УДК 519.685, 330.322(075)

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДИВЕРСИФИКАЦИИ МНОГОПЕРИОДНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

Михно В.Н., Михно Г.А., Иванова Т.Ю.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 02.08.2019, после переработки 02.09.2019.

В статье предлагается решение задачи распределения инвестиций на множестве многопериодных инвестиционных проектов в условиях возможной остановки реализации любого проекта в любой неопределенный период времени. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена практической востребованностью в формальных методах обоснования диверсификации инвестиций в указанных условиях и слабой развитостью таких методов. В основу постановки и решения задачи положены ее представление моделью антагонистической игры и содержательная интерпретация решения игры применительно к задаче распределения инвестиций. Проведены конкретизации соответствующих теоретико-игровых моделей задачи, в одной из которых в качестве целевого показателя инвестора используется достигаемый уровень капитализации, в другой - уровень потерь в капитализации. Применение конкретизированных моделей иллюстрируется на примере решения тестовой задачи диверсификации инвестиций на множестве гипотетических многопериодных инвестиционных проектов. Показана устойчивость получаемой согласно предложенному подходу диверсификации инвестиций к изменениям времени остановки реализации анализируемых проектов. Строгая обоснованность оптимальности получаемой диверсификации и ее устойчивость подчеркивают целесообразность использования предлагаемого подхода на практике.

Ключевые слова: многопериодный инвестиционный проект, портфель многопериодных инвестиций, диверсификация, функция выигрыша, уровень капитализации, модель антагонистической игры, неопределенность по времени.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 64–73.
https://doi.org/10.26456/vtpmk540

Введение

При портфельном анализе многопериодных инвестиционных проектов [1, 2] возникает необходимость учета возможности прекращения (в общем случае без дальнейшего возобновления) реализации любого из проектов в любой из заранее не известных моментов времени до завершения планового инвестиционного горизонта. Наиболее характерна указанная возможность для реальных многопериодных инвестиционных проектов [3, 4]. Основным подходом учета указанной неопределенности при анализе многопериодных инвестиционных проектов в настоящее время является количественная оценка риска остановки реализации проекта. Однако факторы, обуславливающие непредвиденное прекращение реализации проектов, являются неуправляемыми для инвестора. Кроме того, априорная информация, необходимая для оценки возможности остановки проекта, имеет низкую достоверность. Изложенные обстоятельства и высокая практическая востребованность повышения обоснованности диверсификации инвестиционных вложений в реальные многопериодные проекты обуславливают актуальность задачи развития методов формирования портфеля реальных многопериодных инвестиционных проектов в условиях возможности непредвиденной остановки реализации последних.

В статье в основу решения сформулированной задачи положено ее представление теоретико-игровой моделью антагонистического конфликта между инвестором и факторами, определяющими возможность преждевременной остановки реализации проекта и объединенными условно в противоборствующую сторону. Функция выигрыша инвестора в игре определяется либо уровнем капитализации, достигаемой анализируемыми проектами в субпериодах реализации проектов, либо величиной потери капитализации в случае прекращения реализации проекта в субпериодах. Вычисление функции выигрыша обеспечивается путем описания многопериодных инвестиционных проектов моделью полного финансового плана (см. [1, 3]). В результате задача формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов сводится к задаче поиска решения конечной антагонистической игры. Показано, что решение игры имеет содержательную интерпретацию, которая определяет оптимальную диверсификацию инвестиционных вложений. Осуществляется конкретизация постановок задачи диверсификации инвестиционных вложений по критерию уровня капитализации и по критерию потерь в уровне капитализации при непредвиденной остановке реализации проектов. Рассмотрена тестовая задача формирования портфеля многопериодных инвестиций и сравнение результатов ее решения с использованием теоретико-игровых моделей по указанным выше критериям.

1. Постановка задачи

Пусть $I = \{1, \ 2, \ \ldots, \ \ N\}$ - множество многопериодных инвестиционных проектов. Рассмотрим задачу формирования портфеля $x = (x_1, \ \ x_2, \ \ldots, \ x_N)$, $x \in X = \left\{x \in R^N \middle| \ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ \ldots, N\right\}$ многопериодных инвестиционных проектов, которая сводится к определению долей x_i вложений ограниченного инвестиционного капитала в анализируемые проекты $i \in I$. Вектор $x = (x_1, \ \ x_2, \ \ldots, \ x_N)$ определяет диверсификацию инвестиционных вложений между проектами из множества I. Полагаем, что по независящим от инвестора причинам реализация любого из проектов $i \in I$ в любой (неопределенный) период $t = 0, 1, \ldots, T$ может быть прекращена без дальнейшего ее возобновления. Момент $t = 0$ определяет начало реализации проектов, а момент $t = T$ определяет момент планового завершение проектов. Ситуация, когда реализация проекта прекращается в момент $t = 0$ означает, что его реализация не будет начата. При сформулированных положениях имеем задачу формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов в условиях неопределенности относительно момента прекращения реализации проектов. Кроме того, полагаем, что момент остановки реализации любого проекта обусловлен неуправляемыми инвестором факторами, которые находятся в распоряжении некоторой условной стороны со строго противоположными инвестору интересами. Возможные действия данной стороны определяются множеством $K = \{0, 1, 2, \dots T\}$ моментов времени остановки реализации проекта. Пусть далее отображение $\varphi : I \times K \to R^1$ задает полезность для инвестора ситуации $(i, t) \in I \times K$, когда инвестор выбирает проект $i \in I$ и его реализация прекращается в период $t \in K$. Полагаем при этом, что действия инвестора по выбору проекта $i \in I$ и действия противоборствующей инвестору стороны по выбору момента времени $t \in K$ прекращения реализации любого проекта из множества I независимы. Иными словами, инвестор и противоборствующая ему сторона не имеют информации в момент принятия решений о конкретных выборах друг друга.

При принятых допущениях рассматриваемый конфликт может моделироваться конечной антагонистической игрой [5]

$$G = \{I,\ K,\ \varphi\}, \tag{1}$$

где первым игроком является инвестор с множеством I чистых стратегий; вторым игроком – противоборствующая сторона с множеством K чистых стратегий; φ - функция выигрыша первого игрока (инвестора), определяющая его выигрыши в ситуациях $(i,\ t) \in I \times K$.

Обозначим далее в смешанном расширении [6] игры (1) через A – множество смешанных стратегий игрока 1 (инвестора), через B – множество смешанных стратегий игрока 2. Для элементов множеств $A,\ B$, т.е. для смешанных стратегий игроков, примем обозначения $\alpha = (\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_N)$ и $\beta = (\beta_0,\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_T)$ соответственно, где α_i – вероятность применения инвестором чистой стратегии (инвестиционного проекта) i, β_t вероятность прекращения реализации проекта в момент времени t. Функция выигрыша $\Phi : A \times B \to R^1$ игрока 1 в смешанном расширении игры (1) задается для ситуаций $(\alpha,\ \beta)$ в смешанных стратегиях математическим ожиданием выигрыша (см. [6])

$$\Phi\left(\alpha,\ \beta\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T} \alpha_i \beta_t \varphi(i,\ t). \tag{2}$$

Пусть $\{\alpha^*,\ \beta^*,\ v\}$ – решение смешанного расширения игры G, где $\alpha^*,\ \beta^*$ - оптимальные стратегии игроков 1, 2 соответственно, v – значение игры. При этом $(\alpha^*,\ \beta^*) = arg\max_{\alpha\in A} \min_{\beta\in B} \Phi\ (\alpha,\ \beta)$. Смысловая сущность смешанных стратегий игроков в игре G и вектора $x \in X$, определяющего некоторую диверсификацию инвестиционных вложений, показывают, что вероятности α_i в смешанных стратегиях $\alpha = (\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_N) \in A$ инвестора могут трактоваться как доли инвестиционных вложений в проекты $i \in I$. Последнее означает, что оптимальная стратегия $\alpha^* = (\alpha_1^*,\ \dots,\ \alpha_N^*) \in A$ инвестора в смешанном расширении игры G определяет оптимальную диверсификацию $x^* = (x_1^*,\ \dots,\ x_N^*) \in X$ инвестиционных вложений в рассматриваемой задаче формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов. Следовательно, решение смешанного расширения игры (1) дает решение рассматриваемой задачи формирования портфеля. Применение теоретико-игровой модели (1) для нахождения оптимального инвестиционного портфеля в условиях рассматриваемой временной неопределенности требует конкретизации функции выигрыша инвестора.

2. Модель диверсификации по критерию капитализации

Конкретизируем теоретико-игровую модель (1) для поиска оптимальной диверсификации инвестиционных вложений при временной неопределенности путем задания в качестве функции φ выигрыша инвестора остаточную стоимость (по другому уровень капитализации) $\varphi(i,\ t)$, обеспечиваемую проектом $i \in I$ на моменты времени $t = 0,\ \ldots,\ T$, где T – плановый инвестиционный горизонт.

Следуя [1], для вычисления значений функции φ в ситуациях $(i,\ t) \in I \times K$ используем представление многопериодных инвестиционных проектов моделями полного финансового плана. Такое представление задается следующими данными (см. [1, 3]):

1. потоком инвестиционных платежей $z_t(i)$, связанных с проектом $i \in I$ в каждом периоде $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$ инвестиционного горизонта;

2. одинаковым для всех проектов требуемым уровнем Y изъятия средств (из денежного потока проекта) на текущее потребление;

3. вектором $f = (f_0,\ \ f_1,\ \ldots,\ f_T)$, определяющим структуру изъятий на потребление по периодам, так что величина $f_t \bullet Y$ определяет изъятия на потребление в периоде t;

4. процентными ставками d_t по дополняющему (фиктивному или реальному) инвестированию при наличии излишков капитала и процентными ставками s_t по дополняющему (фиктивному или реальному) заимствованию капитала при недостаче средств для продолжения реализации проекта, $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$;

5. базовыми платежами W_t, $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$ инвестора, т.е. платежами, которые осуществляются и будут осуществляться инвестором по текущему плану его действий, не связанному с анализируемыми проектами.

С использованием моделей полных финансовых планов для анализируемых проектов значения функций выигрыша в ситуациях $(i,\ t) \in I \times K$ вычисляются по следующим соотношениям (см. [3]):

$$\varphi(i,\ t) = \begin{cases} W_t + z_t(i) - f_t \bullet Y, \quad t = 0, \\ W_t + z_t(i) - f_t \bullet Y,\ t > 0,\ \varphi(i,\ t-1) = 0, \\ W_t + z_t(i) - f_t \bullet Y + (1 + d_t) \bullet \varphi(i,\ t-1),\ t > 0,\ \varphi(i,\ t-1) > 0, \\ W_t + z_t(i) - f_t \bullet Y + (1 + s_t) \bullet \varphi(i,\ t-1),\ t > 0,\ \varphi(i,\ t-1) < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

В матричных обозначениях соотношения (3) задают матрицу $\varphi = \|\varphi_{it}\|$ выигрышей в игре (1), где $\varphi_{it} = \varphi(i,\ t)$, $i = 1,\ \ldots,\ N; t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$. Данная матрица вместе с множествами чистых стратегий игроков полностью задают компоненты теоретико-игровой модели рассматриваемой задачи формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов по критерию капитализации.

Пример 1. Проиллюстрируем применение теоретико-игровой модели (1), (3) для формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов на тестовой задаче, заимствованной из [2], полагая при этом, что необходимо учитывать возможность прекращения реализации любого проекта в любой момент времени планового интервала. В рассматриваемой задаче исходные данные по анализируемому множеству $I = \{1,\ 2,\ 3\}$ трехпериодных инвестиционных проектов представлены в таблице 1.

Таблица 1: Исходные данные по проектам

Момент времени	t	0	1	2	3
Проценты по инвестированию	d_t		0.05	0.07	0.07
Проценты по заимствованию	s_t		0.12	0.10	0.10
Инвестиционные платежи: Проект 1	$z_t(1)$	-500	-400	800	400
Проект 2	$z_t(2)$	-300	-800	1200	200
Проект 3	$z_t(3)$	-900	800	360	-10
Базовые платежи	W_t	600	100	-200	800
Изъятия	$f_t{-}Y$	20	22	24	26

С использованием (3) получаем матрицу φ выигрышей в игре G (по критерию капитализации)

$$\varphi = \begin{pmatrix} 80 & -238 & 314 & 1510 \\ 280 & -428 & 505 & 1515 \\ -320 & 520 & 692 & 1504 \end{pmatrix}.$$

Здесь результаты вычислений в матрице представлены с округлением до целых чисел.

Решение игры (1) с множеством $I = \{1,\ 2,\ 3\}$ чистых стратегий инвестора, с множеством $K = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ чистых стратегий конфликтующей с инвестором стороны и с матрицей φ выигрышей инвестора приводит к следующим оптимальным стратегиям игроков: $\alpha^* = (0,\ 0.58,\ 0.42)$, $\beta^* = (0.59,\ 0.41,\ 0,\ 0)$. Тогда, согласно указанной выше интерпретации смешанных стратегий инвестора, оптимальная диверсификация $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*) \in X$ инвестиционных вложений в рассматриваемом примере формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов определяется вектором $x^* = (0,\ 0.58,\ 0.42)$. Последнее означает, что оптимальными долями инвестиционных вложений являются 0% инвестиционного фонда в проект №1, 58% - в проект №2 и 42% - в проект №3. При этом для второго игрока (т.е. противоборствующей стороны) оптимальная стратегия β^* рекомендует с вероятностью 0.59 осуществить остановку реализации проектов в стартовый момент времени $t = 0$, с вероятностью 0.41 - в период $t = 1$. Остановка реализации проектов в периоды $t = 2,\ t = 3$ нецелесообразна.

3. Модель диверсификации по критерию потерь в капитализации

Конкретизируем теперь теоретико-игровую модель (1) для поиска оптимальной диверсификации инвестиционных вложений на основе задания функции выигрыша инвестора критерием возможных потерь в остаточной стоимости. Такой критерий аналогичен критерию Сэвиджа [7] в задачах принятия решений. В нашем случае меру $r(i,\ t)$ потерь для любого $i \in I$ и любого $t \in K$ определим как разницу между максимально возможным уровнем капитализации, обеспечиваемым в момент $t \in K$ проектами из множества I, и уровнем капитализации, обеспечиваемым проектом i :

$$r\,(i,\ t) = \max_{j\in I} \varphi(j,\ t)\ - \varphi(i,\ t). \tag{4}$$

Здесь заметим, что функция $r(i,\ t)$ в (4) по сути отражает проигрыш инвестора в ситуации, когда он выбирает для инвестиционных вложений проект i и его реализация прекращается в момент времени t. При этом полагается, что реализация остальных проектов из анализируемого множества не была прекращена до момента t включительно. С учетом указанного замечания функция $-r\,:\,I \times K \to R^1$ может интерпретироваться как функция выигрыша инвестора, определяющая его выигрыши в ситуациях $(i,\ t) \in I \times K$ по критерию потерь. Заменив теперь в (1) функцию φ на функцию $-r$, а в выражении (2) значения $\varphi(i,\ t)$ на значения $-r\,(i,\ t)$ приходим к игре

$$G = \{I,\ K,\ -r\}\,, \tag{5}$$

которая определяет теоретико-игровую модель задачи диверсификации инвестиционных вложений по критерию потерь вида (4).

Пример 2. Проиллюстрируем применение теоретико-игровой модели (5) для формирования портфеля многопериодных инвестиционных проектов на тестовой задаче из примера 1. С использованием соотношений (3), (4) и указанных комментариев по компонентам игры (5) получаем матрицу $-r = \|-r_{jt}\|\,,\ i = 1,\ \ldots,\ N; t = 0,\ \ldots,\ T$ выигрышей в данной игре с округлением элементов матрицы до целых чисел:

$$-r = \begin{pmatrix} -200 & -758 & -378 & -4 \\ 0 & -948 & -187 & 0 \\ -600 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Решение игры (5) с рассматриваемыми множествами $I,\ K$ чистых стратегий и матрицей выигрыша $-r$ приводит к следующим оптимальным стратегиям игроков:

$$\alpha^* = (\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \alpha_3^*) = (0,\ 0.4,\ 0.6)\,,\ \beta^* = (\beta_0^*\ ,\ \beta_1^*,\ \beta_2^*,\ \beta_3^*) = (0.61,\ 0.39,\ 0,\ 0)\,.$$

Таким образом при использовании критерия (минимизации) потерь в уровне достигаемой капитализации оптимальными долями инвестиционных вложений являются $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0.4,\ x_3^* = 0.6$ в первый, второй и третий проекты соответственно. Заметим, что по сравнению с портфелем, формируемым по критерию капитализации, в полученном портфеле приоритеты между вторым и третьим проектами поменялись. Стратегия конфликтующей с инвестором стороны по выбору момента прерывания реализации проекта практически не изменилась.

Укажем здесь на важное свойство ситуаций $(\alpha^*,\ \beta^*)$, определяющих оптимальные стратегии сторон в играх (1), (3) и (4), (5) и соответствующих оптимальных распределений инвестиционных вложений. Известно [теория игр], что ситуация

$(\alpha^*,\ \beta^*)$ является ситуацией равновесия, отклонение от которой не выгодно ни одной из сторон, если противная сторона не изменяет стратегии из данной ситуации. Иными словами, самостоятельное отклонения от указанных оптимальных стратегий приводит к потерям по используемому критерию. В этом смысле определяемая с использование рассмотренных моделей диверсификация инвестиций является устойчивой.

Заключение

Распределение инвестиционного капитала на множестве многопериодных инвестиционных проектов требует учета возможности остановки реализации (без дальнейшего ее возобновления) любого из анализируемых проектов в любой неопределенный на плановом инвестиционном интервале момент времени. Для широкого класса многопериодных инвестиционных проектов условия неопределенности по времени их реализации и задача поиска оптимальной диверсификации инвестиций адекватно представляются моделями конечной антагонистической игры. Оптимальные стратегии инвестора как одного из игроков в такой игре имеют содержательную интерпретацию, которая определяет оптимальную диверсификацию инвестиционных вложений в смысле целевого показателя инвестора. В общем случае использование различных целевых показателей в модели конечной антагонистической игры задачи диверсификации инвестиций при рассмотренной временной неопределенности приводит к различным оптимальным стратегиям распределения инвестиционного капитала. При этом существенным преимуществом использования определяемых распределений инвестиции является их принадлежность к ситуации равновесия, что обеспечивает устойчивость диверсификации к действиям «противника». Использованное в статье допущение об антагонистическом взаимодействии инвестора и (условного) противника, объединяющего все факторы, которые могут привести к остановке реализации инвестиционного проекта в неопределенный момент времени, является для многих случаев довольно жестким. Более адекватным для многих реальных ситуаций представляется предположение о неантагонистическом взаимодействии инвестора и «противника» и использование модели биматричной игры (см. [5]) для оптимальной диверсификации инвестиций. Исследование указанной возможности является одним из направлений развития рассмотренных в статье положений.

Список литературы

[1] Михно В.Н. Модель максимальной энтропии для формирования инвестиционного портфеля // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 45–55.

[2] Михно В.Н., Канарейкина А.С. Модель формирования портфеля многопериодных инвестиций // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 79–88.

[3] Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. СПб.: Питер, 2001. 432 с.

[4] Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика. М.: ИНФРА-М, 2002. 383 с.

[5] Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 983 с.

[6] Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981. 336 с.

[7] Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 296 с.

Образец цитирования

Михно В.Н., Михно Г.А., Иванова Т.Ю. Теоретико-игровая модель для диверсификации многопериодных инвестиций при неопределенности по времени // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. №3. С. 64–73. https://doi.org/10.26456/vtpmk540

Сведения об авторах

1. **Михно Владимир Николаевич**
заведующий кафедрой математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: vmikhno@gmail.com

2. **Михно Галина Алексеевна**
доцент кафедры математического моделирования и вычислительной математики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: g.mikhno@yandex.ru

3. **Иванова Татьяна Юрьевна**
аспирант кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: trapex@rambler.ru

GAME-THEORETIC MODEL FOR DIVERSIFICATION OF MULTI-PERIOD INVESTMENTS UNDER UNCERTAINTY OVER TIME

Mikhno Vladimir Nikolaevich
Head of the Department of Mathematical Statistics and System Analysis, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov str., TverSU.
E-mail: vmikhno@gmail.com

Mikhno Galina Alekseevna
Associate Professor in the Department of Mathematical Modeling and Computational Mathematics, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov str., TverSU.
E-mail: g.mikhno@yandex.ru

Ivanova Tatiana Iuryevna
Post-graduate student at the Department of Mathematical Statistics and System Analysis, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: trapex@rambler.ru

Received 02.08.2019, revised 02.09.2019.

The article proposes a solution to the problem of investment allocation on a set of multi-period investment projects in the conditions of possible stop of any project in any indefinite period of time. The relevance of the problem is due to the practical demand in the formal methods of justification of diversification of investments in these conditions and the weak development of such methods. The basis for the formulation and solution of the problem is its representation by the antagonistic game model and a meaningful interpretation of the game solution in relation to the problem of investment distribution. Conducted specifying the relevant game-theoretic models of tasks, one of which as a target of the investor is used the achieved level of capitalization, the other with losses in market capitalization. The application of specified models is illustrated by the example of solving the test problem of investment diversification on a set of hypothetical multi-period investment projects. The stability of investment diversification obtained according to the proposed approach to changes in the time of stopping the implementation of the analyzed projects is shown. The strict validity of the optimality of the resulting diversification and its sustainability emphasize the feasibility of using the proposed approach in practice.

Keywords: multi-period investment project, multi-period investment portfolio, diversification, winning function, capitalization level, antagonistic game model, time uncertainty.

Citation

Mikhno V.N., Mikhno G.A., Ivanova T.Iu., “Game-theoretic model for diversification of multi-period investments under uncertainty over time”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 3, 64–73 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk540

References

[1] Mikhno V.N., “Maximum entropy model for forming an investment portfolio”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 1, 45–55 (in Russian).

[2] Mikhno V.N., Kanareikina A.S., “Model of forming multiperiod investments portfolio”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 79–88 (in Russian).

[3] Krushvits L., *Investitsionnye Raschety [Investment calculations]*, Piter Publ., SPb., 2001 (in Russian), 432 pp.

[4] Melkumov Ya.S., *Finansovye vychisleniya. Teoriya i praktika [Financial calculations. Theory and practice]*, INFRA-M Publ., Moscow, 2002 (in Russian), 383 pp.

[5] Fon Nejman Dzh., Morgenshtern O., *Teoriya Igr i Ekonomicheskoe Povedenie [Game Theory and Economic Behavior]*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (in Russian), 983 pp.

[6] Dyubin G.N., Suzdal V.G., *Vvedenie v prikladnuyu teoriyu igr [Introduction to Applied Game Theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (in Russian), 336 pp.

[7] Dubov Yu.A., Travkin S.I., Yakimets V.N., *Mnogokriterialnye Modeli Formirovaniya i Vybora Variantov Sistem [Multi-criteria Models of the Formation and Selection of Options for Systems]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 296 pp.