2, ..., r)$ – соответственно, вектор средств обороны, назначаемых по одному средству нападения j-го типа при равномерном распределении средств обороны, что и предполагается далее.

Сложность заключается в том, что потери $\Pi_j(x_j, y_j)$ в модели последовательных дуэльных воздействий принятой в [4] зависят не только от количества и типов средств обороны, но и от последовательности их воздействий по средствам нападения j-го типа. В работе [4] эта сложность преодолевается алгоритмически на основе метода максимального элемента, использование которого не предполагает наличие явного выражения для потерь обороны. При этом последовательность воздействий в каждой группе средств обороны может оказаться не оптимальной и ее требуется корректировать на основе критерия упорядочения атак, предложенного в [4]. При этом потери обороны уменьшаются, а потери нападения остаются на прежнем уровне, поскольку они не зависят от последовательности атак. В связи с этим, в настоящей работе получено явное выражение для потерь обороны в непрерывной постановке задачи, на основе критерия упорядочения атак Е.А.Берзина, предложенного в [4]. На этой основе строиться метод последовательных приближений для решения задачи максимизации критерия (10) при ограничениях (6) в непрерывной постановке градиентного типа.

1. Явное выражение для функции потерь обороны

Рассмотрим, следуя [4], простейшую последовательность назначений средств обороны по средствам нападения j-го типа, записанной в виде цепочки

$$x_{i_1 j}/y_j \to x_{i_2 j}/y_j \to ... \to x_{i_r j}/y_j. \tag{12}$$

Одно средство j-го типа последовательно ведет одиночные бои с группами (12) средств обороны одного типа. Тогда потери внутри первой группы (12) в предположении целочисленности величин (12) составят [4]

$$n_1(x_{i_1 j}, y_j) = \sum_{k=1}^{x_{i_1 j}/y_j} q_{i_1 j}^{k-1} \omega_{i_1 j} = \frac{\omega_{i_1 j}}{p_{i_1 j}}(1 - q_{i_1 j}^{x_{i_1 j}/y_j}), \tag{13}$$

где ω_{ij} – вероятность поражения одного средства обороны i-го типа в дуэльной ситуации с одним средством нападения j-го типа. В непрерывном случае используется последнее выражение в (13). В случае непоражения одного средства j-го типа первой группой средств обороны в (12) с вероятностью $q_{i_1 j}^{x_{i_1 j}/y_j}$ в бой вступает вторая группа и ее потери оцениваются величиной

$$n_2(x_{i_1 j}, y_j) = \frac{\omega_{i_2 j}}{p_{i_2 j}}(1 - q_{i_1 j}^{x_{i_2 j}/y_j}) \tag{14}$$

и т.д. В результате математическое ожидание количества пораженных средств обороны с учетом их важности C_i составит

$$\begin{aligned} \Pi_j(x_j, y_j)/y_j = C_{i_1} n_1(x_{i_1 j}, y_j) + C_{i_2} q_{i_1 j}^{x_{i_1 j}/y_j} n_2(x_{i_1 j}, y_j) + ... \\ ... + C_{i_r} \prod_{l=1}^{r-1} q_{i_l j}^{x_{i_l j}/y_j} n_r(x_{i_r j}, y_j), \end{aligned} \tag{15}$$

а всеми средствами нападения j-го типа с весами составит

$$\Pi_j(x_j, y_j) = y_j \sum_{k=1}^{r} C_{i_k} \frac{\omega_{i_k j}}{p_{i_k j}} \prod_{l=1}^{k-1} q_{i_l j}^{x_{i_l j}/y_j} (1 - q_{i_k j}^{x_{i_k j}/y_j}), \tag{16}$$

где $\prod_{l=1}^{k-1} q_{i_l j}^{x_{i_l j}/y_j} = 1$ по определению.

Согласно критерию упорядочения Берзина [4, с.142], оптимальная последовательность атак $i_k = i_k(j)$ в (12), минимизирующая потери обороны, должна удовлетворять условию

$$C_{i_k}\frac{\omega_{i_k j}}{p_{i_k j}} \leqslant C_{i_{k+1}}\frac{\omega_{i_{k+1},j}}{p_{i_{k+1},j}},\ k = 1,2,...,r-1, \tag{17}$$

для любого $j = 1,2,...,N$.

Предположим, что выбранная последовательность индексов $i_k = i_k(j)$ удовлетворяет условию (17). Тогда из (16) раскрытием скобок и приведением подобных можно получить представление

$$\begin{gathered}\Pi_j(x_j,y_j)/y_j = C_{i_1}\tfrac{\omega_{i_1 j}}{p_{i_1 j}} + (C_{i_2}\tfrac{\omega_{i_2 j}}{p_{i_2 j}} - C_{i_1}\tfrac{\omega_{i_1 j}}{p_{i_1 j}})q_{i_1 j}^{x_{i_1 j}/y_j} + ... \\ +(C_{i_r}\tfrac{\omega_{i_r j}}{p_{i_r j}} - C_{i_{r-1}}\tfrac{\omega_{i_{r-1} j}}{p_{i_{r-1} j}})\prod_{l=1}^{r-1} q_{i_l j}^{x_{i_l j}/y_j} - C_{i_r}\tfrac{\omega_{i_r j}}{p_{i_r j}}\prod_{l=1}^{r} q_{i_l j}^{x_{i_l j}/y_j},\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$C_{i_{k+1}}\frac{\omega_{i_{k+1} j}}{p_{i_{k+1} j}} - C_{i_k}\frac{\omega_{i_k j}}{p_{i_k j}} \geqslant 0,\ k = 1,2,...,r-1$$

в силу критерия упорядочения уравнивания (17).

Отсюда следует, что для вогнутости критерия (10) по x достаточно, чтобы выполнялись условия

$$B_j \geqslant \mu \max_{i=1,2,...,r} C_i\frac{\omega_{ij}}{p_{ij}},\ j = 1,2,...,N,$$

и справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для вогнутости критерия (10) по x достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\mu \leqslant \min_{j=1,2,...,N}(B_j/\max_{i=1,2,...,r} C_i\frac{\omega_{ij}}{p_{ij}}). \tag{19}$$

Таким образом, при достаточно малом значении параметра $\mu > 0$ задача максимизации критерия (10) по x при ограничениях (6) является задачей вогнутого программирования, которая может быть решена комбинированным методом проекции градиентов и субградиентного подъема.

Пример 1. Предположим, что $N = 1$, $r = 4$, $K = 4$, $B_1 = 15$, $\mu = 1$, $y_1 = 1$ и остальные параметры имеют следующие значения.

Таблица 1: Исходные данные к примеру 1

i	1	2	3	4
C_i	16	20	10	10
ω_{i1}	0,6	0,2	0,1	0,2
p_{i1}	0,8	0,5	0,3	0,5
K_i	1	3	1	2

Требуется выписать функцию (18), проверить условие (19) и записать полученную задачу (6), (10).

Решение. Величины (17) и соответствующие номера $i_k, k = 1, 2, 3, 4$, имеют вид

Таблица 2: Упорядочивание величин (17)

i	1	2	3	4
$C_i\omega_{i1}/p_{i1}$	12,00	8,00	3,33	4,00
i_k	4	3	1	2

Теперь можно выписать функцию (18)

$$\Pi_1(x_1, 1) = 3,33 + (4 - 3,33)q_{31}^{x_{31}} + (8 - 4)q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}} + \\ +(12 - 8)q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}}q_{21}^{x_{21}} - 12q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}}q_{21}^{x_{21}}q_{11}^{x_{11}}.$$

Условие (19) выполняется

$$\mu = 1 \leqslant B_1 / \max_{i=1,2,\dots,r} C_i \frac{\omega_{i1}}{p_{i1}} = \frac{15}{12}.$$

Критерий (10) имеет вид

$$F(x_1, 1) = B_1(1 - q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}}q_{21}^{x_{21}}q_{11}^{x_{11}}) - \mu\Pi_1(x, 1) = \\ = 11,67 - 0,67q_{31}^{x_{31}} - 4q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}} - 4q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}}q_{21}^{x_{21}} - 3q_{31}^{x_{31}}q_{41}^{x_{41}}q_{21}^{x_{21}}q_{11}^{x_{11}}.$$

Ограничения (6) тривиальны

$$x_{i1} \leqslant K_i, x_{i1} \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Поскольку функция $F(x_1, 1)$ монотонно возрастает по каждой компоненте вектора $x_1 = (x_{i1}, i = 1, 2, 3, 4)$, то максимум критерия достигается при

$$x_{i1} = K_i,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Этот результат можно использовать для тестирования алгоритма субградиентного подъема для решения задачи (6),(10), предложенного в разделе 3.

Из представления (18) вытекает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 для выпуклости критерия (10) по $y > 0$ достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\frac{1}{x_{ij}\ln q_{ij}^{-1}} + \frac{1}{y_j} \leqslant 1,\ j = 1, 2, ..., N. \tag{20}$$

Доказательство. Из условия (20) следует, что для любых $j = 1, 2, ..., N$ выполняются условия

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{i_l j}\ln q_{i_l j}^{-1}} + \frac{1}{y_j} \leqslant 1,\ k = 1, 2, ..., r.$$

Последнее в силу представления (18) и обеспечивает выпуклость критерия (10) по y. □

Заметим, что для выполнения (20) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$x_{ij} \geqslant 1 + \frac{1}{\ln q_{ij}^{-1}},\ y_j \geqslant 1 + \frac{1}{\ln q_{ij}^{-1}},\ i = 1, 2, ..., r,\ j = 1, 2, ..., N, \tag{21}$$

которые в отличие от (20) являются распадающимися, что существенно в игровой постановке задачи.

2. Субградиентный метод определения минимаксной стратегии нападения в игровой постановке задачи (6), (7), (10)

В начале предположим, что дополнительно выполняются усиленные ограничения (21), обеспечивающие вогнуто-выпуклость критерия (10) в силу Леммы 1 и 2. Рассмотрим задачу определения оптимальной минимаксной стратегии нападения и соответствующей верхней цены игры $\bar{v}$, совпадающей со значением игры v

$$f(y) = \max_{x \in X} F(x, y) = \max_{x \in X}(\sum_{j=1}^{N} B_j y_j (1 - \prod_{i=1}^{r} q_{ij}^{\frac{x_{ij}}{y_j}}) - \mu \Pi(x, y)) \to \min_{y \in Y}, \tag{22}$$

где X – множество допустимых x, удовлетворяющих ограничениям (6), (21), а Y – множество допустимых y, удовлетворяющих ограничениям (7), (21). Вычислим субдифференциал $\partial f(y)$ выпуклой функции $f(y)$ с использованием формулы для субдифференциала функции максимума из [8]

$$\partial f(y) = \operatorname{conv}\left\{\nabla_y F(x, y), x \in \tilde{X}(y)\right\}, \tag{23}$$

где обозначено

$$\tilde{X}(y) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} F(x, y).$$

Это позволяет решить минимаксную задачу (22) определения $\bar{v} = v$ методом субградиентного спуска. Введем функцию в ограничении (7)

$$R(y) = -M + \sum_{j=1}^{N} y_j. \tag{24}$$

Функция $R(y)$ будет линейной и ее градиент $\nabla R(y) = (1, 1, ..., 1) = e \in E^N$ является постоянным. Имея субградиенты функции $f(y)$, для решения задачи выпуклого программирования (22) можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[9], с.259) с программным шагом:

$$\begin{array}{l} y_j(s+1) = \left\{ \begin{array}{l} P_j(y_j(s) - h_s r_{sj}),\ R(y(s)) \leqslant 0, \\ P_j(y_j(s) - h_s \nu_{sj}),\ R(y(s)) > 0, \end{array} \right. \\ j = 1, ..., N; s = 1, 2, ..., \end{array} \tag{25}$$

где s – номер шага; $h_s = Ds^{-\alpha}$ – программный шаг метода, $0 < \alpha < 1$ – параметр, например $\alpha = 1/2$; $D = M$ – характерный размер множества Y допустимых решений задачи; $r_s = \nabla_y F(x(s), y(s))$, $x(s) \in \tilde{X}(y(s))$; $\nu_s = \nabla R(y) = e$ – соответствующие градиенты,

$$P(y_j) = \begin{cases} 0, \ y_j \leqslant y_j^0, \\ y_j, \ y_j^0 < y_j \end{cases} \tag{26}$$

– оператор проектирования на луч $[y_j^0, \infty)$. Здесь $y_j^0 = \max\limits_{i=1,\dots,r}(1 + \frac{1}{q_{ij}^{-1}})$ в соответствии с условием (21).

Очевидно, что множество Y допустимых решений задачи выпуклого программирования (22) имеет внутренние точки, тогда в силу теоремы 7 в работе ([9], с.259) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие (21). Тогда все предельные точки последовательности $y(s)$ в методе (25) являются решениями задачи (22).*

Примечание 1. Если отказаться от условия (21), то функция $f(y)$ будет вообще говоря невыпуклой, но она является слабо выпуклой (см. [10]) и (23) является ее квазидифференциалом. В этом случае согласно результатам [10] гарантируется только сходимость по значению последовательности $y(s)$ в модифицированном соответствующим образом методе (25) к множеству стационарных точек задачи (22), причем подпоследовательность точек последовательности, реализующих рекордное значение критерия на каждом шаге, притягивается к стационарному множеству задачи. Далее, говоря о сходимости по значению, всегда по умолчанию будем подразумевать и это свойство рекордной подпоследовательности последовательности, которую генерирует алгоритм с программным выбором шага.

Полученное в условиях Теоремы 1 приближение к решению можно использовать в качестве начального в условиях Замечания 1. Это и есть основной смысл введения дополнительного условия (21) с практической точки зрения.

3. Градиентный метод решения внутренней задачи (6), (10)

Рассмотрим внутреннюю задачу максимизации критерия (10) по x при ограничениях (6). Введем агрегированную функцию в ограничении (6)

$$G_i(x) = K_i - \sum_{j=1}^{N} x_{ij}, \ G(x) = \min_{i=1,2,..,r} G_i(x). \tag{27}$$

Функция $G(x)$ будет вогнутой и ее субдифференциал $\partial G(x)$ определяется по формуле субдифференциала функции минимума из [8]

$$\partial G(x) = \operatorname{conv}\left\{\nabla G_i(x), i \in \tilde{I}(x)\right\}, \tag{28}$$

где обозначено

$$\tilde{I}(x) = \operatorname{Arg}\max_{i=1,2,\dots,r} G_i(x).$$

Имея субградиенты агрегированной функции $G(x)$ в ограничении для решения задачи максимизации критерия (10) по x при ограничениях (6) в непрерывной постановке, можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[9], с.259) с программным шагом:

$$\begin{array}{l} x_{ij}(s+1) = \left\{ \begin{array}{l} P(x_{ij}(s) + h_s r_{ij}^s),\ G(x(s)) \geqslant 0, \\ P(x_{ij}(s) + h_s \nu_{ij}^s),\ G(x(s)) < 0, \end{array} \right. \\ i = 1,...,r,\ j = 1,2,...,N,\ s = 1,2,..., \end{array} \tag{29}$$

где s – номер шага; h_s – программный шаг метода, выбираемый аналогично предыдущему алгоритму, $r^s = \nabla_x F(x(s), y)$ – градиент функции $F(x, y)$ по x в точке $(x(s), y)$, $\nu^s \in \partial G(x(s))$ – любой субградиент функции $G(x)$ в точке $x(s)$,

$$P(x_{ij}) = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ x_{ij} < 0, \\ x_{ij},\ x_{ij} \geqslant 0 \end{array} \right. \tag{30}$$

– оператор проектирования на луч $[0, \infty)$.

Очевидно, что множество (6) допустимых решений задачи максимизации критерия (8) имеет внутренние точки, тогда в силу Теоремы 7 из ([9], с.259) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Все предельные точки последовательности $x(s)$ в методе (29) являются решениями задачи максимизации критерия (10) по x при ограничениях (6).*

Пример 2. В условиях Примера 1 протестировать алгоритм (29).
Решение. В условиях примера 1 метод (29) превращается в метод проекции градиента

$$\begin{array}{l} x_1(s+1) = P_\Pi[x_1(s)] + \frac{1}{\sqrt{s}} \nabla F[x_1(s)] / \left\| \nabla F[x_1(s)] \right\| \\ s = 1,2,... \end{array}$$

Здесь $\left\| \nabla F[x_1(s)] \right\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4} (F_{x_{i1}}[x_1(s)])^2}$ — норма вектора $\nabla F[x_1(s)]$, введенная для ускорения сходимости, $x_1(1) = (0,5;...;0,5)$ — начальный вектор, удовлетворяющий ограничениям (6), а $P_\Pi[x(s)]$ — оператор проектирования на параллелепипед П, заданный неравенствами (6). Или в координатной записи:

$$\begin{array}{l} x_{i1}(s+1) = \left\{ \begin{array}{l} x_{i1}(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} F_{x_{i1}}[x_1(s)] / \left\| \nabla F[x_1(s)] \right\|, \\ 0 \leqslant x_{i1}(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} F_{x_{i1}}[x_1(s)] / \left\| \nabla F[x_1(s)] \right\| \leqslant K_i, \\ 0, \quad x_{i1}(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} F_{x_{i1}}[x_1(s)] / \left\| \nabla F[x_1(s)] \right\| < 0, \\ K_i, \overline{x}_{i1}(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} F_{x_i 1}[x_1(s)] / \left\| \nabla F[x_1(s)] \right\| > K_i \end{array} \right. \\ i = 1,...,4, \\ s = 1,2,... \end{array}$$

Здесь

$$\begin{array}{l} F_{x_{11}}(x) = -3 q_1^{x_{11}} q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} \ln q_1, \\ F_{x_{21}}(x) = (-4 q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} - 3 q_1^{x_{11}} q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}}) \ln q_2, \\ F_{x_{31}}(x) = (-0,67 q_3^{x_{31}} - 4 q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} - 4 q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} - 3 q_1^{x_{11}} q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}}) \ln q_3, \\ F_{x_{41}}(x) = (-4 q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} - 4 q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}} - 3 q_1^{x_{11}} q_2^{x_{21}} q_3^{x_{31}} q_4^{x_{41}}) \ln q_4. \end{array}$$

Критерием остановки процесса будет стабилизация последовательности значений рекорда критерия за s шагов

$$G(s) = \max_{l=1,\dots,s} F[x_1(l)],$$

которую можно обнаружить, построив соответствующий график.

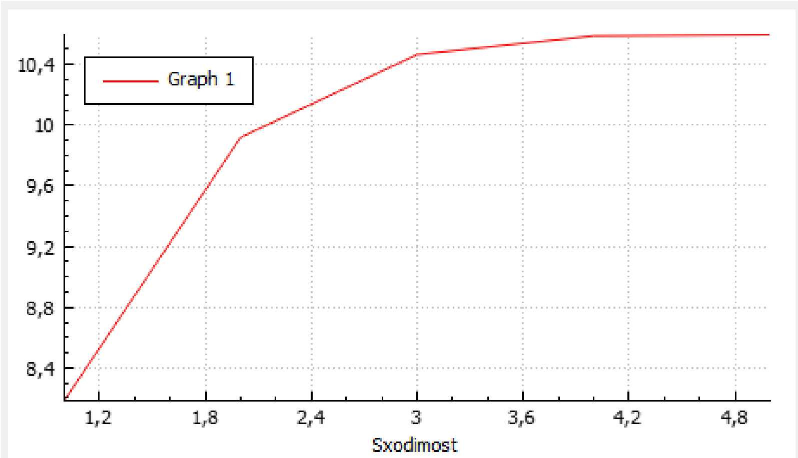

Рис. 1: График функции $G(s)$

Видно, что метод сходится практически за $s = 4$ шага с высокой точностью и далее только уточняет максимальное значение критерия.

4. Субградиентный метод определения максиминной стратегии обороны в игровой постановке задачи (6), (7), (10)

В начале предположим, как и в предыдущем пункте, что дополнительно выполняются усиленные ограничения (21), обеспечивающие вогнуто-выпуклость критерия (10), а затем укажем, что будет со сходимостью построенного метода в случае, когда условие (21) не выполняется.

Рассмотрим задачу определения оптимальной максиминной стратегии нападения и соответствующей нижней цены игры $\underline{v}$, совпадающей со значением игры v

$$g(x) = \min_{y \in Y}(\sum_{j=1}^{N} B_j y_j (1 - \prod_{i=1}^{r} q_{ij}^{\frac{x_{ij}}{y_j}}) - \mu \Pi(x, y)) \to \max_{x \in X}. \tag{31}$$

Вычислим субдифференциал $\partial g(x)$ вогнутой функции $g(x)$ с использованием формулы для субдифференциала функции минимума из [8]

$$\partial g(x) = \operatorname{conv}\left\{\nabla_x F(x, y), y \in \tilde{Y}(x)\right\}, \tag{32}$$

где обозначено

$$\tilde{Y}(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} F(x, y).$$

Это позволяет решить минимаксную задачу (31) определения $\underline{v} = v$ методом субградиентного подъема. Воспользуемся ранее введенной агрегированной функцией (27) в ограничении (6). Имея субградиенты (32) функции $g(x)$ для решения задачи вогнутого программирования (31), можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[9], с.259) с программным шагом:

$$x_{ij}(s+1) = \begin{cases} P_{ij}(x_{ij}(s) + h_s r_{ij}^s), & G(x(s)) \geqslant 0, \\ P_{ij}(x_{ij}(s) + h_s \nu_{ij}^s), & G(x(s)) < 0, \end{cases} \quad (33)$$
$$i = 1, 2, ..., r; \; j = 1, ..., N; \; s = 1, 2, ...,$$

где s – номер шага; h_s – программный шаг метода, $r^s \in \partial g(x(s))$; $\nu^s \in \partial W(x(s))$ – соответствующие субградиенты,

$$P_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \leqslant x_{ij}^0, \\ x_{ij}, & x_{ij}^0 < x_{ij} \end{cases}$$

– оператор проектирования на луч $[x_{ij}^0, \infty)$. Здесь $x_{ij}^0 = 1 + \frac{1}{q_{ij}^{-1}}$ в соответствии с условием (21).

Очевидно, что множество X допустимых решений задачи выпуклого программирования (31) имеет внутренние точки, тогда в силу Теоремы 7 из работы ([9], с.259) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие (21). Тогда все предельные точки последовательности $x(s)$ в методе (33) являются решениями задачи (31).*

Примечание 2. Если отказаться от условия (21), то функция $g(x)$ остается вогнутой (см. [8]) и (28) является ее субдифференциалом и теорема 3 будет справедливой. При этом внутренняя задача не является выпуклой, что затрудняет ее решение методом квазиградиентов в силу многоэкстремальности.

5. Градиентный метод решения внутренней задачи (6), (7), (10)

Рассмотрим внутреннюю задачу максимизации критерия (10) по y при ограничениях (7). Как обычно, предположим вначале, что дополнительно выполняются усиленные ограничения (21). Воспользуемся ранее введенной в (24) агрегированной функцией $R(y)$ в ограничении (7). Функция $R(y)$ будет линейной и ее градиент $\nabla R(y)$ является постоянным. Имея субградиенты агрегированной функции $R(y)$ в ограничении для решения задачи максимизации критерия (10) по y при ограничениях (7) в непрерывной постановке, можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[9], с.259) с программным шагом:

$$y_j(s+1) = \begin{cases} P_j(y_j(s) - h_s r_{sj}), & R(y(s)) \leqslant 0, \\ P_j(y_j(s) - h_s \nu_{sj}), & R(y(s)) > 0, \end{cases} \quad (34)$$
$$j = 1, ..., N; \; s = 1, 2, ...,$$

где s – номер шага; h_s – программный шаг метода, $r^s = \nabla_y F(x, y(s))$ – градиент функции $F(x, y)$ по x в точке $(x, y(s))$, $\nu^s = \nabla R(y(s))$ – любой градиент функции

$R(y)$ в точке $y(s)$,$P_j(y_j)$ – ранее введенный в (26) оператор проектирования на луч $[y_j^0, \infty)$. Здесь $y_j^0 = \max\limits_{i=1,\dots,r}(1 + \frac{1}{q_{ij}^{-1}})$ в соответствии с условием (21).

Очевидно, что множество Y допустимых решений задачи максимизации критерия (10) по y при ограничениях (7), имеет внутренние точки, тогда в силу Теоремы 7 из работы ([9], с.259) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Все предельные точки последовательности $y(s)$ в методе (34) являются решениями задачи максимизации критерия (0.10) по y при ограничениях (7), (6).*

Примечание 3. Если отказаться от условия (21), то функция $F(x, y)$, вообще говоря, не выпукла по y. В этом случае, согласно результатам [10], гарантируется только сходимость по значению последовательности $y(s)$ в модифицированном соответствующим образом методе (34) к множеству стационарных точек задачи максимизации критерия (10) по y при ограничениях (7).

6. Агрегированная постановка игровой задачи

Предположим, что важности средств обороны одинаковы $C_i = 1$, и рассмотрим агрегированную постановку задачи распределения разнотипных средств обороны по критерию разности потерь, следуя принципам построения таких моделей, разработанных в работе [11] и основанных на показательном законе поражения и пуассоновском распределении числа выстрелов,

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{N} B_j y_j (1 - e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} U_{ij} x_{ij}/y_j}) - \mu \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{r} x_{ij}(1 - e^{-V_{ij} y_{ij}/x_{ij}}), \qquad (35)$$

где $U_{ij} = \frac{p_{ij}}{\omega_{ij}} n_{ij} Q_{ij}$ – боевой потенциал одной единицы обороны i-го типа означающий математическое ожидание количества пораженных единиц нападения нападения i-го типа, p_{ij} – вероятность попадания за один выстрел (обобщенный выстрел), ω_{ij} – среднее число попаданий до поражения цели, n_{ij} – среднее количество выстрелов, которое может произвести одна единица обороны i-го типа против одной единицы нападения j-го типа, Q_{ij} – вероятность непоражения одной единицы обороны ответным огнем одной единицы нападения.

Аналогично определяется оборонительный потенциал V_{ij} одной единицы нападения j-го типа, означающий математическое ожидание количества пораженных единиц обороны i-го типа. Величины $y_{ij} > 0$ означают количество средств нападения j-го типа, назначенных действовать по средствам обороны i-го типа, удовлетворяющее ограничениям

$$\sum_{i=1}^{r} y_{ij} \leqslant y_j, \; i = 1, 2, ..., r, \; j = 1, 2, ..., N. \qquad (36)$$

Предположим, что величины y_j фиксированы, а y означает набор y_{ij}. Совместные условия вогнуто-выпуклости критерия (35) по x, y будут иметь вид

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r} U_{ij} x_{ij}} + \frac{1}{y_j} \leqslant 1, \; \frac{1}{V_{ij} y_{ij}} + \frac{1}{x_{ij}} \leqslant 1, \; i = 1, 2, ..., r, \; j = 1, 2, ..., N. \qquad (37)$$

Для выполнения условий (37) достаточно, чтобы выполнялись условия с распадающимися переменными

$$x_{ij} \geqslant 1+\frac{1}{U_{ij}},\ y_j \geqslant 1+\frac{1}{U_{ij}},\ x_{ij} \geqslant 1+\frac{1}{V_{ij}},\ y_{ij} \geqslant 1+\frac{1}{V_{ij}},\ i=1,2,...,r,\ j=1,2,...,N.$$

Эти условия можно записать в более компактном виде

$$x_{ij} \geqslant 1+\max(\frac{1}{U_{ij}},\ \frac{1}{V_{ij}}),\ y_{ij} \geqslant 1+\max(\frac{1}{U_{ij}},\ \frac{1}{V_{ij}}),\ i=1,2,...,r,\ j=1,2,...,N. \quad (38)$$

При этом предполагается, что параметры y_j удовлетворяют условию

$$y_j \geqslant 1+\frac{1}{U_{ij}},\ i=1,2,...,r,\ j=1,2,...,N.$$

Непрерывная игра (6), (35), (36), (38) будет вогнуто-выпуклой и может быть исследована по той же схеме, что и игра (6), (7), (10). Предполагается, что соответствующие множества X и Y допустимых стратегий игроков непусты.

Заключение

В статье рассмотрена выпукло-вогнутая задача целераспределения неоднородных средств обороны по критерию разности потерь сторон. Показано, что при определенных значениях параметров задача может быть многоэкстремальной с точки зрения обороны и служить тестом для методов глобальной оптимизации. Это является следствием того, что критерий представляет собой разность вогнутых функций и может не быть вогнутым.

Список литературы

[1] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[2] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Мир, 1971.

[3] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1974.

[4] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1983.

[5] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[6] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

[7] Краснощеков П.С., Петров А.А. Принцип построения моделей. М.: Фазис, 2000.

[8] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[9] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[10] Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.

[11] Волгин Н.С. Исследование операций. Санкт-Петербург: Изд-во ВМА им. Н.Г. Кузнецова, 1999.

Образец цитирования

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. К задаче распределения разнотипных средств обороны по критерию разности потерь // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 26–41. https://doi.org/10.26456/vtpmk497

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем НПО «РусБИТех».

Россия, 170001, г. Тверь, пр. Калинина, д. 17, НПО «РусБИТех». E-mail: pere501@yandex.ru

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ, факультет ВМК. E-mail: kadry@cs.msu.ru

3. **Лесик Александра Ильинична**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: lesik56@mail.ru

TO THE PROBLEM OF DISTRIBUTION OF DIFFERENT TYPES OF DEFENSIVE MEANS BY THE CRITERION OF THE DIFFERENCE IN LOSSES

Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich
Senior Researcher in the Design Department of Complex Systems Modeling Center, NPO "RusBITTech"
Russia, 170001, Tver, 17 Kalinina str., NPO "RusBITTech".
E-mail: pere501@yandex.ru

Reshetov Valerii Yurievich
Associate Professor in the Department of Operations Research, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, MSU, CMC.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

Lesik Aleksandra Ilyinichna
Associate Professor in the Department of Mathematical Statistics and Systems Analysis, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: lesik56@mail.ru

Received 23.04.2018, revised 14.05.2019.

We study the problem of optimal distribution of different types of means of defense according to different types of means of attack on distant approaches to the defended objects, when precise information on the target distribution of the means of attack is missing. As a criterion, the difference between the sides' losses is used, the problem of its optimization in a continuous statement is studied. An explicit expression is obtained for the defense loss function, based on the criteria for ordering of defense attacks by E.A.Berzin, which leads in the general case to the heterogeneity of the parties 'resources to a concave mathematical programming problem that can be solved by a gradient lift method.

Keywords: problem of resource's distribution by the criterion of the difference in the parties' losses, heterogeneity of parties' resources, ordering criterion for sequencing the attacks, the expression for the function of the defense losses based on the ordering criterion, continuous formulation of the problem, optimal defense strategy, numerical optimization method.

Citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Lesik A.I., "To the problem of distribution of different types of defensive means by the criterion of the difference in losses", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 2, 26–41 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk497

References

[1] Karlin S., *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike [Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (in Russian).

[2] Germejer Yu.B., *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii [Introduction to the Theory of Operations Research]*, Mir Publ., Moscow, 1971 (in Russian).

[3] Berzin E.A., *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Elementy Sinteza Sistem [Optimal Resource Allocation and Elements of System Synthesis]*, ed. E.V. Zolotov, Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1974 (in Russian).

[4] Berzin E.A., *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Teoriya Igr [Optimal Resource Allocation and Game Theory]*, ed. E.V. Zolotov, Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

[5] Vasin A.A., Morozov V.V., *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki [Game Theory and Models of Mathematical Economics]*, MAX Press Publ., Moscow, 2005 (in Russian).

[6] Vasin A.A., Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V., *Issledovanie Operatsii*, Publishing Center "Academy", Moscow, 2008 (in Russian).

[7] Krasnoshchekov P.S., Petrov A.A., *Printsip Postroeniya Modelej [The principle of constructing models]*, Phazis Publ., Moscow, 2000 (in Russian).

[8] Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V., *Kurs Metodov Optimizatsii [Course of Optimization Methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian).

[9] Polyak B.T., *Vvedenie v Optimizatsiyu [Introduction to Optimization]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

[10] Mikhalevich V.S., Gupal A.M., Norkin V.I., *Metody Nevypukloj Optimizatsii [Methods of Nonconvex Optimization]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian).

[11] Volgin N.S., *Issledovanie Operatsij [Operations Research]*, Naval Academy named after N.G. Kuznetsova, SPb., 1999 (in Russian).