УДК 519.63

К НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Бештокова З.В.
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 29.01.2019, после переработки 26.05.2019.

В работе исследуются нелокальные краевые задачи для параболического уравнения с переменными коэффициентами в многомерной области. В предположении существования регулярного решения соответствующей дифференциальной задачи методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Ключевые слова: априорная оценка, параболическое уравнение, многомерное уравнение, разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, нелокальное условие.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 107–122. https://doi.org/10.26456/vtpmk535

Введение

Большое практическое значение имеют задачи, связанные с исследованием физических процессов, приводящие к математическим моделям, в основу которых лежит уравнение параболического типа. Особый интерес при этом представляют краевые задачи с интегральными условиями. Заметим, что из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины (см. например, [1]). Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указывает в своей обзорной статье А.А. Самарский [2] и приводит постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

В работе Кожанова А.И. [3] рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x,t)u = q(x,t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0 < t < T, \tag{$*$}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

Рассматриваемые нами в данной работе нелокальные задачи содержат нелокальное граничное условие интегрального вида (*).

Различные классы нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучались в работах [4–10].

1. Постановка задачи А

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, ..., x_p): \ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$k_\alpha(0,x',t)u_{x_\alpha}(0,x',t) = \beta_{-\alpha}(0,x',t)u(l_\alpha,x',t) +$$

$$+ \int_0^t \rho(t,\tau)u(l_\alpha,x',\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(0,x',t), \text{ при } x_\alpha = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u_x(l_\alpha,x',t) = 0, \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{4}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \ L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \le k_\alpha(x,t) \le c_1, \ |q_\alpha(x,t)|, \ |\beta_{-\alpha}(0,x',t)|, \ |\rho(t,\tau)| \le c_2, \tag{5}$$

$$0 \le \tau \le t, \ Q_T = G \times (0 < t \le T], \quad c_0, c_1, c_2 - \text{положительные постоянные},$$

$$\alpha = \overline{1,p}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_p), \quad x = (x_\alpha, x'), \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p).$$

В дальнейшем будем предполагать, что в работе задача имеет единственное решение, обладающее всеми нужными для изложения производными, а коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым для изложения условиям гладкости. Далее через M_i, $i = 1, 2, ...$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Допуская существование регулярного решения дифференциальной задачи (1)–(4) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на $\mathbf{u}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), u\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\right) + \Big(f(x,t), u\Big). \quad (6)$$

В дальнейшем изложении будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int_G uv dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|_0^2 = \int_G u^2 dx, \quad u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} u_{x_\alpha}^2,$$

$$\|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int_0^{l_\alpha} u^2(x,t) dx_\alpha.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (6):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2, \quad (7)$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), u\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} k_\alpha(x,t) u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' - \sum_{\alpha=1}^{p} \int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx. \quad (8)$$

Далее для оценки слагаемых в правой части применим ε-неравенство Коши при $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\right) \le c_2 \sum_{\alpha=1}^{p} \int_G u^2 dx, \quad (9)$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) \le \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2, \quad (10)$$

где

$$G' = \{x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p): \ 0 < x_k < l_k,$$

$$k = 1, 2, ..., \alpha-1, \alpha+1, ..., p\}, \ dx' = dx_1 dx_2 \cdots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \cdots dx_p.$$

Учитывая преобразования (7)–(10), из (6) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \le$$

$$\leq \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} u k_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^{l_\alpha} dx' + M_1\|u\|_0^2 + M_2\|f\|_0^2. \tag{11}$$

Первое слагаемое в правой части (11), с учетом (2), (3), оценим следующим образом

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} u k_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^{l_\alpha} dx' =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(k_\alpha(l_\alpha, x', t) u_{x_\alpha}(l_\alpha, x', t) u(l_\alpha, x', t) - k_\alpha(0, x', t) u_{x_\alpha}(0, x', t) u(0, x', t) \Big) dx' =$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \Big(\beta_{-\alpha}(0, x't) u(l_\alpha, x', t) u(0, x', t) + u(0, x', t) \int_0^t \rho(t,\tau) u(l_\alpha, x', \tau) d\tau -$$

$$-u(0, x', t)\mu_{-\alpha}(0, x', t) \Big) dx'. \tag{12}$$

Справедлива следующая (теорема 6.5 [11])

Теорема 1. *Для элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$, и они непрерывно меняются. Для них справедливы неравенства вида*

$$\int_\Gamma \Big[u(x + le_1) - u(x) \Big]^2 ds \equiv \|u(x + le_1) - u(x)\|_{2,\,\Gamma}^2 \leq cl \int_{Q_l(\Gamma)} u_x^2 dx, \quad 0 \leq l \leq \delta,$$

и

$$\|u(x)\|_{2,\,\Gamma}^2 \leq c\Big[\frac{1}{\delta}\|u(x)\|_{2,\,Q_\delta(\Gamma)}^2 + \delta\|u_x(x)\|_{2,\,Q_\delta(\Gamma)}^2 \Big].$$

Для всех элементов $v(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ с «кусочно-гладкой границей» справедливо

$$\int_{\partial\Omega} v^2 ds \leq \bar{c}_1 \int_\Omega \Big(|v| \cdot |v_x| + v^2 \Big) dx \leq \bar{c}_1 \int_\Omega \Big[\frac{\varepsilon}{\bar{c}_1} v_x^2 + \Big(\frac{\bar{c}_1}{4\varepsilon} + 1 \Big) v^2 \Big] dx \equiv$$

$$\equiv \int_\Omega \Big(\varepsilon v_x^2 + c_\varepsilon v^2 \Big) dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Из (12), пользуясь теоремой 1 и ε-неравенством Коши, получим оценку

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} u k_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^{l_\alpha} dx' \leq \varepsilon M_3\|u_x\|_0^2 + M_4(\varepsilon)\|u\|_0^2 +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_4(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{G'} \mu_{-\alpha}^2 dx'. \tag{13}$$

Тогда из неравенства (11), с учетом (13), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \int_G k_\alpha(x,t) \Big(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \Big)^2 dx \leq \varepsilon M_5\|u_x\|_0^2 + M_6(\varepsilon)\|u\|_0^2 +$$

$$+\varepsilon\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+M_7(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}\mu_{-\alpha}^2dx'+\|f\|_0^2. \tag{14}$$

Проинтегрируем (14) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\le\varepsilon M_8\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+$$

$$+M_9(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\varepsilon M_{10}\int_0^t\int_0^\tau\|u_x\|_0^2d\tau_1d\tau+M_{11}(\varepsilon)\int_0^t\int_0^\tau\|u\|_0^2d\tau_1d\tau+$$

$$+M_{12}\bigg(\int_0^t\bigg(\|f\|_0^2+\int_{G'}\mu_{-\alpha}^2dx'\bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\bigg). \tag{15}$$

Оценим третье и четвертое слагаемые в правой части неравенства(15) следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau\|u_x\|_0^2d\tau_1d\tau\le T\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau,\quad \int_0^t\int_0^\tau\|u\|_0^2d\tau_1d\tau\le T\int_0^t\|u\|_0^2d\tau. \tag{16}$$

С помощью (16) из (15) находим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\le M_{13}(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\varepsilon(T+1)\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+$$

$$+M_{14}\bigg(\int_0^t\bigg(\|f\|_0^2+\int_{G'}\mu_{-\alpha}^2dx'\bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\bigg). \tag{17}$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{2(T+1)}$, из (17) находим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\le$$

$$\le M_{15}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_{16}\bigg(\int_0^t\bigg(\|f\|_0^2+\int_{G'}\mu_{-\alpha}^2dx'\bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\bigg). \tag{18}$$

На основании леммы Гроноулла (Лемма 1.1, стр. 152 [11]) из (18) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\le M(t)\bigg(\int_0^t\bigg(\|f\|_0^2+\int_{G'}\mu_{-\alpha}^2dx'\bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\bigg), \tag{19}$$

где $\|u_x\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2d\tau$, $M(t)$ — зависит только от входных данных задачи (1)–(4).

Из априорной оценки (19) следует единственность решения исходной задачи (1)–(4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме $\|u\|_1^2=\|u\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2$.

3. Построение разностной схемы

Для решения задачи (1)–(4) применим метод конечных разностей. В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [12]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче $(1) - (4)$ поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_{\bar t} = \Lambda(\widetilde{t})y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \tag{20}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha, 0} = \beta_{-\alpha}\, y_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{s,j} y_{N_\alpha}^{s} \overline{\tau} - \mu_{-\alpha}, \quad \text{при } x_\alpha = 0, \tag{21}$$

$$y_{\bar x_\alpha, N_\alpha} = 0, \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{22}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{23}$$

где

$$\Lambda(\widetilde{t}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\widetilde{t}), \quad \Lambda_\alpha(\widetilde{t}) y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}\big)_{x_\alpha} - d_\alpha y,$$

$$y_{\bar x_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_{\bar t} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1},$$

$$x^{-0.5\alpha} = x_1, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p,$$

$$\widetilde{t} = (j+0.5)\tau = t_j + 0.5\tau = t_{j+0.5}, \quad t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau,\ a_\alpha = k_\alpha(x^{-0.5\alpha}, \widetilde{t}_j),$$

$$d_\alpha = q_\alpha(x_i, \widetilde{t}_j),\ \varphi_i = f(x_i, \widetilde{t}_j), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + ... + h_p^2, \quad \tau, h - \text{шаги сетки.}$$

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1)–(4), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (20)–(23). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (20)–(23), получим задачу для z:

$$z_{\bar t} = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{24}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha, 0} = \beta_{-\alpha}\, z_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{s,j} z_{N_\alpha}^{s} \overline{\tau} - \nu_{-\alpha,0}, \quad \text{при } x_\alpha = 0, \tag{25}$$

$$z_{\bar x_\alpha, N_\alpha} = 0, \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{26}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{27}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$ — погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(4).

Для решения задачи (24)–(27) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем скалярное произведение

$$\big(u,v\big) = \sum_{x\in\omega_h} u(x)v(x)h_1h_2\cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(i_1h_1, i_2h_2, ..., i_p\,h_p)v(i_1h_1, i_2h_2, ..., i_p\,h_p)h_1h_2\cdots h_p\,;$$

$$(u,v]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\cdots\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2\cdots h_p.$$

В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(u,u) = \|u\|^2, \quad (u,u] = \|u]|^2, \quad (u,v] = \sum_{\alpha=1}^{p}(u,v]_\alpha, \;\; \|Y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p}\|Y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим теперь разностное уравнение (24) скалярно на $2\tau z$:

$$2\tau(z_{\overline{t}}, z) = 2\tau(\Lambda(\widetilde{t})z, z) + 2\tau(\Psi, z). \tag{28}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (28), с учетом условий (23), (24) и формулы $2yy_{\overline{t}} = (y^2)_{\overline{t}} + \tau(y_{\overline{t}})^2$:

$$2\tau(z_{\overline{t}}, z) = (1,z^2) - (1,\check{z}^2) + \tau^2(1,z_{\overline{t}}^2), \tag{29}$$

$$\Big(\Lambda(\widetilde{t})z, z\Big) = \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\widetilde{t})z, z\Big) = \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\Lambda_\alpha(\widetilde{t})z, z\Big) = \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\big((a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}, z\big) - \big(d_\alpha z, z\big)\Big). \tag{30}$$

Применяя первую разностную формулу Грина в (30) и подставляя преобразованные таким образом выражения в тождество (28), с учетом (25), (26), (29), получаем

$$(1,z^2) - (1,\check{z}^2) + \tau^2(1,z_{\overline{t}}^2) + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha, z_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha =$$

$$= 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(d_\alpha, z^2\big) - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_{+\alpha}z_{N_\alpha}^2 - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_{-\alpha}z_0z_{N_\alpha} + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\nu_{+\alpha}z_{N_\alpha} +$$

$$+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\nu_{-\alpha}z_0 - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}z_0\sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}z_{N_\alpha}^s\overline{\tau} + 2\tau\big(\psi, z\big). \tag{31}$$

Оценим суммы, входящие в тождество (31):

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}(d_\alpha, z^2) \le c_2\sum_{\alpha=1}^{p}(1,z^2) = c_2\|z\|^2, \tag{32}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_{-\alpha}z_0z_{N_\alpha}\le c_2\sum_{\alpha=1}^{p}z_0z_{N_\alpha}=c_2z_0z_N\le M_1\left(z_0^2+z_N^2\right)\le M_1\left(\varepsilon_1\|z_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon_1)\|z\|^2\right), \tag{33}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\nu_{-\alpha}z_0\le\nu_1\sum_{\alpha=1}^{p}z_0=\nu_1z_0\le\frac{1}{2}\left(\nu_1^2+z_0^2\right)\le\frac{1}{2}\left(\nu_1^2+\varepsilon_2\|z_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon_2)\|z\|^2\right), \tag{34}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}z_0\sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}z_{N_\alpha}^s\overline{\tau}=-z_0\sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}z_N^s\overline{\tau}\le\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}z_N^s\overline{\tau}\right)^2+z_0^2\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(M_2\sum_{s=0}^{j}(z_N^s)^2\overline{\tau}+z_0^2\right)\le\left(\varepsilon_3\|z_{\overline{x}}]|^2+M_3(\varepsilon_3)\|z\|^2\right)+M_4\sum_{s=0}^{j}\left(\varepsilon_3\|z_{\overline{x}}^s]|^2+c(\varepsilon_3)\|z^s\|^2\right)\overline{\tau}, \tag{35}$$

$$(\Psi,z)\le\frac{1}{2}\|z\|^2+\frac{1}{2}\|\Psi\|^2. \tag{36}$$

Учитывая оценки (32)–(36), после несложных преобразований из (31) находим:

$$\|z\|^2-\|\check{z}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_\alpha,z_{\overline{x}_\alpha}^2\right]_\alpha+\tau^2\|z_{\overline{t}}]|^2\le\varepsilon_3M_5\|z_{\overline{x}}]|^2\tau+M_6(\varepsilon_3)\|z\|^2\tau+$$

$$+\varepsilon_3\sum_{s=0}^{j}\|z_{\overline{x}}^s]|^2\tau+M_7(\varepsilon_3)\sum_{s=0}^{j}\|z^s\|^2\tau+M_8\left(\|\Psi\|^2+\nu_1^2\right)\tau. \tag{37}$$

Просуммируем (37) по $j\,'$ от 1 до j :

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau\le\varepsilon_3M_9\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau+M_{10}(\varepsilon_3)\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau+$$

$$+\varepsilon_3M_{11}\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z_{\overline{x}}^s]|^2\overline{\tau}\tau+M_{12}(\varepsilon_3)\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z^s\|^2\overline{\tau}\tau+M_{13}\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}\right)\tau. \tag{38}$$

Третье и четвертое слагаемые в правой части (38) оценим так

$$\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z_x^s]|^2\overline{\tau}\tau\le T\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_x^{j\,'}]|^2\tau,\quad \sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z^s\|^2\overline{\tau}\tau\le T\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau. \tag{39}$$

В силу (39) из (38) имеем

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau\le\varepsilon_3M_{14}\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau+$$

$$+M_{15}(\varepsilon_3)\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau+M_{16}\sum_{j\,'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}\right)\tau. \tag{40}$$

Выбирая $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{2M_{14}}$, из (40) находим

$$\|z^j\|^2 + \sum_{j'=1}^{j} \|z_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \le M_{17}\sum_{j'=1}^{j} \|z^{j'}\|^2\tau + M_{18}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j'}\|^2 + \nu_1^{j'\,2}\right)\tau =$$

$$= M_{19}\|z^j\|^2\tau + M_{19}\sum_{j'=1}^{j-1} \|z^{j'}\|^2\tau + M_{20}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j'}\|^2 + \nu_1^{j'\,2}\right)\tau. \qquad (41)$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau \le \tau_0, \tau_0 = \dfrac{1}{2M_{19}}$, из (41) получим

$$\|z^j\|^2 + \sum_{j'=1}^{j} \|z_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \le M_{21}\sum_{j'=1}^{j-1} \|z^{j'}\|^2\tau + M_{22}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j'}\|^2 + \nu_1^{j'\,2}\right)\tau. \qquad (42)$$

На основании аналога леммы Гронуолла для сеточной функций [13] из (42) получаем априорную оценку

$$\|z^j\|^2 + \sum_{j'=1}^{j} \|z_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \le M\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\Psi^{j'}\|^2 + \nu_1^{j'\,2}\right)\tau, \qquad (43)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от |h| и τ

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий решение разностной задачи (20)–(23) при* $\tau \le \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ *сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(4) со скоростью* $O(|h| + \tau)$ *в сеточной норме* $\|z^j\|_1^2 = \|z^j\|^2 + \sum\limits_{j'=1}^{j} \|z_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau$ *так, что справедлива априорная оценка (43).*

5. Постановка задачи B и априорная оценка в дифференциальной форме

В задаче A заменим условие (3) условием вида

$$-k_\alpha(l_\alpha, x', t)u_{x_\alpha}(l_\alpha, x', t) = \beta_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)u(l_\alpha, x', t) - \mu_{+\alpha}(l_\alpha, x', t), \quad t \in [0, T], \quad (44)$$

где $|\beta_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)| \le c_2$.

Допуская существование решения задачи (1), (2), (44) (4) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Повторяя рассуждения (6) - (10), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \le$$

$$\le \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^{l_\alpha} dx' + M_1\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \qquad (45)$$

Пользуясь Теоремой 1 и ε-неравенством Коши, первое слагаемое в правой части (45), с учетом (2), (44), оценим следующим образом

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx' =$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(k_\alpha(l_\alpha,x',t)u_x(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t)-k_\alpha(0,x',t)u_x(0,x',t)u(0,x',t)\Big)dx' =$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(\mu_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t)-\beta_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u^2(l_\alpha,x',t)-$$

$$-\beta_{-\alpha}(0,x't)u(l_\alpha,x',t)u(0,x',t)-$$

$$-u(0,x',t)\int_0^t\rho(t,\tau)u(l_\alpha,x',\tau)d\tau-u(0,x',t)\mu_{-\alpha}(0,x',t)\Big)dx'\le\varepsilon\|u_x\|_0^2+$$

$$+M_2(\varepsilon)\|u\|_0^2+\varepsilon\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+M_3(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'. \quad (46)$$

Тогда из неравенства (45), с учетом (46), находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)^2dx\le\varepsilon M_4\|u_x\|_0^2+M_5(\varepsilon)\|u\|_0^2+$$

$$+\varepsilon\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+M_6(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'+\|f\|_0^2. \quad (47)$$

Проинтегрируем (47) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\le\varepsilon M_7\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+$$

$$+M_8(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+\varepsilon M_9\int_0^t\int_0^\tau\|u_x\|_0^2d\tau_1d\tau+M_{10}(\varepsilon)\int_0^t\int_0^\tau\|u\|_0^2d\tau_1d\tau+$$

$$+M_{11}\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\Big). \quad (48)$$

После несложных преобразований на основании леммы Гроноулла (Лемма 1.1., стр. 152 [11]) из (48) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\le M(t)\Big(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\int_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\Big), \quad (49)$$

где $\|u_x\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2d\tau$, $M(t)$ — зависит только от входных данных задачи (1), (2), (44), (4).

Из априорной оценки (49) следует единственность решения исходной задачи (1), (2), (44) (4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2$.

6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (2), (44), (4) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h|+\tau\big)$:

$$y_{\overline{t}} = \Lambda(\widetilde{t})y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{50}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, y_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{s,j} y_{N_\alpha}^s \overline{\tau} - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{51}$$

$$-a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha} - \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{52}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{53}$$

где

$$\Lambda(\widetilde{t}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\widetilde{t}), \quad \Lambda_\alpha(\widetilde{t})y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} - d_\alpha y.$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1), (2), (44), (4), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (50)–(53). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (50)–(53), получим задачу для z:

$$z_{\overline{t}} = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{54}$$

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, z_{N_\alpha} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{s,j} z_{N_\alpha}^s \overline{\tau} - \nu_{-\alpha,0}, \quad x = 0, \tag{55}$$

$$-a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha,N_\alpha}, \quad x = l_\alpha, \tag{56}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{57}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$ — погрешности аппроксимации на решении задачи (1), (2), (44) (4).

Для решения задачи (54)–(57) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим тогда разностное уравнение (54) скалярно на $2\tau z$:

$$2\tau(z_{\overline{t}}, z) = 2\tau(\Lambda(\widetilde{t})z, z) + 2\tau(\Psi, z). \tag{58}$$

Повторяя рассуждения (29)–(36), после несложных преобразований из (58) получим неравенство

$$\|z\|^2 - \|\check{z}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \big(a_\alpha, z_{\overline{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha + \tau^2 \|z_{\overline{t}}]|^2 \le \varepsilon M_1 \|z_{\overline{x}}]|^2\tau + M_2(\varepsilon)\|z\|^2\tau +$$

$$+\varepsilon\sum_{s=0}^{j}\|z_{\bar{x}}^{s}]|^2\tau+M_3(\varepsilon)\sum_{s=0}^{j}\|z^s\|^2\tau+M_4\Big(\|\Psi\|^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big)\tau. \qquad (59)$$

Просуммируем (59) по $j\,'$ от 1 до j :

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau\leq\varepsilon M_5\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau+M_6(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau+$$

$$+\varepsilon M_7\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z_{\bar{x}}^{s}]|^2\overline{\tau}\tau+M_8(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\|z^s\|^2\overline{\tau}\tau+M_9\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau. \qquad (60)$$

В силу (39) из (60) имеем

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau\leq\varepsilon M_{10}\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau+$$

$$+M_{11}(\varepsilon)\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau+M_{12}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau.$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{2M_{10}}$, из последнего находим

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau\leq M_{13}\sum_{j\,'=1}^{j}\|z^{j\,'}\|^2\tau+M_{14}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau=$$

$$=M_{15}\|z^j\|^2\tau+M_{15}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|z^{j\,'}\|^2\tau+M_{16}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau. \qquad (61)$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau\leq\tau_0,\tau_0=\dfrac{1}{2M_{15}}$, из (61) получим

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau\leq M_{17}\sum_{j\,'=1}^{j-1}\|z^{j\,'}\|^2\tau+M_{18}\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau. \qquad (62)$$

На основании аналога леммы Гронуолла для сеточной функций [13] из (62) получаем априорную оценку

$$\|z^j\|^2+\sum_{j\,'=1}^{j}\|z_{\bar{x}}^{j\,'}]|^2\tau\leq M\sum_{j\,'=1}^{j}\Big(\|\Psi^{j\,'}\|^2+\nu_1^{j\,'\,2}+\nu_2^{j\,'\,2}\Big)\tau, \qquad (63)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от |h| и τ

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (5), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий решение разностной задачи (50)–(53) при* $\tau \le \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ *сходится к решению дифференциальной задачи (1), (2), (44), (4) со скоростью* $O(|h| + \tau)$ *в сеточной норме* $\|z^j\|_1^2 = \|z^j\|^2 + \sum\limits_{j\,'=1}^{j} \|z_{\overline{x}}^{j\,'}]|^2\tau$ *так, что справедлива априорная оценка (63).*

Заключение

В работе рассмотрены нелокальные краевые задачи для параболического уравнения с переменными коэффициентами в многомерной области. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки решений в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(|h| + \tau)$.

Список литературы

[1] Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сборник трудов по агрофизике. 1969. № 23. С. 41–54.

[2] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

[3] Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

[4] Бицадзе А.В. К теории нелокальных краевых задач // Доклады Академии наук СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 17–19.

[5] Водахова В.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 163–166.

[6] Гордезиани Д.Г. О разностных схемах для решения одного класса нелокальных краевых задач // Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. Нальчик, 1986. С. 112–113.

[7] Данилкина О.Ю. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения теплопроводности // Труды Третьей Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи". 2006. С. 99–101.

[8] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 795–804.

[9] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

[10] Камынин Л.А. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1

[11] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[12] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

[13] Самарский А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3, № 2. С. 266–298. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90025-9

Образец цитирования

Бештокова З.В. К нелокальным краевым задачам для многомерного параболического уравнения с переменными коэффициентами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 107–122. https://doi.org/10.26456/vtpmk535

Сведения об авторах

1. **Бештокова Зарьяна Владимировна**
младший научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: zarabaeva@yandex.ru

TO NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Beshtokova Zaryana Vladimirovna
Junior Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Received 29.01.2019, revised 26.05.2019.

The paper studies nonlocal boundary value problems for a parabolic equation with variable coefficients in a multidimensional domain. Studies of the set nonlocal boundary value problems are carried out assuming the existence of a regular solution. To solve the corresponding differential problem under consideration by the method of energy inequalities, a priori estimates in the differential and difference interpretations are obtained. From the obtained a priori estimates the uniqueness and stability of the solution on the right side and the initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at a rate of $O(|h| + \tau)$, follow.

Keywords: a priori estimation, parabolic equation, multidimensional equation, difference scheme, stability and convergence of difference schemes, nonlocal condition.

Citation

Beshtokova Z.V., "To nonlocal boundary value problems for a multidimensional parabolic equation with variable coefficients", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 2, 107–122 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk535

References

[1] Chudnovskij A.F., "Some adjustments in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in the soil", *Sbornik trudov po agrofizike [Collection of works on agrophysics]*, 1969, № 23, 41–54 (in Russian).

[2] Samarskii A.A., "On some problems in the theory of differential equations", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **16**:11 (1980), 1925–1935 (in Russian).

[3] Kozhanov A.I., "On a non-local boundary value problem with variables coefficients for heat conduction equations and Aller", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **40**:6 (2004), 763–774 (in Russian).

[4] Bitsadze A.V., “On the theory of non-local boundary value problems”, *Soviet Mathematics. Doklady*, **277**:1 (1984), 17–19 (in Russian).

[5] Vodakhova V.A., “On a boundary value problem for a third-order equation with a nonlocal condition A.M. Nakhusheva”, *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **19**:1 (1983), 163–166 (in Russian).

[6] Gordeziani D.G., “About difference schemes for solving one class non-local boundary value problems”, *Nelokalnye zadachi dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh i ikh prilozheniya k modelirovaniyu i avtomatizatsii proektirovaniya slozhnykh sistem [Nonlocal problems for partial differential equations and their applications for modeling and automating the design of complex systems]*, Nalchik, 1986, 112–113 (in Russian).

[7] Danilkina O.Yu., “Non-local problem with integral condition for the heat equation”, *Trudy Tretej Vserossijskoj nauchnoj konferentsii ”Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi” [Proceedings of the Third All-Russian scientific conference ”Mathematical modeling and boundary value problems”]*, 2006, 99–101 (in Russian).

[8] Ilin V.A., Moiseev E.I., “A priori estimate of the solution of the problem, adjoint to a nonlocal boundary value problem of the first kind”, *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **24**:5 (1988), 795–804 (in Russian).

[9] Ionkin N.I., “Solution of a boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **13**:2 (1977), 294–304 (in Russian).

[10] Kamynin L.A., “A boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary condition”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**:6 (1964), 33–59, https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1.

[11] Ladyzhenskaya O.A., *Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 407 pp.

[12] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.

[13] Samarskii A.A., “Homogeneous difference schemes on non-uniform nets for equations of parabolic type”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **3**:2 (1963), 351–393, https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90025-9.