МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Мегралиев Я.Т., Ализаде У.С.
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан

Поступила в редакцию 29.01.2019, после переработки 30.05.2019.

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной в определенном смысле задаче. С помощью метода Фурье эквивалентная задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказываются существование и единственность решения системы интегральных уравнений, которое также является единственным решением эквивалентной задачи. Пользуясь эквивалентностью, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения третьего порядка, метод Фурье, классическое решение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 88–106.
https://doi.org/10.26456/vtpmk534

Введение

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2, 3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М. Денисова [5].

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью. Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появляются при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [6], распространением тепла [7, 8], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [9], вопросами демографии и математической биологии.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений обратной краевой задачи для уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

В прямоугольнике $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, удовлетворяющих уравнению [10]

$$u_{ttt}(x,t) - u_{txx}(x,t) + u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u_t(x,0) = \varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x),\ \ (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

периодическому условию

$$u(0,t) = u(1,t) \ \ (0 \le t \le T), \tag{3}$$

интегральному условию

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = 0 \ \ (0 \le t \le T) \tag{4}$$

и условию переопределения

$$u(x_0,t) = h(t) \ \ (0 \le t \le T), \tag{5}$$

где $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$,$x_0 \in (0,1)$ — заданные числа, $f(x,t)$, $\varphi_i(x)(i = \overline{0,2})$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Определение 1. *Классическим решением задачи* (1)–(5) *назовем пару функций* $\{u(x,t), a(t)\}$, *обладающих следующими свойствами:*

1. *функция* $u(x,t)$ *и ее производные* $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$,$u_{ttt}(x,t)$,$u_x(x,t)$,$u_{xx}(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$,$u_{txx}(x,t)$ *непрерывны в* D_T*;*
2. *функция* $a(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$*;*
3. *уравнения* (1) *и условия* (2)–(5) *удовлетворяются в обычном смысле.*

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)\,dx = 0$ $(0 \le t \le T)$, $\varphi_0(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_0'(0) = \varphi_0'(1)$, $\varphi_i(x) \in C[0,1]$ $(i = \overline{1,2})$, $h(t) \in C^3[0,T]$, $h(t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx = 0 \ \ (i = \overline{0,2}), \tag{6}$$

$$\varphi_0(x_0) = h(0), \quad \varphi_1(x_0) = h'(0), \ \ \varphi_2(x_0) = h''(0). \tag{7}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(5) *эквивалентна задаче определения функций* $u(x,t)$ *и* $a(t)$, *обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи* (1)–(5), *из соотношений* (1)–(3),

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \ \ (0 \le t \le T), \tag{8}$$

$$h'''(t) + h''(t) - u_{txx}(x_0,t) - \alpha u_{xx}(x_0,t) = a(t)h(t) + f(x_0,t) \ \ (0 \le t \le T). \tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)–(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, получим:

$$\frac{d^3}{dt^3}\int_0^1 u(x,t)dx - u_{tx}(1,t) + u_{tx}(0,t) + \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx -$$

$$-\alpha(u_x(1,t) - u_x(0,t)) = a(t)\int_0^1 u(x,t)dx + \int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0 \le t \le T). \tag{10}$$

Учитывая, что выполняются условия теоремы $\int_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$ и $\varphi_0'(1) = 0$, с учетом (4) находим:

$$\begin{cases} u_{tx}(1,t) - u_{tx}(0,t) + \alpha(u_x(1,t) - u_x(0,t)) = 0 \ (0 \le t \le T), \\ u_x(1,0) - u_x(0,0) = \varphi_0'(1) - \varphi_0'(0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда легко приходим к выполнению (8).

Далее, считая $h(t) \in C^3[0,T]$ и дифференцируя три раза (5), получаем:

$$u_t(x_0,t) = h'(t), \ u_{tt}(x_0,t) = h''(t), \ u_{ttt}(x_0,t) = h'''(t) \ (0 \le t \le T). \tag{11}$$

Подставляя $x = x_0$ в уравнение (1), находим:

$$u_{ttt}(x_0,t) - u_{txx}(x_0,t) + u_{tt}(x_0,t) - \alpha u_{xx}(x_0,t) =$$

$$= a(t)u(x_0,t) + f(x_0,t) \ (0 \le t \le T). \tag{12}$$

А отсюда с учетом (5) и (11) следует выполнение (9).

Пусть теперь $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (8), (9). Тогда из (8) и (10) получаем:

$$\frac{d^3}{dt^3}\int\limits_0^1 u(x,t)dx + \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 u(x,t)dx = a(t)\int\limits_0^1 u(x,t)dx \quad (0 \le t \le T). \tag{13}$$

В силу (2) и (6) очевидно, что

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \varphi_0(x)dx = 0, \\ \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \varphi_1(x)dx = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \varphi_2(x)dx = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Из (13) с учетом (14) легко приходим к выполнению (4).

Далее, из (9) и (12), получаем:

$$\frac{d^3}{dt^3}(u(x_0,t)-h(t)) + \frac{d^2}{dt^2}(u(x_0,t)-h(t)) = a(t)(u(x_0,t)-h(t)) \ (0 \le t \le T). \tag{15}$$

Так как $\varphi_0(x_0) = h(0), \varphi_1(x_0) = h'(0), \varphi_2(x_0) = h''(0)$, имеем:

$$\begin{cases} u(x_0,0) - h(0) = \varphi_0(x_0) - h(0) = 0, \\ u_t(x_0,0) - h'(0) = \varphi_1(x_0) - h'(0) = 0, \\ u_{tt}(x_0,0) - h''(0) = \varphi_2(x_0) - h''(0) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Из (15) и (16) заключаем, что выполняется условие (5). Теорема 1 доказана. □

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Известно [11], что система

$$1, \ \cos\lambda_1 x, \ \sin\lambda_1 x, ..., \ \cos\lambda_k x, \ \sin\lambda_k x, ... \tag{17}$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \ (k = 1, 2, ...)$.

Так как система (17) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (8), (9) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \tag{18}$$

где

$$u_{10}(t) = \int\limits_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t)=2\int\limits_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k xdx,\ u_{2k}(t)=2\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\ (k=1,2,...).$$

Применяя формальную схему метода Фурье для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t)(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)(k=1,2,...)$ функции $u(x,t)$ из (1) и (2), получаем:

$$u'''_{10}(t)+u''_{10}(t)=F_{10}(t;u,a,b)\quad(0\le t\le T), \tag{19}$$

$$u'''_{ik}(t)+u''_{ik}(t)+\lambda_k^2u'_{ik}(t)+\alpha\lambda_k^2u_{ik}(t)=F_{ik}(t;u,a)\quad(i=1,2;\ k=1,2,...), \tag{20}$$

$$u_{10}(0)=\varphi_{0,10},\ u'_{10}(0)=\varphi_{1,10},\ u''_{10}(0)=\varphi_{2,10}, \tag{21}$$

$$u_{ik}(0)=\varphi_{0,ik},\ u'_{ik}(0)=\varphi_{1,ik},\ u''_{ik}(0)=\varphi_{2,ik}\quad(i=1,2;\ k=1,2,...), \tag{22}$$

где

$$F_{1k}(t)=a(t)u_{1k}(t)+f_{1k}(t)\ (k=0,1,...),\ f_{10}(t)=\int\limits_0^1 f(x,t)dx,$$

$$f_{1k}(t)=2\int\limits_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$\varphi_{0,10}=\int\limits_0^1\varphi_0(x)dx,\ \varphi_{1,10}=\int\limits_0^1\varphi_1(x)dx,\ \varphi_{2,10}=\int\limits_0^1\varphi_2(x)dx,$$

$$\varphi_{0,1k}=2\int\limits_0^1\varphi_0(x)\cos\lambda_k xdx,\varphi_{1,1k}=2\int\limits_0^1\varphi_1(x)\cos\lambda_k xdx,\ (k=1,2,...),$$

$$\varphi_{2,1k}=2\int\limits_0^1\varphi_2(x)\cos\lambda_k xdx,\ F_{2k}(t)=a(t)u_{2k}(t)+f_{2k}(t)\ (k=1,2,...),$$

$$f_{2k}(t)=2\int\limits_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k xdx,\ \ \varphi_{0,2k}=2\int\limits_0^1\varphi_0(x)\sin\lambda_k xdx,(k=1,2,...),$$

$$\varphi_{1,2k}=2\int\limits_0^1\varphi_1(x)\sin\lambda_k xdx,\ \varphi_{2,2k}=2\int\limits_0^1\varphi_2(x)\sin\lambda_k xdx,\ (k=1,2,...).$$

Решая задачу (19)–(22), находим:

$$u_{10}(t)=\varphi_{0,10}+t\varphi_{1,10}+(t-1+e^{-t})\varphi_{2,10}+\int\limits_0^t F_{10}(\tau;u,a)(e^{-(t-\tau)}+t-\tau-1)d\tau, \tag{23}$$

$$u_{ik}(t) = \frac{1}{b_k}\left\{\left[\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t} + \alpha_k e^{\gamma_k t}\left[(\alpha_k - 2\gamma_k)\cos\beta_k t + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,ik} +$$

$$+\left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t}\left[2\gamma_k\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,ik} +$$

$$+\left[e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}(\gamma_k - \alpha_k)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,ik} +$$

$$+\int\limits_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\left[e^{\alpha_k(t-\tau)} + \right.$$

$$\left. + e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau) - \cos\beta_k(t-\tau)\right]\right]d\tau\Bigg\}\ \ (i=1,2;\ k=1,2,...), \quad (24)$$

где

$$\alpha_k = \alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3},\ \beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_{1k} - \beta_{1k}\right),$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\alpha_{1k} + \beta_{1k}\right),\ b_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - 2\alpha_k\gamma_k,$$

причем

$$\alpha_{1k} = \left\{-\tfrac{1}{2}\left(\left(\alpha - \tfrac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \tfrac{2}{27}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{1}{4}\left(\left(\alpha - \tfrac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \tfrac{2}{27}\right)^2 + \tfrac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \tfrac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (25)$$

$$\beta_{1k} = -\left\{\tfrac{1}{2}\left(\left(\alpha - \tfrac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \tfrac{2}{27}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{1}{4}\left(\left(\alpha - \tfrac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \tfrac{2}{27}\right)^2 + \tfrac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \tfrac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}. \quad (26)$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ $(k = 0,1,...)$, $u_{2k}(t)$ $(k = 1,2,...)$ в (18) для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (8), (9), получаем:

$$u(x,t) = \varphi_{0,10} + t\varphi_{1,10} + (t - 1 + e^{-t})\varphi_{2,10} + \int\limits_0^t F_0(\tau;u,a)(e^{-(t-\tau)} + t - \tau - 1)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_k}\left\{\left[\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t} + \alpha_k e^{\gamma_k t}\left[(\alpha_k - 2\gamma_k)\cos\beta_k t + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,1k} +$$

$$+\left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t}\left[2\gamma_k\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,1k} +$$

$$+\left[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,1k}+$$

$$+\int\limits_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\left[e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k\left(t-\tau\right)-\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right]\right]d\tau\right\}\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_k}\left\{\left[\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t}+\alpha_k e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha_k-2\gamma_k\right)\cos\beta_k t+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,2k}+$$

$$+\left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[2\gamma_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,2k}+$$

$$+\left[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,2k}+$$

$$+\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left[e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k\left(t-\tau\right)-\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right]\right]d\tau\right\}\right\}\sin\lambda_k x. \qquad (27)$$

Теперь из (9) с учетом (18) имеем:

$$a\left(t\right)=\left[\mathrm{h(t)}\right]^{-1}\left[h'''\left(t\right)+h''\left(t\right)-f(0,t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(\left(u_{1k}'(t)+\alpha u_{1k}(t)\right)\cos\lambda_k x_0+\left(u_{2k}'(t)+\alpha u_{2k}(t)\right)\sin\lambda_k x_0\right)\right]. \qquad (28)$$

Дифференцируя (24) два раза, получим:

$$u_{ik}'(t)=\frac{1}{b_k}\left\{\left[\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t}+\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,ik}+\left[-2\alpha_k\gamma_k e^{\alpha_k t}+\right.$$

$$\left.+\ e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,ik}+$$

$$+\left[\alpha_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\alpha_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,ik}+$$

$$+\int\limits_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\left[\alpha_k e^{\alpha_k(t-\tau)}+\ e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)+\beta_k\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)-\right.\right.$$

$$-\alpha_k \cos\beta_k (t-\tau)]]\, d\tau\} \qquad (i=1,2;\ k=1,2,...), \tag{29}$$

$$u''_{ik}(t) = \frac{1}{b_k}\left\{\left[\alpha_k^2\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t} + \alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\gamma_k t}\left[-\alpha_k\cos\beta_k t+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,ik} + \left[-2\alpha_k^2\gamma_k e^{\alpha_k t}+\right.$$

$$+\,e^{\gamma_k t}\left[2\alpha_k^2\gamma_k\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2\gamma_k^2-\alpha_k^2\beta_k^2-2\beta_k^2\gamma_k^2-\gamma_k^4-\beta_k^4\right)\sin\beta_k t\right]\Bigg]\varphi_{1,ik}+$$

$$+\left[\alpha_k^2 e^{\alpha_k t}+ + e^{\gamma_k t}\left[\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-2\alpha_k\gamma_k\right)\cos\beta_k t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k\beta_k^2+\gamma_k^3-\alpha_k\gamma_k^2+\alpha_k\beta_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,ik}+$$

$$+\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\left[\alpha_k^2 e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k\beta_k^2+\gamma_k^3-\alpha_k\gamma_k^2+\alpha_k\beta_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\gamma_k^2+\beta_k^2-2\alpha_k\gamma_k\right)\cos\beta_k t\right]\right]d\tau\right\} \qquad (i=1,2;\ k=1,2,...). \tag{30}$$

Далее, из (24) и (29) находим:

$$u'_{ik}(t)+\alpha u_{ik}(t) = \frac{1}{b_k}\left\{\left[(\alpha+\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t}+\right.\right.$$

$$+\alpha_k e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,ik}+$$

$$+\left[-2\left(\alpha+\alpha_k\right)\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[\left(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,ik}+$$

$$+\left[\left(\alpha+\alpha_k\right)e^{\alpha_k t}\ +e^{\gamma_k t}\left[-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,ik}+$$

$$+\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\left[(\alpha_k+\alpha)e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\right)\sin\beta_k(t-\tau)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k(t-\tau)\right]\right]d\tau\right\} \qquad (i=1,2;\ k=1,2,...). \tag{31}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (8), (9), подставим выражение (31) в (28):

$$
\begin{gathered}
a(t)=[\mathrm{h(t)}]^{-1}\left[h'''(t)+h''(t)-f(0,t)+\right.\\
+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{b_k}\left\{\left[(\alpha+\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t}+\right.\right.\\
+\alpha_k e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left((\gamma_k-\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,1k}+\\
+\left[-2(\alpha+\alpha_k)\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[\left(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,1k}+\\
+\left[(\alpha+\alpha_k)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-(\alpha_k+\alpha)\cos\beta_k t+\right.\right.\\
\left.\left.+\ \frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha(\gamma_k-\alpha_k)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,1k}+\\
+\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\left[(\alpha_k+\alpha)e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.\\
+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha(\gamma_k-\alpha_k)\right)\sin\beta_k(t-\tau)-\right.\\
\left.\left.\left.-(\alpha_k+\alpha)\cos\beta_k(t-\tau)\right]\right]d\tau\right\}\cos\lambda_k x_0+\\
+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{b_k}\left\{\left[(\alpha+\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\ e^{\alpha_k t}+\right.\right.\\
+\alpha_k e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left((\gamma_k-\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{0,2k}+\\
+\left[-2(\alpha+\alpha_k)\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[\left(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\right.\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1,2k}+\\
+\left[(\alpha+\alpha_k)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-(\alpha_k+\alpha)\cos\beta_k t+\right.\right.\\
\left.\left.+\ \frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha(\gamma_k-\alpha_k)\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2,2k}+\\
+\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left[(\alpha_k+\alpha)e^{\alpha_k(t-\tau)}+\right.\\
+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha(\gamma_k-\alpha_k)\right)\sin\beta_k(t-\tau)-\right.
\end{gathered}
$$

$$-(\alpha_k+\alpha)\cos\beta_k(t-\tau)]]\,d\tau\}\,\sin\lambda_k x_0\,]\,. \tag{32}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (8), (9) свелось к решению системы (27), (32) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса существования и единственности классического решения задачи (1)–(3), (8), (9) важную роль играет следующая

Лемма 1. *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *— любое решение задачи* (1)–(3), (8), (9), *то функции*

$$u_{10}(t)=\int\limits_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t)=2\int\limits_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx,\ \ u_{2k}(t)=2\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *счетной системе* (23) *и* (24).

Из Леммы 1 следует, что имеет место следующее

Следствие 1. *Пусть система* (27), (32) *имеет единственное решение. Тогда задача* (1)–(3), (8), (9) *не может иметь более одного решения, т.е. если задача* (1)–(3), (8), (9) *имеет решение, то оно единственно.*

С целью исследования задачи (1)–(3), (8), (9) рассмотрим следующее пространство. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [12] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x\quad(\lambda_k=2\pi k),$$

рассматриваемых на D_T, для которых все функции $u_{1k}(t)\in C[0,T](k=0,1,...)$, $u_{2k}(t)\in C[0,T](k=1,2,...)$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_{10}(t)\|_{C\{0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J_(u)$.

Через E_T^3 обозначим пространство вектор–функций $\{u(x,t),a(t)\}$ таких, что $u(x,t)\in B_{2,T}^3$, $a(t)\in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E_T^3}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\,.$$

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t)\cos\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t)\sin\lambda_k x,$$
$$\Phi_2(u,a) = \tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ $(i=1,2)$ и $\tilde{a}(t)$ равны, соответственно, правым частям (23), (24) и (32).

Теперь введем обозначения

$$\alpha_{2k} = -\frac{1}{2}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right) +$$
$$+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right]^2 + \frac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3}\right)^3}, \tag{33}$$
$$\beta_{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right) +$$
$$+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right]^2 + \frac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3}\right)^3}. \tag{34}$$

Тогда соотношения (25) и (26), соответственно, примут вид:

$$\alpha_{1k} = \sqrt[3]{\alpha_{2k}}, \quad \beta_{1k} = -\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Отсюда с учетом (33) и (34) получаем:

$$|\alpha_{1k} + \beta_{1k}| = \left|\sqrt[3]{\alpha_{2k}} - \sqrt[3]{\beta_{2k}}\right| = \left|\frac{\alpha_{2k} - \beta_{2k}}{\sqrt[3]{\alpha_{2k}^2} + \sqrt[3]{\alpha_{2k}\beta_{2k}} + \sqrt[3]{\beta_{2k}^2}}\right| \le$$
$$\le \frac{\left|\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right|}{\frac{1}{3}\left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3}\right)} \le \frac{\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\lambda_k^2} + \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\lambda_k^2} \le \frac{\alpha + \frac{1}{3}}{\frac{9}{2}} + \frac{\frac{2}{27}}{\frac{9}{2}} = \frac{9\alpha}{2} + \frac{11}{6}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\alpha_k| \le \left|\alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3}\right| \le \frac{9\alpha}{2} + \frac{13}{6} \equiv \varepsilon_1,$$
$$|\gamma_k| = \left|-\frac{1}{3} - \frac{\alpha_{1k} + \beta_{1k}}{2}\right| \le \frac{9\alpha}{4} + \frac{5}{4} \equiv \varepsilon_2,$$
$$\varepsilon_3\lambda_k \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\inf_k\left(\frac{\sqrt[3]{\beta_{2k}}}{\lambda_k}\right)\lambda_k < \beta_k <$$
$$< \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{11}{27}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{11}{27}\right)^2 + \frac{1}{27}}}\,\lambda_k \equiv \varepsilon_4\lambda_k,$$
$$b_k = (\alpha_k - \gamma_k)^2 + \beta_k^2 > \beta_k^2 > \varepsilon_3^2\lambda_k^2.$$

Учитывая эти соотношения, находим

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_{0,10}| + T\,|\varphi_{1,10}| + (T+2)\,|\varphi_{2,10}| +$$

$$+ (T+2)\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T |f_{10}(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + (T+2)T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}\,, \qquad (35)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \rho_0\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{0,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\varphi_{1,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_2\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\,|\varphi_{2,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_2\,(T)\,\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\,|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \rho_2\,(T)\,T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)\ (i=1,2), \qquad (36)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Big\{\|h'''\,(t) + h''\,(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{2}\left[\rho_3\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{0,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_4\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{1,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$+\rho_5\,(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\varphi_{2,ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_5\,(T)\,\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left.\left. + \rho_5\,(T)\ T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}, \qquad (37)$$

где

$$\rho_0\,(T) = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\left\{\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)e^{\varepsilon_1 T} + \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_1\,(T) = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_2\,(T) = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_3\,(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{(\alpha+\varepsilon_1)\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1\left(\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2 + \right.\right.\right.$$

$$+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\left((\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+\alpha\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right)\Big]\Big\},$$

$$\rho_4(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_2(\alpha+\varepsilon_1)e^{\varepsilon_1 T}++e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\alpha\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+\alpha\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right)\right]\right\},$$

$$\rho_5(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{(\alpha+\varepsilon_1)e^{\varepsilon_1 T}+\right.$$

$$\left.+e^{\varepsilon_2 T}\left[\alpha+\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\alpha\varepsilon_2+\alpha\varepsilon_1+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\right\}.$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (8), (9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_0(x)\in C^2[0,1],\ \varphi_0'''(x)\in L_2(0,1),\ \varphi_0(0)=\varphi_0(1),\ \varphi_0'(0)=\varphi_0'(1).$
2. $\varphi_1(x)\in C^2[0,1],\ \varphi_1'''(x)\in L_2(0,1),\ \varphi_1(0)=\varphi_1(1),\ \varphi_1'(0)=\varphi_1'(1).$
3. $\varphi_2(x)\in C^1[0,1],\ \varphi_2''(x)\in L_2(0,1),\ \varphi_2(0)=\varphi_2(1).$
4. $f(x,t),f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),\ f_x(0,t)=f_x(1,t)=0\,(0\le t\le T).$
5. $h(t)\in C^3[0,T],\ h(t)\neq 0\ \ (0\le t\le T).$

Тогда из (35)–(37) получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\le A_1(T)+B_1(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \tag{38}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \tag{39}$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi_0(x)\|_{L_2(0,1)}+T\,\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+(T+2)\,\|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}+(T+2)\sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+2\rho_0(T)\,\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+2\rho_1(T)\,\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2\rho_2(T)\,\|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)}+2\rho_2(T)\sqrt{T}\,\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\rho_2(T)\,T+(T+2)T,$$

$$A_2(T)=\left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h'''(t)+h''(t)-f(0,t))\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\rho_3(T)\,\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_4(T)\,\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.\left.+\rho_5(T)\,\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)}\ +\rho_5(T)\sqrt{T}\,\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\rho_5(T)\left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}T.$$

Из неравенств (38), (39) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \tag{40}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \;\; B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1-5 и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \tag{41}$$

Тогда задача (1)–(3), (8), (9) *имеет в шаре* $K = K_R\left(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T)+2\right)$ *пространства* E^3_T *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{42}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)(i = 1, 2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (27), (32), соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R\left(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T)+2\right)$ из E^3_T. Аналогично (40) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|z\|_{E^3_T} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \tag{43}$$

$$\|z_1 - z_2\|_{E^3_T} \le B(T)\,R\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\right). \tag{44}$$

Тогда из оценок (43) и (44) с учетом (41) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным решением уравнения (42), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (27), (32).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (29) и (30) ясно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right) \le \rho_6(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_7(T)\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}$$

$$+\rho_8(T)\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_8(T)\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t) + a(t)u_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \;\; (i = 1, 2),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right) \le \rho_9(T)\|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_{10}(T)\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)}$$

$$+\rho_{11}(T)\|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_{11}(T)\sqrt{T}\|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} \;\; (i = 1, 2),$$

где

$$\rho_6(T) = \frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_7(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_1\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right\},$$

$$\rho_8(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_9(T) = \frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_1\right)\right]\right\},$$

$$\rho_{10}(T) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[2\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+\varepsilon_1^2\varepsilon_4^2+2\varepsilon_2^2\varepsilon_4^2+\varepsilon_2^4+\varepsilon_4^4\right)\right]\right\},$$

$$\rho_{11}(T) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1^2 e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2\varepsilon_4^2+\varepsilon_2^3+\varepsilon_1\varepsilon_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_4^2\right)\right]\right\}.$$

Отсюда следует, что $u_t(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$, $u_{txx}(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$ непрерывны в D_T. Далее, из (20) нетрудно увидеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k \left\|u_{ik}'''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k \left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 \left\|u_k'(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 \left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\left\|\left\|f_x(x,t)+a(t)\,u_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} \quad (i=1,2).$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{ttt}(x,t)$ непрерывна в D_T. Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2),(3) и, (8), (9) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (8), (9). В силу следствия Леммы 1, оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана. □

С помощью Теоремы 1 из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)–(5).

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия Теоремы 2 и*

$$\int_0^1 f(x,t)\,dx = 0 \ \ (0 \le t \le T), \qquad \int_0^1 \varphi_i(x)dx = 0 \ \ (i = \overline{0,2}),$$

$$\varphi_0(x_0) = h(0), \quad \varphi_1(x_0) = h'(0), \ \ \varphi_2(x_0) = h''(0).$$

Тогда задача (1)–(5) *имеет в шаре* $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \le R = A\,(T) + 2 \right)$ *пространства* E_T^3 *единственное классическое решение.*

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с периодическими краевыми условиями. С помощью этих фактов доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием.

Список литературы

[1] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.

[2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.

[3] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

[4] Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

[5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.

[6] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

[7] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 5, № 21. Pp. 155–160.

[8] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

[9] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

[10] Варламов В.В. О фундаментальном решении одного уравнения, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27, № 4. С. 629–633.

[11] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 668 с.

[12] Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 23. С. 25–38.

Образец цитирования

Мегралиев Я.Т., Ализаде У.С. О разрешимости одной обратной краевой задачи для уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 88–106. https://doi.org/10.26456/vtpmk534

Сведения об авторах

1. **Мегралиев Яшар Топуш оглы**
доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Бакинского государственного университета.

AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З.Халилова, д. 23, БГУ.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

2. **Ализаде Ульви Сахиб оглы**
кафедра дифференциальных и интегральных уравнений Бакинского государственного университета.

AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З.Халилова, д. 23, БГУ.

ON SOLVABILITY AN INVERSE VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER DESCRIBING THE PROPAGATION OF LONGITUDINAL WAVES IN A DISPERSIVE MEDIUM WITH INTEGRAL CONDITION

Mehraliev Yashar Topush oqli
Associate Professor in the Department of Differential and Integral Equations, Baku State University
AZ1148, Azerbaijan, Baku, Z. Khalilov str., 23, BSU.
E-mail: yashar_ aze@mail.ru

Alhzade Ulvi Sahib oqli
Department of Differential and Integral Equations, Baku State University
AZ1148, Azerbaijan, Baku, Z. Khalilov str., 23, BSU.

Received 29.01.2019, revised 30.05.2019.

The work is devoted to the study of the solvability of the inverse boundary value problem with an unknown time depended coefficient for the equation of the third order describing the propagation of longitudinal waves in a dispersive medium with integral condition. The problem is firstly reduced to the problem that is in a sense quivalent to the original. Then, the Fourier mathod is applied, reducing the problem to solution of a system of integral equations. The existence and uniqueness of the latter equation is proved by the contraction mapping principle, which also yoelds the unique solution of the equivalent problem. Using equivalence, we finally prove the unique existence of a classical solution of the problem under consideration.

Keywords: inverse boundary problem, third-order equations, Fourier method, classical solution.

Citation

Mehraliev Ya.T., Alhzade U.S., "On solvability an inverse value problem for the equation of the third order describing the propagation of longitudinal waves in a dispersive medium with integral condition", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 2, 88–106 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk534

References

[1] Tikhonov A.N., "On the stability of inverse problems", *Soviet Mathematics. Doklady*, **39**:4 (1943), 195–198 (in Russian).

[2] Lavrentev M.M., "On the stability of inverse problems for a single inverse problem for the wave equation", *Soviet Mathematics. Doklady*, **157**:3 (1964), 520–521 (in Russian).

[3] Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.T., *Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza [Incorrect problems of mathematical physics and analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (in Russian), 288 pp.

[4] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanina V.P., *Teoriya linejnykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya [The theory of linear ill-posed problems and its applications]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian), 206 pp.

[5] Denisov A.M., *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the theory of inverse problems]*, MSU Publ., Moscow, 1994 (in Russian), 206 pp.

[6] Samarskij A.A., "On some problems of the theory of differential equations", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **16**:11 (1980), 1925–1935 (in Russian).

[7] Cannon J.R., "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", *Quarterly of Applied Mathematics*, **5**:21 (1963), 155–160.

[8] Ionkin N.I., "Solution of a boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **13**:2 (1977), 294–304 (in Russian).

[9] Nakhushev A.M., "An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of soil moisture and groundwater", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **18**:1 (1982), 72–81 (in Russian).

[10] Varlamov V.V., "On the fundamental solution of a single equation describing the propagation of longitudinal waves in a dispersing medium", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**:4 (1987), 629–633 (in Russian).

[11] Budak B.M., Samarskij A.A., Tikhonov A.N., *Problems in mathematical physics*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (in Russian), 668 pp.

[12] Megraliev Ya.T., "On solvability an inverse value problem for elliptic equation for the second order", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2011, № 23, 25–38 (in Russian).