УДК 517.95, 532.5

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Шеретов Ю.В.**
Тверской государственный университет, г. Тверь

*Поступила в редакцию 10.07.2019, после переработки 12.08.2019.*

Для квазигидродинамической системы, описывающей движения слабосжимаемой вязкой жидкости, поставлена основная начально-краевая задача. Показано, что не существует неравновесных решений этой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости. Для квазигидродинамической системы выведены некоторые новые энергетические равенства и неравенства. Исследованы ее диссипативные свойства. Получен дополнительный закон сохранения. Построен соответствующий ему интегральный инвариант.

**Ключевые слова:** квазигидродинамическая система, уравнения Навье-Стокса, диссипативные свойства, интегральные инварианты, вихревые течения.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 5–19.*
https://doi.org/10.26456/vtpmk536

## Введение

Классическая система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости является диссипативной и обладает множеством точных физически осмысленных решений [1]. В 1993 г. автором была предложена еще одна система, получившая название квазигидродинамической (КГД) [2]. Она описывает движения слабосжимаемой вязкой жидкости и имеет глубокие связи с моделью Навье–Стокса. Физические принципы, на основе которых были выведены КГД уравнения, подробно изложены в [3]. Детальное исследование свойств КГД системы проведено в [4]. В [5] построены ее точные стационарные решения с безвихревым соленоидальным полем скорости.

В настоящей работе для КГД системы поставлена основная начально-краевая задача. Показано, что не существует неравновесных решений этой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости. Для квазигидродинамической системы выведены некоторые новые энергетические равенства и неравенства. Исследованы ее диссипативные свойства. Получен дополнительный закон сохранения. Построен соответствующий ему интегральный инвариант.

## 1. Квазигидродинамическая система. Постановка основной начально-краевой задачи

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в следующем виде:

$$\mathrm{div}\ \big(\vec{u} - \vec{w}\big) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \eta \Delta \vec{u} + \eta \nabla \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big).$$

Здесь $\eta$ – коэффициент динамической вязкости жидкости, $\tau = \eta/(\rho c_s^2)$ – характерное время релаксации, $c_s$ – скорость звука в жидкости. Символом $\Delta$ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости $\rho$ положена равной единице. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$.

Пусть $V$ – ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей $\partial V$, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор единичной внешней нормали к $\partial V$ в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T_f]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T_f]$ – его замыкание, $T_f$ – заданное положительное число или символ $+\infty$ соответственно. Параметр $t \in [0,\ T_f]$ будем интерпретировать как время. Добавим к (1.1) – (1.2) начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{1.3}$$

граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = 0, \qquad (\vec{w} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \qquad t \in [0,\ T_f], \tag{1.4}$$

а также условие нормировки

$$\int\limits_V p\ dV = 0, \qquad t \in [0,\ T_f]. \tag{1.5}$$

Здесь $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ – заданное распределение скорости в начальный момент времени $t = 0$. Интегральное условие (1.5) исключает неоднозначность в определении давления.

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где $\alpha$ – натуральное число, обозначим класс непрерывных в $Q$ функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в $Q$ частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\beta$, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций

$\vec{f} = \vec{f}(\vec{x},t) = (f_1(\vec{x},t), f_2(\vec{x},t), f_3(\vec{x},t))$, каждая компонента $f_i$ которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Символом $C^{\alpha,0}_{\vec{x},t}(Q)$, где $\alpha$ – натуральное число, обозначим множество всех непрерывных в $Q$ функций $f = f(\vec{x},t)$, у которых существуют непрерывные в $Q$ производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant \alpha$.

**Определение 1.** *Классическим решением начально–краевой задачи* (1.1)–(1.5) *назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^{2,0}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^{1,0}_{\vec{x},t}(\overline{Q})$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in Q$ *уравнениям* $(1.1) - (1.2)$*, а также условиям* $(1.3) - (1.5)$.

Изучим свойства решения поставленной начально-краевой задачи, считая, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Сами решения будем интерпретировать как течения слабосжимаемой вязкой жидкости в ограниченном объеме $V$.

## 2. Правило Лейбница. Формула Гаусса–Остроградского. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре

В этом пункте приведем формулировки некоторых известных теорем, которые будут использованы в дальнейшем.

**Теорема 1** (правило Лейбница)**.** *Пусть заданная в* $Q = V \times [0,T_f]$ *функция* $f = f(\vec{x},t)$ *имеет непрерывную по* $t$ *на отрезке* $[0,T_f]$ *производную* $\partial f(\vec{x},t)/\partial t$ *для почти всех* $\vec{x} \in V$*, и существует интегрируемая по Лебегу в* $V$ *функция* $q(\vec{x})$*, такая, что при каждом* $t \in [0,T_f]$ *почти всюду в* $V$ *выполняется неравенство* $|\partial f(\vec{x},t)/\partial t| \leqslant q(\vec{x})$*. Пусть, далее, при некотором* $t_0 \in [0,T_f]$ *существует интеграл* $\int_V f(\vec{x},t_0) dV$*. Тогда* $\int_V f(\vec{x},t) dV \in C^1([0,T_f])$ *и на промежутке* $[0,T_f]$ *справедливо тождество*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V f(\vec{x},t)\ dV = \int\limits_V \frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\ dV. \tag{2.1}$$

**Теорема 2** (формула Гаусса–Остроградского)**.** *Пусть в ограниченной односвязной области* $V$ *с кусочно–гладкой границей* $\partial V$ *задано векторное поле* $\vec{A}(\vec{x}) = (A_1(x_1,x_2,x_3), A_2(x_1,x_2,x_3), A_3(x_1,x_2,x_3))$*, каждая компонента* $A_i$ *которого принадлежит классу гладкости* $C^1(V) \cap C(\overline{V})$*. Функция*

$$div\ \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

*интегрируема по Лебегу на* $V$*. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_V div\ \vec{A}\ dV = \oiint\limits_{\partial V} (\vec{A}\cdot\vec{n})\ dS. \tag{2.2}$$

**Теорема 3** (неравенство Фридрихса). *Для любой вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ класса $\boldsymbol{C}^1(\overline{V})$, обращающейся в нуль на $\partial V$, выполняется оценка*

$$\int\limits_V \vec{u}^2 \, dV \leqslant c_F \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 \, dV, \tag{2.3}$$

*где $c_F$ – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик $V$.*

**Теорема 4** (неравенство Пуанкаре). *Для любой функции $p = p(\vec{x})$ класса $C^1(\overline{V})$, удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_V p \, dV = 0,$$

*выполняется оценка*

$$\int\limits_V p^2 \, dV \leqslant c_P \int\limits_V (\nabla p)^2 \, dV, \tag{2.4}$$

*где $c_P$ – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик $V$.*

Доказательства сформулированных утверждений можно найти в [6], [7].

### 3. Невозможность неравновесных течений с безвихревым соленоидальным полем скорости

Определим вихрь поля скорости по формуле

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \big[\nabla \times \vec{u}\big] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

Для дальнейшего исследования свойств решений поставленной начально-краевой задачи выпишем некоторые известные (см. [1], с. 32) векторные тождества

$$\mathrm{div}\ \big[\vec{a} \times \vec{b}\big] = \big(\vec{b} \cdot \mathrm{rot}\ \vec{a}\big) - \big(\vec{a} \cdot \mathrm{rot}\ \vec{b}\big), \tag{3.2}$$

$$\mathrm{div}\ \big(\varphi \vec{a}\big) = \varphi\ \mathrm{div}\ \vec{a} + \big(\vec{a} \cdot \nabla \varphi\big), \tag{3.3}$$

$$\big(\vec{u} \cdot \nabla\big)\vec{u} = \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \big[\vec{\omega} \times \vec{u}\big], \tag{3.4}$$

$$\Delta \vec{u} = \nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) - \mathrm{rot}\ \vec{\omega}. \tag{3.5}$$

Справедлива

**Теорема 5.** *На любом классическом решении начально-краевой задачи* (1.1)–(1.5) *для всех $(\vec{x}, t) \in Q$ выполняется равенство*

$$\big(\nabla \otimes \vec{u}\big)^2 - \vec{\omega}^2 - \big(div\ \vec{u}\big)^2 = div\ \Big(\big(\vec{u} \cdot \nabla\big)\vec{u} - \vec{u}\ div\ \vec{u}\Big), \tag{3.6}$$

*в котором*

$$\big(\nabla \otimes \vec{u}\big)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2, \quad \vec{\omega}^2 = \big(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\big) = |\vec{\omega}|^2 = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2.$$

*Доказательство.* Умножим (3.5) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\big(\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\big) = \big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\mathrm{div}\ \vec{u} - \big(\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\omega}\big). \tag{3.7}$$

Принимая во внимание (3.2) и (3.3), преобразуем последовательно все члены, входящие в (3.7):

$$\big(\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\big) = \sum_{j=1}^{3} u_j \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) - \big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 = \mathrm{div}\Big(\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)\Big) - \big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2, \tag{3.8}$$

$$\big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \big(\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big) - \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2, \tag{3.9}$$

$$\big(\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\omega}\big) = \mathrm{div}\ \big[\vec{\omega}\times\vec{u}\big] + \vec{\omega}^2. \tag{3.10}$$

Подставив (3.8) – (3.10) в (3.7), получим

$$\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 - \vec{\omega}^2 - \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 = \mathrm{div}\ \Big(\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \big[\vec{\omega}\times\vec{u}\big] - \vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big). \tag{3.11}$$

Преобразовав правую часть (3.11) с помощью (3.4), приходим к (3.6). □

В статье [5] построены решения $(\vec{u}, p)$ квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2), не зависящие от времени и подчиняющиеся соотношениям

$$\mathrm{rot}\ \vec{u} = 0, \quad \mathrm{div}\ \vec{u} = 0. \tag{3.12}$$

Ответ на вопрос о возможности существования таких решений в рассматриваемом случае дает

**Теорема 6.** *Не существует неравновесных решений поставленной начально-краевой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости.*

*Доказательство.* Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). Кроме того, векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет условиям (3.12) для всех $(\vec{x}, t) \in Q$. Для каждого $t \in [0,\ T_f]$ проинтегрируем (3.6) по области $V$, а затем воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского (2.2). Получим

$$\int_V \Big(\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 - \vec{\omega}^2 - \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2\Big)\ dV = \oiint_{\partial V} \Big(\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)\cdot\vec{n}\Big)\ dS. \tag{3.13}$$

В силу первого краевого условия (1.4) и свойств гладкости решения поверхностный интеграл в правой части (3.13) обращается в ноль. Поэтому

$$\int_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\ dV = \int_V \big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2\ dV = \int_V \Big(\vec{\omega}^2 + \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2\Big)\ dV, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.14}$$

Следствием (3.14), (3.1) и неравенства Фридрихса (2.3) является оценка

$$\int\limits_V \vec{u}^2\,dV \leqslant c_F \int\limits_V \Big( \big(\mathrm{rot}\ \vec{u}\big)^2 + \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2 \Big)\,dV, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание (3.12), преобразуем (3.15) к виду

$$\int\limits_V \vec{u}^2\,dV \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.16}$$

Интегрирование (3.16) по переменной $t$ на указанном промежутке дает

$$\int\limits_Q \vec{u}^2\,dV dt \leqslant 0. \tag{3.17}$$

Из (3.17) вытекает, что

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = 0 \tag{3.18}$$

для всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$.

Подстановка (3.18) в (1.1) приводит к уравнению Лапласа

$$\Delta p = 0, \quad (\vec{x}, t) \in Q. \tag{3.19}$$

Умножим (3.19) на $p$ и преобразуем полученное равенство к виду

$$\big(\nabla p\big)^2 = \mathrm{div}\ \big(p \nabla p\big), \quad (\vec{x}, t) \in Q. \tag{3.20}$$

Проинтегрируем (3.20) по объему $V$, а затем применим формулу Гаусса–Остроградского. Будем иметь

$$\int\limits_V \big(\nabla p\big)^2\,dV = \oiint\limits_{\partial V} p \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\,dS, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.21}$$

Эквивалентная запись второго краевого условия (1.4) такова:

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.22}$$

Из (3.21) и (3.22) находим

$$\int\limits_V \big(\nabla p\big)^2\,dV = 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.23}$$

Поскольку выполнено условие (1.5), в (3.23) можно воспользоваться неравенством Пуанкаре (2.4). Это приводит к оценке

$$\int\limits_V p^2\,dV \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.24}$$

Интегрирование (3.24) по времени $t$ дает

$$\int\limits_Q p^2 \; dV dt \leqslant 0. \tag{3.25}$$

Из (3.25) следует, что

$$p = p(\vec{x}, t) = 0 \tag{3.26}$$

для всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$. □

Итак, единственное решение $(\vec{u}, p)$ начально-краевой задачи (1.1) – (1.5) с безвихревым соленоидальным полем скорости $\vec{u}$ является равновесным и определяется формулами (3.18), (3.26). Заметим, что аналогичный результат справедлив и для системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости. Условия, при которых невозможны безвихревые решения в рамках этой модели, обсуждались в [8] на с. 224.

## 4. Различные формы записи уравнения баланса кинетической энергии

Подробный вывод уравнения баланса кинетической энергии для КГД системы (1.1) – (1.2) изложен в [4]. Там же доказана теорема о диссипации полной кинетической энергии жидкости в ограниченном объеме. Равенство, выражающее баланс кинетической энергии для указанной системы, может быть представлено в различных эквивалентных формах.

**Теорема 7.** *Уравнение баланса кинетичекой энергии для КГД системы* (1.1) – (1.2) *может быть записано в виде*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + div\left((\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+p\Big) - \vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u}) - \eta\big[\vec{u}\times\vec{\omega}\big] - \eta(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - \eta\vec{u}\; div\;\vec{u}\right) = -\varPhi_*. \tag{4.1}$$

*Здесь*

$$\varPhi_* = \eta\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2 + \eta\big(div\;\vec{u}\big)^2 + \frac{\vec{w}^2}{\tau}. \tag{4.2}$$

*– неотрицательная диссипативная функция.*

*Доказательство.* Умножим уравнение (1.2) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) + \Big(\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}\Big) + \big(\vec{u}\cdot\nabla p\big) =$$

$$= \eta\big(\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}\big) + \eta\big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\big(\mathrm{div}\;\vec{u}\big) + \big(\vec{u}\cdot\mathrm{div}\;(\vec{u}\otimes\vec{w})\big). \tag{4.3}$$

Принимая во внимание (1.1), (3.4), (3.8) и (3.9), преобразуем последовательно все слагаемые, входящие в (4.3):

$$\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{4.4}$$

$$\Big(\vec{u}\cdot\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}\Big) = \sum_{i=1}^{3}\; u_i\; \sum_{j=1}^{3}\,(u_j - w_j)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (u_j - w_j) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big( \frac{u_i^2}{2} \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (u_j - w_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{3} \Big( \frac{u_i^2}{2} \Big) = \big( (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla \big) \Big( \frac{\vec{u}^2}{2} \Big) =$$

$$= \mathrm{div}\, \Big( (\vec{u} - \vec{w}) \frac{\vec{u}^2}{2} \Big) - \frac{\vec{u}^2}{2}\, \mathrm{div}\, (\vec{u} - \vec{w}) = \mathrm{div}\, \Big( (\vec{u} - \vec{w}) \frac{\vec{u}^2}{2} \Big), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \big( \vec{u} \cdot \nabla p \big) &= \big( (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla \big) p + (\vec{w} \cdot \nabla) p = \\ &= \mathrm{div}\, \big( p (\vec{u} - \vec{w}) \big) - p\, \mathrm{div}\, (\vec{u} - \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \nabla) p = \\ &= \mathrm{div}\, \big( p (\vec{u} - \vec{w}) \big) + (\vec{w} \cdot \nabla) p, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \eta \big( \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \big) &= \eta\, \mathrm{div} \Big( \nabla \Big( \frac{\vec{u}^2}{2} \Big) \Big) - \eta \big( \nabla \otimes \vec{u} \big)^2 = \\ &= \eta\, \mathrm{div} \Big( (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \big[ \vec{u} \times \vec{\omega} \big] \Big) - \eta \big( \nabla \otimes \vec{u} \big)^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\eta \big( \vec{u} \cdot \nabla \big) \big( \mathrm{div}\, \vec{u} \big) = \eta\, \mathrm{div}\, \big( \vec{u}\, \mathrm{div}\, \vec{u} \big) - \eta \big( \mathrm{div}\, \vec{u} \big)^2, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \big( \vec{u} \cdot \mathrm{div}\, (\vec{u} \otimes \vec{w}) \big) &= \sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (u_j w_i)}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w_i u_i) - \sum_{i,j=1}^{3} w_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big( u_j \sum_{i=1}^{3} (w_i u_i) \Big) - \sum_{i=1}^{3} w_i \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= \mathrm{div}\, \big( \vec{u} (\vec{w} \cdot \vec{u}) \big) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Подставим (4.4) – (4.9) в (4.3). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big( \frac{\vec{u}^2}{2} \Big) + \mathrm{div}\, \Big( (\vec{u} - \vec{w}) \Big( \frac{\vec{u}^2}{2} + p \Big) - \vec{u} (\vec{w} \cdot \vec{u}) - \\ - \eta \big[ \vec{u} \times \vec{\omega} \big] - \eta (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \eta \vec{u}\, \mathrm{div}\, \vec{u} \Big) = \\ = -\eta \big( \nabla \otimes \vec{u} \big)^2 - \eta \big( \mathrm{div}\, \vec{u} \big)^2 - \vec{w} \cdot \big( (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p \big). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Поскольку

$$\vec{w} = \tau \big( (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p \big),$$

из (4.10) выводим (4.1). □

**Теорема 8.** *Уравнение баланса кинетической энергии для КГД системы (1.1) – (1.2) может быть представлено в виде*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big)+div\left((\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+p\Big)-\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})-\eta\big[\vec{u}\times rot\ \vec{u}\big]-2\eta\vec{u}\ div\ \vec{u}\right)=-\varPhi_{**}. \quad (4.11)$$

*Здесь*

$$\varPhi_{**}=\eta\big(rot\ \vec{u}\big)^2+2\eta\big(div\ \vec{u}\big)^2+\frac{\vec{w}^2}{\tau}. \quad (4.12)$$

*– неотрицательная диссипативная функция.*

*Доказательство.* Из (3.6) вытекает равенство

$$\eta\big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^2=\eta\vec{\omega}^2+\eta\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2+\eta\ \mathrm{div}\ \Big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}-\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big). \quad (4.13)$$

Принимая во внимание определение (3.1), преобразуем (4.1), (4.2) с помощью (4.13). Получим (4.11), (4.12). □

## 5. Энергетические соотношения

Определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_V \vec{u}^2\ dV, \quad t\in[0,\ T_f]. \quad (5.1)$$

Любое из равенств (4.1), (4.11) может быть использовано для доказательства теоремы о диссипации энергии для КГД системы (1.1) – (1.2).

**Теорема 9** (о диссипации энергии)**.** *Пусть* $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$, $p=p(\vec{x},t)$ *– решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5)*. Тогда полная кинетическая энергия жидкости* $E(t)$ *является функцией класса* $C^1([0,T_f])$ *и при каждом* $t\in[0,T_f]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{dE(t)}{dt}\leqslant 0. \quad (5.2)$$

*Доказательство.* Пусть $(\vec{u},p)$ – решение начально–краевой задачи (1.1) – (1.5). Подставив его в (4.11), проинтегрируем полученное равенство по множеству $V$. Принимая во внимание правило Лейбница, формулу Гаусса–Остроградского и определение (5.1), получим

$$\frac{dE(t)}{dt}+\oiint\limits_{\partial V}(\vec{A}_{**}\cdot\vec{n})\ dS=-\int\limits_V \varPhi_{**}\ dV. \quad (5.3)$$

При этом $E(t)\in C^1([0,T_f])$. Векторное поле

$$\vec{A}_{**}=(\vec{u}-\vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+p\Big)-\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})-\eta\big[\vec{u}\times\mathrm{rot}\ \vec{u}\big]-2\eta\vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{u}$$

при фиксированном $t$ непрерывно дифференцируемо в $V$ и непрерывно в $\overline{V}$. Из свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ и граничных условий (1.4) следует, что поверхностный интеграл в левой части (5.3) обращается в ноль. Поэтому

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int\limits_V \varPhi_{**}\, dV. \tag{5.4}$$

Неравенство (5.2) вытекает из (5.4), если принять во внимание неотрицательность диссипативной функции $\varPhi_{**}$. □

В монографии [4] был получен следующий результат.

**Теорема 10.** *При любом $t \in [0, T_f]$ выполняется неравенство*

$$E(t) \leqslant E(0) e^{-Mt}, \tag{5.5}$$

*причем $M = (2\eta)/c_F$. Если $T_f = +\infty$, то полная кинетическая энергия $E(t)$ убывает на промежутке $[0,\ +\infty)$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$, т.е.*

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0. \tag{5.6}$$

**Теорема 11.** *Пусть $T_f = +\infty$. Тогда справедливо энергетическое равенство*

$$E(0) = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_V \Big(\eta\big(rot\ \vec{u}\big)^2 + 2\eta\big(div\ \vec{u}\big)^2 + \frac{\vec{w}^2}{\tau}\Big)\, dV. \tag{5.7}$$

*Доказательство.* Принимая во внимание (5.6), проинтегрируем (5.4) по времени $t$ на промежутке $[0, +\infty)$. Получим

$$E(0) = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_V \varPhi_{**}\, dV. \tag{5.8}$$

Преобразовав правую часть (5.8) с помощью (4.12), приходим к равенству (5.7). □

Пусть $Q_\infty = V \times [0, +\infty)$. Непосредственным следствием (5.7) яляются энергетические оценки

$$\int\limits_{Q_\infty} \big(\mathrm{rot}\ \vec{u}\big)^2\, dVdt \leqslant \frac{E(0)}{\eta}, \tag{5.9}$$

$$\int\limits_{Q_\infty} \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big)^2\, dVdt \leqslant \frac{E(0)}{2\eta}, \tag{5.10}$$

$$\int\limits_{Q_\infty} \big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)^2\, dVdt \leqslant \frac{E(0)}{\tau}. \tag{5.11}$$

Если $E(0) = 0$, то из (5.9) и (5.10) следует, что $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ и $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$ для всех $(\vec{x}, t) \in Q_\infty$. По теореме 6 для каждого $(\vec{x}, t) \in Q_\infty$ выполняются равенства

$\vec{u}(\vec{x},t)=0$, $p(\vec{x},t)=0$. Таким образом, решение будет равновесным. С физической точки зрения это означает, что покоящаяся жидкость не может самопроизвольно начать движение в замкнутой полости.

## 6. Интегральный инвариант

Уравнения гидродинамики часто обладают дополнительными законами сохранения. Например, для квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2) справедливо уравнение баланса момента импульса [3]. Изучим вопрос о существовании других законов сохранения для указанной системы. Определим кинетическую энергию единицы объема жидкости по формуле

$$K=\frac{\vec{u}^2}{2}. \tag{6.1}$$

Представим (1.2) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{\beta}+\nabla\big(p-\eta\ \mathrm{div}\ \vec{u}\big)=0. \tag{6.2}$$

Здесь

$$\vec{\beta}=\big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u}-\mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\vec{w})-\eta\Delta\vec{u}. \tag{6.3}$$

Символом $H$ обозначим множество пар $(\vec{u},p)$ функций, таких, что $\vec{u}\in\mathbf{C}^3(\overline{Q})$, $p\in C^3(\overline{Q})$.

**Теорема 12.** *Пусть* $(\vec{u},p)$ *– классическое решение начально-краевой задачи* (1.1) – (1.5), *принадлежащее классу гладкости* $H$. *Тогда для любого* $t\in[0,T_f]$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_V \big(\vec{\omega}\cdot\nabla K\big)\ dV=\int\limits_V \big(\vec{\omega}_0\cdot\nabla K_0\big)\ dV, \tag{6.4}$$

*где* $\vec{\omega}_0=rot\ \vec{u}_0$, $K_0={\vec{u}_0}^2/2$.

*Доказательство.* Подействуем оператором «rot» на (6.2). Поскольку

$$\mathrm{rot}\ \big(\nabla\varphi\big)=0, \tag{6.5}$$

где

$$\varphi=p-\eta\ \mathrm{div}\ \vec{u},$$

получим

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\mathrm{rot}\ \vec{\beta}=0. \tag{6.6}$$

Умножим равенство (6.6) скалярно на вектор $\nabla K$:

$$\Big(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\cdot\nabla K\Big)+\big(\nabla K\cdot\mathrm{rot}\ \vec{\beta}\big)=0. \tag{6.7}$$

Принимая во внимание теорему Шварца, формулы (3.2), (3.3) и (6.5), а также тождество

$$\mathrm{div}\ \vec{\omega}=\mathrm{div}\ \big(\mathrm{rot}\ \vec{u}\big)=0,$$

приведем (6.7) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{\omega}\cdot\nabla K\big) + \mathrm{div}\,\left(\big[\vec{\beta}\times\nabla K\big] - \vec{\omega}\frac{\partial K}{\partial t}\right) = 0. \qquad (6.8)$$

Можно еще преобразовать левую часть (6.8) с помощью (6.1) и (3.4). Это дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{\omega}\cdot\nabla K\big) + \mathrm{div}\,\left(\big[\vec{\beta}\times(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big] + \big[\vec{\beta}\times\big[\vec{u}\times\vec{\omega}\big]\big] - \vec{\omega}\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)\right) = 0. \qquad (6.9)$$

Проинтегрируем (6.9) по $V$, а затем в полученном соотношении воспользуемся правилом Лейбница и формулой Гаусса–Остроградского. Будем иметь

$$\frac{dJ(t)}{dt} + \oiint\limits_{\partial V}(\vec{B}\cdot\vec{n})\;dS = 0. \qquad (6.10)$$

Здесь

$$J(t) = \int\limits_{V}\big(\vec{\omega}\cdot\nabla K\big)\;dV, \quad t\in[0,T_f]. \qquad (6.11)$$

Векторное поле

$$\vec{B} = \big[\vec{\beta}\times(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big] + \big[\vec{\beta}\times\big[\vec{u}\times\vec{\omega}\big]\big] - \vec{\omega}\Big(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big)$$

при фиксированном $t$ непрерывно дифференцируемо в $\overline{V}$. Из свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ и первого краевого условия (1.4) следует, что поверхностный интеграл в левой части (6.10) обращается в ноль. Формула (6.10) принимает вид

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0. \qquad (6.12)$$

Из (6.12) следует, что

$$J(t) = J(0), \quad t\in[0,T_f]. \qquad (6.13)$$

Равенство (6.13) эквивалентно (6.4). Оно означает, что величина $J(t)$, определяемая формулой (6.11), представляет собой интегральный инвариант для КГД системы на гладком решении начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). □

Закон сохранения в локальной форме (6.8) для классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости был получен, например, в работе А.Ф. Шевякова и М. Оберлака [9]. При этом вектор $\vec{\beta} = \vec{\beta}_{NS}$ вычислялся по формуле

$$\vec{\beta} = \big[\vec{\omega}\times\vec{u}\big] - \eta\Delta\vec{u}.$$

**Заключение**

Единственность классического решения поставленной начально-краевой задачи доказана в [4]. Вопрос о его существовании является очень сложным. Представляют интерес теоремы о несуществовании решений КГД системы определенного класса (потенциальных, однородно-винтовых) для конкретных задач. Это может стать темой дальнейших исследований. Проблема поиска новых законов сохранения и интегральных инвариантов для КГД уравнений также является актуальной.

## Список литературы


[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[4] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[5] Шеретов Ю.В. Точные решения квазигидродинамической системы на основе формулы Био-Савара // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49. https://doi.org/10.26456/vtpmk525

[6] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976. 391 с.

[7] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

[8] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 256 с.

[9] Cheviakov A.F., Oberlack M. Generalized Ertel's theorem and infinite hierarchies of conserved quantities for three-dimensional time-dependent Euler and Navier-Stokes // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. Pp. 368–386. https://doi.org/10.1017/jfm.2014.611


## Образец цитирования


Шеретов Ю.В. О свойствах решений основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 5–19. https://doi.org/10.26456/vtpmk536


## Сведения об авторах


1. **Шеретов Юрий Владимирович**
   заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

   *Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*
   *E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru*

**ON THE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF MAIN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS**

**Sheretov Yurii Vladimirovich**
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.*
*E-mail:* *Sheretov.YV@tversu.ru*

*Received 10.07.2019, revised 12.08.2019.*

For quasi-hydrodynamic system, describing the motions of weakly compressible viscous fluid, the main initial-boundary problem is posed. It is shown that there are no nonequilibrium solutions to this problem with irrotational solenoidal velocity field. For quasi-hydrodynamic system some new energy equalities and inequalities are derived. Its dissipative properties are investigated. The additional conservation law is obtained. The corresponding integral invariant is constructed.

**Keywords:** quasi-hydrodynamic system, Navier-Stokes equations, dissipative properties, intergal invariants, vortex flows.

### Citation

Sheretov Yu.V., "On the properties of solutions of main initial-boundary value problem for quasi-hydrodynamic equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 3, 5–19 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk536

### References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[3] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[4] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[5] Sheretov Yu.V., "Exact solutions of quasi-hydrodynamic system on the base of Biot-Savart formula", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 38–49 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk525.

[6] Mikhajlov V.P., *Differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 391 pp.

[7] Rektoris K., *Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike i tekhnike [Variational methods in mathematical physics and technology]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (in Russian), 589 pp.

[8] Serrin Dzh., *Matematicheskie osnovy klassicheskoj mekhaniki zhidkosti [Mathematical foundations of classical fluid mechanics]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2001 (in Russian), 256 pp.

[9] Cheviakov A.F., Oberlack M., "Generalized Ertel's theorem and infinite hierarchies of conserved quantities for three-dimensional time-dependent Euler and Navier-Stokes", *Journal of Fluid Mechanics*, **760** (2014), 368–386, https://doi.org/10.1017/jfm.2014.611.