СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 517.977.52

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОБРАТНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Юлдашев Т.К.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан

Поступила в редакцию 30.09.2019, после переработки 28.11.2019.

Изучены вопросы слабо обобщенной разрешимости нелинейной обратной задачи в нелинейном оптимальном управлении тепловыми процессами для одного типа параболического дифференциального уравнения. Параболическое дифференциальное уравнение, которое рассматривается в данной работе, относительно функции состояния является линейным, относительно функции восстановления – нелинейным и относительно управляющей функции оно является неявным. Параболическое уравнение рассмотрено при начально-граничных условиях. Для определения функции восстановления задано нелокальное интегральное условие. Получена система из двух счетных систем интегральных и функциональных уравнений относительно функции состояния и функции восстановления. При фиксированных значениях управляющей функции доказана однозначная разрешимость обратной задачи методом сжимающих отображений. Функционал качества имеет нелинейный вид. Сформулированы необходимые условия оптимальности нелинейного управления. Определение оптимальной управляющей функции сведено к сложному функционально-интегральному уравнению, процесс решения которого состоит из решения отдельно взятых двух нелинейных функциональных и интегральных уравнений. Нелинейные функциональные и интегральные уравнения решены методом последовательных приближений. Получены формулы для приближенного вычисления функции состояния управляемого процесса, функции восстановления и функции оптимального управления.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелинейная обратная задача, необходимые условия оптимальности управления, нелинейность управления, минимизация функционала.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 65–87.
https://doi.org/10.26456/vtpmk549

1. Введение

Решение некоторых задач математического моделирования тепловых процессов приводит к рассмотрению нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа. Теория обратных задач является одним из современных и важнейших разделов дифференциальных уравнений математической физики. Одним из классов качественно новых задач для дифференциальных уравнений являются нелокальные обратные задачи. Нелокальные задачи в виде интегральных условий встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить некоторые задачи исследования диффузии частиц в турбулентной плазме и некоторые задачи исследования процессов распространения тепла.

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами широко применяется при решении задач аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т. д. [1]– [8]. Эффективно используются различные аналитические и приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., напр. [9]– [15]).

Для нахождения решения прямых смешанных задач математической физики требуется задать коэффициенты уравнения, границу области, начальные и граничные условия. Обычно бывает, что во время решения практических задач экспериментальным путем количественные характеристики исследуемого объекта недоступны для непосредственного наблюдения или проведение самого эксперимента по тем или иным причинам невозможно. Тогда на практике исследователь может получить некоторую косвенную информацию и сделать заключение о свойствах изучаемого объекта. Данная информация определяется природой изучаемого объекта и здесь требуются математическая обработка и интерпретация результатов исследований. Часто возникают нелокальные интегральные условия, которые дают усредненную информацию об объекте. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, ставится проблема переопределения математической модели. Такие задачи относятся к классу обратных задач. Итак, под обратными задачами понимаются задачи, решение которых состоит в определении параметров данной модели по имеющимся результатам наблюдений и другой экспериментальной информации. Бывает так, что изучаются обратные задачи, в которых все неизвестные коэффициенты зависят только от временной переменной и не зависят от пространственных переменных. Бывает и наоборот, что искомые характеристики не меняются со временем, но зависят только от пространственных переменных. В теории обратных задач часто рассматриваются дифференциальные уравнения параболического типа в связи с многочисленными приложениями.

В данной работе рассматриваются вопросы обобщенного и приближенного решения нелинейной обратной задачи оптимального управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины для одного типа параболического дифференциального уравнения при смешанных и нелокальном условиях и с квадратичным критерием оптимальности. Решается прямая смешанная и обратная нелокальная нелинейная задача для параболического уравнения. Формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, вычисляется управляющая функция. Рассматривается квадратичный функционал качества управления в задаче распространения тепла, объединяющий критерий минимума расхода энергии на управление и максимального быстродействия. Квадратичный критерий качества управления удобен для рассмотрения задач оптимального управления тем, что путем дифференцирования качество управления сводится к линейной функции.

Статья состоит из семи пунктов. Во введении обосновывается актуальность работы и кратко излагается содержание данной статьи. В первом пункте ставится нелинейная обратная задача оптимального управления для параболического уравнения. Прямая смешанная задача для параболического уравнения задается при помощи начальных и граничных условий. Для однозначного определения функции восстановления рассматривается дополнительное условие в интегральной форме. В третьем пункте изучается прямая смешанная задача при фиксированных значениях функции переопределения и управляющей функции. В четвертом пункте решается обратная задача: решение данной обратной задачи при фиксированных значениях управляющей функции сводится к решению системы из двух счетных систем функциональных и интегральных уравнений относительно функции переопределения и функции состояния, соответственно. В пятом пункте строится оптимальное управление. Однозначно определяется функция управления исходя из минимизации квадратичного функционала качества. В шестом пункте приводятся формулы для вычисления оптимального процесса и функционала качества. Доказывается, что функционал качества принимает конечное значение. В последнем пункте статьи подытоживаются результаты работы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим в области Ω следующее параболическое уравнение и управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\eta_1(t)\,\beta(x)+\eta_2(t)\,u(t,x)+f(t,x,\beta(x),p(t)) \qquad (1)$$

при начальном условии

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad x\in\Omega_l \qquad (2)$$

и при граничных условиях Бенара

$$u(t,0)=u(t,l)=0,\ t\in\Omega_T, \qquad (3)$$

а также при дополнительном условии в интегральной форме

$$\int_0^T \Theta(t)\,u(t,x)\,dt=\psi(x),\ \ x\in\Omega_l, \qquad (4)$$

где $f(t,x,\beta,p)\in C(\Omega\times\Upsilon)$ — функция внешнего источника $p(t)\in C(\Omega_T)$ — управляющая функция, $u(t,x)\in C(\Omega)$ — функция состояния управляемого процесса, $\varphi(x)$ — функция распределения тепла по стрежню в начальный момент времени, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\in C^2(\Omega_l)$, $\beta(x)\in C(\Omega_l)$ — функция восстановления,

$\eta_i(t) \in C(\Omega_T)$, $i = 1\,, 2$, $\Theta\,(t) \in C(\Omega_T)$, $\psi\,(x) \in C(\Omega_l)$, $\Upsilon \equiv [0\,, M^*]$, $0 < M^* < \infty$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0\,, T]$, $\Omega_l \equiv [0\,, l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Итак в настоящей работе в отличие от [16] исследуется параболическое уравнение, которое относительно функции состояния является линейным и относительно функции восстановления оно является нелинейным дифференциальным уравнением. Рассматривается нелокальная обратная задача нелинейного оптимального управления. Изучаются вопросы разрешимости функции состояния $u\,(t,\, x)$ и переопределения функции восстановления $\beta\,(x)$. Интегральная форма в условии (4) связана с тем, что часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования в обратной задаче либо принципиально недоступен для измерения, либо проведение такого измерения дорого. Тогда в качестве дополнительной информации для однозначного определения функции восстановления служит нелокальное условие в интегральной форме. В работе также формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, и вычисляются функция управления и функция состояния.

Дифференциальное уравнение (1) содержит тройку неизвестных функций: $\{u\,(t\,,\, x) \in C\,(\Omega)\,,\ \beta\,(x)\, \in C\,(\Omega_l)\,,\ p\,(t)\, \in C\,(\Omega_T)\}$. Для полного определения этой тройки не будет достаточно использование одних условий (2)–(4). Поэтому в работе рассматриваются вопросы минимизации квадратичного функционала качества. Методику данной работы также можно будет применять и при решении других задач нелинейного оптимального управления, связанное с процессом теплопередачи, например в задачах управления металлургическими печами. При решении таких задачах оптимального управления требуется исследование математических моделей управления процессами, позволяющие в режиме реального времени прогнозировать распределение температуры нагреваемых материалов в зависимости от изменения подаваемой мощности, время нагрева тел, режимов нагрева и т. д.

Рассмотрим спектральную задачу

$$b''\,(x) + \lambda^2\, b\,(x) = 0\,,\ \ b\,(0) = b\,(l) = 0,$$

где $0 < \lambda$.

Собственные функции этой спектральной задачи имеют вид $b_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\,\sin\lambda_n x$, в которых $\lambda_n = \dfrac{\pi\, n}{l}$ — соответствующие собственные значения. Собственные функции этой спектральной задачи образуют полную систему ортонормированных функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2\,(\Omega_l)$.

Поэтому используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения прямой смешанной задачи (1)–(3) в виде следующего ряда Фурье

$$u\,(t\,,\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x), \tag{5}$$

где $a_n(t) = \displaystyle\int_0^l u\,(t,\, y)\, b_n(y)\, d\,y$.

Предполагается, что

$$f\,(t\,,\, x\,,\, \beta\,(x)\,,\, p\,(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\beta\,,\, p) \cdot b_n(x), \tag{6}$$

$$\beta\,(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(x), \tag{7}$$

где $f_n(\beta\,,\,p)=\int_0^l f\,(t\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(t))\;b_n(y)\,d\,y$, $\beta_n=\int_0^l\beta\,(y)\,b_n(y)\,d\,y$.

Задача. Требуется найти функцию восстановления $\overline{\beta}\,(x)$, управляющую функцию $\overline{p}\,(t)\in\{\,\overline{p}:\,|\,\overline{p}\,(t)\,|\leq M^{*},\;\;t\in\Omega_T\}$ и соответствующее им функцию состояния $\overline{u}\,(t\,,\,x)$, которые доставляют минимум функционалу

$$J\,[p]=\int_0^l\,[\,u\,(T\,,\,y)-\xi\,(y)]^2\,d\,y+\alpha\int_0^T p^2(t)\,d\,t, \tag{8}$$

где $\xi\,(x)$ — заданная непрерывная функция такая, что $\xi\,(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,b_n(x)$, $\xi_n=\int_0^l\xi\,(y)\,b_n(y)\,d\,y$, $\xi\,(0)=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\,\xi_n\,|<\infty$, $0<\alpha=\text{const}$.

3. Прямая смешанная задача (1)–(3)

Воспользуемся следующими известными пространствами

$$\overline{C}_u^{\,1\,,\,2}(\Omega)=\left\{\,u:\;u\,(t\,,\,x)\in C^{\,1\,,\,2}(\Omega)\,,\;u\,(t\,,\,0)=u\,(t\,,\,l)=0\right\},$$

$$\overline{C}_{\Phi}^{\,1\,,\,2}(\Omega)=\left\{\,\Phi:\;\Phi\,(t\,,\,x)\in C^{\,1\,,\,2}(\Omega)\,,\,\Phi\,(T\,,\,x)=0\right\}.$$

Замыкание этих пространств по норме

$$\|\,u\,\|_{\overline{H}\,(\Omega)}=\sqrt{\int_0^T\int_0^l\,|\,u\,(t\,,\,y)\,|^2\;d\,y\,d\,t}<\infty$$

обозначается, соответственно через $\overline{H}_u(\Omega)$, $\overline{H}_{\Phi}(\Omega)$.

Определение 1. Если функция $u\,(t\,,\,x)\,\in\overline{H}_u(\Omega)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u\,(t\,,\,y)\left[\frac{\partial\,\Phi\,(t\,,\,y)}{\partial\,t}-\frac{\partial^2\,\Phi\,(t\,,\,y)}{\partial\,y^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\Big[\eta_1(t)\,\beta\,(y)+\eta_2(t)\,u\,(t,y)+f\,(t,y,\beta\,(y),p\,(t))\Big]\,\Phi\,(t,y)\right\}d\,y\,d\,t=\int_0^l\varphi\,[\Phi\,(t,y)]_{t=0}\,d\,y$$

для любого $\Phi\,(t\,,\,x)\,\in\,\overline{H}_{\Phi}(\Omega)$, то она называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Рассматриваются также следующие банаховые пространства:

1. Пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\|\,a\,(t)\,\|_{\,B_2(\,\Omega_T)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{t\in\,\Omega_T}\,|\,a_n(t)\,|\right)^2}.$$

2. Координатное гильбертово пространство ℓ_2 с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty.$$

3. Пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций $\vartheta(x)$ в области Ω_l с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 dy} < \infty.$$

Как и в работе [16] решение смешанной задачи (1)–(3) при помощи определения слабо обобщенного решения и рядов Фурье (5)–(7) представляется в виде следующего ряда Фурье

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \omega_n(t) + \int_0^t G_n(t, s) \left[\eta_1(s) \beta_n + \eta_2(s) u_n(s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n b_n(y), p(s)\right) b_n(y) dy \right] ds \right\}, \tag{9}$$

где $\omega_n(t) = \varphi_n G_n(t, 0)$, $G_n(t, s) = e^{-\lambda_n^2 (t-s)}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1). $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$,

2). $\| f(t, x, \beta, p) \|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$.

Тогда для функции (9) *справедливо, что* $u(t, x) \in \overline{H}(\Omega)$.

Доказательство. При фиксированных значениях функции восстановления и функции управления подставляем формулу (9) в интеграл $\Im = \int_0^T \int_0^l u^2(t, y)\, dy\, dt$:

$$\Im = \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\omega_n(t) + \int_0^t G_n(t, s) \left(\eta_1(s) \beta_n + \eta_2(s) u_n(s) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(z), p(s)\right) b_n(z) dz \right) ds \right] \right\}^2 dy\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) \cdot b_n(y) \right\}^2 dy\, dt +$$

$$+2 \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) b_n(y) \right\} \left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t, s) \left(\eta_1(s) \beta_n + \eta_2(s) u_n(s) \right) ds \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t, s) \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(z), p(s)\right) b_n(z) dz\, ds \right\} \right] b_i(y)\, dy\, dt +$$

$$+\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\,\beta_n+\eta_2(s)\,u_n(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^l f\Big(s\,,\,z\,,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(z)\,,\,p\,(s)\Big)\,b_n(z)\,d\,z\right]d\,s\,b_n(y)\right\}^2 d\,y\,d\,t.$$

Применяем неравенство Коши–Буняковского, неравенство Бесселя и учтём, что $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,\sin\,\dfrac{\pi\,n}{l}$. Тогда получаем следующую оценку

$$\Im\leq 2\int_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\,\varphi_n G_n(t\,,\,0)\,|\right]^2 d\,t\,+\frac{4\,l}{\pi^2}\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|\,\frac{1}{n}\,\varphi_n G_n(t\,,\,0)\right|\times$$

$$\times\int_0^t\left\{|\,\eta_1(s)\,|\,\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\,G_n(t\,,\,s)\,\beta_n\,|\right]+|\,\eta_2(s)\,|\,\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\,G_n(t\,,\,s)\,u_n(s)\,|\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t\,,\,s)\int_0^l f\Big(s\,,\,z\,,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(z)\,,\,p\,(s)\Big)\,b_n\,(y)\,d\,y\right|\right]\right\}d\,s\,d\,t+$$

$$+\left\{\int_0^T\int_0^t\left\{|\,\eta_1(s)\,|\,\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\,G_n(t\,,\,s)\;\beta_n\,|\right]+|\,\eta_2(s)\,|\,\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\,G_n(t\,,\,s)\;u_n(s)\,|\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t\,,\,s)\;\int_0^l f\Big(s\,,\,z\,,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(z)\,,\,p\,(s)\Big)b_n(y)\,d\,y\right|\right]\right\}d\,s\,d\,t\right\}^2\leq$$

$$\leq 2\,T\,[\chi_1\,\chi_2]^2+\frac{4\,l}{\pi^2}\,\chi_0\,\chi_1\,(\chi_2)^2\times$$

$$\times\left[\chi_3\,\|\,\beta\,\|_{\ell_2}+\chi_4\,\|\,u\,(t)\,\|_{B_2(T)}+\int_0^T\int_0^t\left\|f\Big(s\,,\,z\,,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(z)\,,\,p\,(s)\Big)\right\|_{L_2(\Omega_l)}d\,s\,d\,t\right]+$$

$$+(\chi_2)^2\left[\chi_3\,\|\,\beta\,\|_{\ell_2}+\chi_4\,\|\,u\,(t)\,\|_{B_2(T)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^t\left\|f\Big(s\,,\,z\,,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\cdot b_n(z)\,,\,p\,(s)\Big)\right\|_{L_2(\Omega_l)}d\,s\,d\,t\right]^2<\infty,$$

где $\chi_0=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}}\leq 2$, $\chi_1=\|\,\varphi\,\|_{\ell_2}$, $\chi_2=\|\,G\,(t\,,\,s)\,\|_{B_2\,(T)}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n^4}}=\dfrac{l^2}{\pi^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}}\leq\dfrac{\sqrt{2}\,l^2}{\pi^2}$, $\chi_{2+i}=\displaystyle\int_0^T\int_0^t|\,\eta_i\,(s)\,|\;d\,s\,d\,t,\;\; i=1\,,\,2.$

Отсюда следует утверждения теоремы 1. □

4. Функция переопределения и решение обратной задача (1)–(4)

Теперь переходим к определению функции восстановления. Используем нелокальную условию (4). По условию задачи предполагается, что

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cdot b_n(x), \quad \psi_n = \int_0^l \psi(y) \cdot b_n(y)\, dy.$$

Из (9) получаем, что

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \int_0^T \Theta(t)\, \omega_n(t)\, dt + \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_n(t,s) \Big[\eta_1(s)\, \beta_n + \eta_2(s)\, u_n(s) + \right.$$
$$\left. + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\, b_n(y),\, p(s)\right) b_n(y)\, dy \Big]\, ds\, dt \right\}.$$

Отсюда имеем счетную систему нелинейных функциональных уравнений (ССНФУ)

$$\beta_n = \Im_1(\beta_n,\, u_n(t)) \equiv \gamma_{1n} - \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_n(t,\, s) \times$$
$$\times \left[\eta_2(s)\, u_n(s) + \int_0^l f\left(s,\, y,\, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(y),\, p(s)\right) b_n(y)\, dy \right] ds\, dt, \tag{10}$$

где

$$\gamma_{1n} = \tfrac{1}{\gamma_{0n}} \left(\psi_n - \int_0^T \Theta(t)\, \omega_n(t)\, dt \right), \; \gamma_{0n} = \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_n(t,s)\, \eta_1(s)\, ds\, dt \neq 0.$$

С другой стороны, из (9) имеем счетную систему интегральных уравнений

$$u_n(t) = \Im_2(\beta_n,\, u_n(t)) \equiv \omega_n(t) + \int_0^t G_n(t,\, s) \Big[\eta_1(s)\, \beta_n + \eta_2(s)\, u_n(s) +$$
$$+ \int_0^l f\left(s,\, y,\, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(y),\, p(s)\right) b_n(y)\, dy \Big] ds. \tag{11}$$

Теперь мы рассмотрим систему из двух счетных систем уравнений (СДССУ) (10) и (11)

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если:*

$$|\, f(t,\, x,\, \beta_1,\, p) - f(t,\, x,\, \beta_2,\, p)\,| \le M_0(t,\, x)\; |\, \beta_1 - \beta_2\,|,$$
$$\rho = \chi_2 \max\left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \sigma_1 \varepsilon_3)\; ;\; (\sigma_1\, \varepsilon_0 + \varepsilon_2) \right\} < 1,$$

то при фиксированных значениях функции управления СДССУ (10) *и* (11) *имеет единственную пару решений, соответственно, в пространствах* ℓ_2 *и* $B_2(T)$, *где*

$$\sigma_1 = \left\| \gamma_0^{-1} \right\|_{\ell_2}, \varepsilon_0 = \int_0^T |\, \Theta(t)\,| \int_0^t |\, \eta_2(s)\,|\; ds\, dt; \varepsilon_i = \max_t \int_0^t |\, \eta_i(s)\,|\; ds, \;\; i = 1,\, 2;$$

$$\varepsilon_3 = \max\left\{ \max_t \int_0^t \|\, M_0(s,x)\,\|_{L_2(\Omega_l)}\; ds; \; \int_0^T |\, \Theta(t)\,| \int_0^t \|\, M_0(s,x)\,\|_{L_2(\Omega_l)}\; ds\, dt \right\}.$$

Доказательство. Итерационный процесс для СДССУ (10) и (11) зададим следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_n^0 = \gamma_{1n}, \ \beta_n^{k+1} = \Im_1\left(\beta_n^k, \, u_n^k(t)\right), \\ u_n^0(t) = \omega_n(t), \ \ u_n^{k+1}(t) = \Im_1\left(\beta_n^k, \, u_n^k(t)\right), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

В силу условий теоремы, применяя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя, из (12) получаем, что справедливы следующие оценки

$$\left\| \beta^1 - \beta^0 \right\|_{\ell_2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{0n}|} \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t G_n(t, s) \times$$

$$\times \left| \eta_2(s)\, u_n^0(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 \cdot b_n(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right| ds\, dt \le$$

$$\le \sigma_1 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, s)\, |\eta_2(s)\, \omega_n(s)|\, ds\, dt +$$

$$+\sigma_1 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, s) \left| \int_0^l f\left(s, y, \beta^0(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right| ds\, dt \le$$

$$\le \sigma_1 \int_0^T |\Theta(t)| \cdot \| G(t, s) \|_{B_2(T)} \| \omega(t) \|_{B_2(T)} \int_0^t |\eta_2(s)|\, ds\, dt +$$

$$+\sigma_1 \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(s, y, \beta^0(y), p(s))\, b_n(y)\, dy \right]^2} ds\, dt \le$$

$$\le \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_1 \chi_2^2 + \sigma_1 \chi_2 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \| f(s, x, \beta^0, p) \|_{L_2(\Omega_l)}\, ds\, dt < \infty, \tag{13}$$

где $\sigma_1 = \left\| \gamma_0^{-1} \right\|_{\ell_2}$, $\varepsilon_0 = \displaystyle\int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t |\eta_2(s)|\, ds\, dt$;

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t, s) \Big[|\eta_1(s)| \cdot \left|\beta_n^0\right| + |\eta_2(s)| \cdot \left|u_n^0(s)\right| +$$

.

$$+ \left| \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 \cdot b_n(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right| \Big] ds \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t |\eta_1(s)|\, G_n(t,s)\, |\gamma_{1n}|\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t |\eta_2(s)|\, G_n(t,s)\, |\omega_n(s)|\, ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t, s) \left| \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1n} \cdot b_n(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right| ds \le$$

$$\le \varepsilon_1 \chi_2 \| \gamma_1 \|_{\ell_2} + \varepsilon_2 \chi_1 \chi_2^2 + \chi_2 \max_t \int_0^t \| f(s, x, \gamma_1, p) \|_{L_2(\Omega_l)}\, ds < \infty, \tag{14}$$

где $\varepsilon_i = \max\limits_t \int_0^t |\eta_i(s)|\, ds, \;\; i = 1, 2.$

Аналогично имеем

$$\|\beta^{k+1} - \beta^k\|_{\ell_2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{0n}|} \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t G_n(t, s)\, |\eta_2(s)| \cdot \left| u_n^k(s) - u_n^{k-1}(s) \right| ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_{0n}|} \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t G_n(t, s) \cdot \int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k b_n(y), p(s)\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{k-1} b_n(y), p(s)\right) \right| |b_n(y)|\, dy\, ds\, dt \le \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_2 \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+ \sigma_1 \chi_2 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n^k - \beta_n^{k-1}| \int_0^l M_0(s, y)\, |b_n(y)|\, dy\, ds\, dt \le$$

$$\le \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_2 \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+ \left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} \sigma_1 \chi_2 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l M_0(s, y)\, |b_n(y)|\, dy \right]^2}\, ds\, dt \le$$

$$\le \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_2 \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+ \left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} \sigma_1 \chi_2 \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \| M_0(s, x) \|_{L_2(\Omega_l)}\, ds\, dt; \tag{15}$$

$$\left\| u^{k+1}(t) - u^k(t) \right\|_{B_2(T)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t, s) \left[|\eta_1(s)| \cdot \left| \beta_n^k - \beta_n^{k-1} \right| + |\eta_2(s)| \cdot \left| u_n^k(s) - u_n^{k-1}(s) \right| + \right.$$

$$+ \int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k \cdot b_n(y), p(s)\right) - \right.$$

$$\left. \left. - f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{k-1} \cdot b_n(y), p(s)\right) \right| |b_n(y)|\, dy \right] ds \le$$

$$\le \varepsilon_1 \chi_2 \left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} + \varepsilon_2 \chi_2 \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+ \left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} \chi_2 \max_t \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l M_0(s, y) \cdot |b_n(y)|\, dy \right]^2}\, ds \le$$

$$\le \chi_2 \left(\varepsilon_1 + \max_t \int_0^t \| M_0(s, x) \|_{L_2(\Omega_l)}\, ds \right) \left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} +$$

$$+ \varepsilon_2 \chi_2 \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)}. \tag{16}$$

Здесь положим

$$\varepsilon_3 = \max\left\{\max_t \int_0^t \|M_0(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\, ds; \int_0^T |\Theta(t)| \int_0^t \|M_0(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)}\, ds\, dt\right\}.$$

Тогда из (15) и (16) имеем оценку

$$\left\| \beta^{k+1} - \beta^k \right\|_{\ell_2} + \left\| u^{k+1}(t) - u^k(t) \right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq \rho \cdot \left[\left\| \beta^k - \beta^{k-1} \right\|_{\ell_2} + \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} \right], \tag{17}$$

где $\rho = \chi_2 \max\left\{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \sigma_1 \varepsilon_3);\ (\sigma_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_2)\right\}$.

Из (17) в силу последнего условия теоремы следует, что операторы в правой части (10) и (11) являются сжимающими и имеют единственную пару неподвижных точек, соответственно в пространствах ℓ_2 и $B_2(T)$. Следовательно, из (13), (14) и (17) следует, что СДССУ (10) и (11) имеет единственную пару решений, соответственно, в пространствах ℓ_2 и $B_2(T)$. □

Таким образом нетрудно убедиться, что в предположениях поставленной задачи и выполнении условий теорем 1 и 2 обратная задача (1)–(4) имеет единственную пару функций $\{u(t,x); \beta(x)\}$ при фиксированных значениях функции управления $p(t)$ причем абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \{ \mu_n(t) +$$

$$+ \int_0^t G_n(t,s) \left[\eta_2(s)\, u_n(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right] ds -$$

$$- \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^t G_n(t,s) \cdot \eta_1(s) \int_0^T \Theta(\theta) \int_0^\theta G_n(\theta, \varsigma) \times$$

$$\times \left[\eta_2(\varsigma)\, u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\, b_n(y), p(\varsigma)\right) b_n(y)\, dy \right] d\varsigma\, d\theta\, ds \Bigg\}, \tag{18}$$

где $\mu_n(t) = \omega_n(t) + \gamma_{1n} \int_0^t G_n(t,s) \cdot \eta_1(s)\, ds$;

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \gamma_{1n} - \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_n(t,s) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\eta_2(s)\, u_n(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot b_n(y), p(s)\right) b_n(y)\, dy \right] ds\, dt \right\}. \tag{19}$$

5. Построение оптимального управления

Применение принципа максимума приводит нашу задачу к следующим необходимым условиям оптимальности (см., напр. [17] или [18, стр. 36–40])

$$\vartheta(t,x)\, f_p\, (t, x, \beta(x), p(t)) - 2\,\alpha\, p(t) = 0\,, \tag{20}$$

$$\vartheta\,(t\,,\,x)\,f_{p\,p}\ (t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t)) - 2\ \alpha < 0\ , \tag{21}$$

в котором $\vartheta\,(t\,,\,x)$ — обобщенное решение следующей задачи

$$\vartheta_{\,t}(t\,,\,x) + \vartheta_{\,x\,x}(t\,,\,x) = 0\ ,\ \ (t\,,\,x) \in \Omega,$$

$$\vartheta\,(t\,,\,x) = -2\ [u\,(T\,,\,x) - \xi\,(x)\,]\ ,\vartheta\,(t\,,\,0) = \vartheta\,(t\,,\,l) = 0\,,$$

сопряженной с задачей (1)–(3) и определяется по формуле

$$\vartheta\,(t\,,\,x) = -2\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{\,n}(\,x)\,G_{\,n}(T\,,\,t)\Bigg\{\mu_{\,n}(T) +$$

$$+\int_0^T G_n(T,s)\left[\eta_2(s)\,u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\,b_n(y),p\,(s)\right)b_{\,n}(y)\,d\,y\right]d\,s -$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^T G_n(T,s)\,\eta_1(s)\int_0^T \Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_2(\varsigma)\,u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\,b_n(y),p\,(\varsigma)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\varsigma\,d\,\theta\,d\,s - \xi_n\Bigg\}. \tag{22}$$

Предположим, что выполняется условие $f_p\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t)) \neq 0$. Тогда условия оптимальности (20), (21) перепишутся в следующем виде

$$2\,\alpha\,p\,(t)\,f_{p}^{-1}\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t)) = \vartheta\,(t\,,\,x)\ , \tag{23}$$

$$f_{\,p}\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t))\ \left(\frac{p\,(t)}{f_{\,p}\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t))}\right)_p > 0. \tag{24}$$

С учетом (24) из (22) и (23) получаем, что

$$\frac{\alpha\,p\,(t)}{\int_0^l\,f_p\,(t\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(t))\ b_{\,n}(y)\,d\,y} +$$

$$+\int_0^T G_n(T,t)\,G_n(T,s)\left[\eta_2(s)\,u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\,b_n(y),p\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right]\,d\,s -$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^T G_{\,n}(T\,,\,t)\cdot G_{\,n}\,(T\,,\,s)\cdot\eta_{\,1}(s)\int_0^T \Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_{\,n}(\theta\,,\,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_{\,2}(\varsigma)\,u_{\,n}(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma\,,\,y\,,\,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{\,n}\cdot b_{\,n}(y)\,,\ \,p\,(\varsigma)\right)\,b_{\,n}\,(y)\,d\,y\right]d\varsigma\,d\theta\,d\,s =$$

$$= (\,\mu_{\,n}(T) + \xi_{\,n})\ G_{\,n}(T\,,\,t),\ n \in N, \tag{25}$$

N – множество натуральных чисел.

Преобразуем следующий интеграл с двукратным применением формулу Дирихле

$$\int_0^T Q_{0\,n}(t,s)\int_0^T \Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)\,u_n(\varsigma) + \int_0^l f\,(\varsigma,y,\beta\,(y),p\,(\varsigma))\,b_n(y)\,d\,y\right]d\varsigma\,d\,\theta\,d\,s =$$

$$= \int_0^T Q_{0\,n}(t,s) \int_0^T G_n(0,\varsigma) \left[\eta_2(\varsigma)\, u_n(\varsigma) + \int_0^l f\,(\varsigma, y, \beta\,(y), p\,(\varsigma))\, b_n(y)\, d\,y\right] \nu_n(\varsigma)\, d\,\varsigma\, d\,s =$$

$$= \int_0^T Q_{\,1\,n}(t\,,\,\varsigma)\,\left[\eta_{\,2}\,(\varsigma)\, u_{\,n}(\varsigma) + \int_0^l f\,(\varsigma\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(\varsigma))\; b_{\,n}(y)\, d\,y\right] d\,\varsigma, \qquad (26)$$

где $Q_{\,0\,n}(t\,,\,s) = G_{\,n}(T\,,\,t) \cdot G_{\,n}(T\,,\,s) \cdot \eta_{\,1}\,(s)$, $\nu_{\,n}(\varsigma) = \int_\varsigma^T \Theta\,(\theta)\, G_{\,n}(\theta\,,\,0)\, d\,\theta$,

$$Q_{\,1\,n}(t\,,\,\varsigma) = G_{\,n}\,(0\,,\,\varsigma) \cdot \nu_{\,n}(\varsigma) \int_\varsigma^T Q_{\,0\,n}\,(t\,,\,s)\, d\,s,\; n \in N.$$

Подставляя (26) в (25), для каждого натурального числа n приходим к следующему сложному интегральному уравнению относительно функции управления $p\,(t)$

$$\frac{\alpha\, p\,(t)}{\int_0^l f_p\,(t\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(t))\;b_{\,n}\,(y)\,d\,y} +$$

$$+ \int_0^T Q_{\,2\,n}(t\,,\,s)\,\left[\eta_2(s)\, u_{\,n}(s) + \int_0^l f\,(s\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(s))\; b_{\,n}(y)\, d\,y\right] d\,s -$$

$$- \int_0^T Q_{\,3\,n}(t\,,\,\varsigma)\,\left[\eta_2(\varsigma)\, u_{\,n}(\varsigma) + \int_0^l f\,(\varsigma\,,\;y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(\varsigma))\; b_{\,n}(y)\, d\,y\right] d\,\varsigma = F\,(t), \quad (27)$$

где $Q_{2\,n}(t,s) = G_n(T,t)\, G_n(T,s)$, $Q_{3\,n}(t,\varsigma) = \dfrac{1}{\gamma_{0\,n}}\, Q_{1\,n}(t,\varsigma)$, $F\,(t) = (\mu_n(T) + \xi_n)\; G_n(T,t)$.

Для решения уравнения (27) воспользуемся следующим подходом. В уравнение (27) положим

$$\frac{\alpha\, p\,(t)}{\int_0^l f_p\,(t\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(t))\;b_{\,n}(y)\,d\,y} = g\,(t), \qquad (28)$$

где $g\,(t)\; \in C\,(\Omega_{\,T})$ — пока неизвестная функция. Но, мы сначала предположим, что она задана. Тогда из (28) имеем относительно функции управления $p\,(t)$ следующее нелинейное функциональное уравнение

$$p\,(t) = \frac{g\,(t)}{\alpha} \int_0^l f_p\,(t\,,\,y\,,\,\beta\,(y)\,,\,p\,(t))\; b_{\,n}(y)\, d\,y. \qquad (29)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$0 < \|\, f_p\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p\,(t))\,\|_{\,L_{\,2}(\Omega_{\,l})} \le M_{\,1}\,, 0 < M_{\,1} = \text{const};$$

$$|\, f_p\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p_{\,1}(t)) - f_p\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,p_{\,2}\,(t))\,| \le M_{\,2}(x)\;|\,p_{\,1}(t) - p_{\,2}(t)\,|\,;$$

$$q = \alpha^{-1} \max_{t \in \Omega_{\,T}} |g\,(t)\,| \cdot \|\, M_{\,2}(x)\,\|_{\,L_{\,2}(\Omega_{\,l})} < 1.$$

Тогда нелинейное функциональное уравнение (29) *имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций* $C\,(\Omega_{\,T})$, *которое находится из следующего итерационного процесса:*

$$p_0(t) = 0,\;\; p_{k+1}(t) = \frac{g\,(t)}{\alpha} \int_0^l f_p\,(t, y, \beta\,(y), p_k(t))\, b_n(y)\, d\,y,\;\; k = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots \qquad (30)$$

Доказательство. Из последовательных приближений (30) получаем, что справедливы оценки

$$| p_{k+1}(t) - p_0(t) | \leq \left| \frac{g(t)}{\alpha} \right| \int_0^l | f_p(t, y, \beta(y), p_k(t)) \, b_n(y) | \, dy \leq$$

$$\leq \frac{|g(t)|}{\alpha} \, \| f_p(t, x, \beta(x), p_k(t)) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq \frac{|g(t)|}{\alpha} M_1 < \infty;$$

$$| p_{k+1}(t) - p_k(t) | \leq$$

$$\leq \left| \frac{g(t)}{\alpha} \right| \int_0^l | f_p(t, y, \beta(y), p_k(t)) - f_p(t, y, \beta(y), p_{k-1}(t)) | \cdot | b_n(y) | \, dy \leq$$

$$\leq \left| \frac{g(t)}{\alpha} \right| \int_0^l M_2(y) \, | p_k(t) - p_{k-1}(t) | \cdot | b_n(y) | \, dy \leq$$

$$\leq \frac{|g(t)|}{\alpha} \, | p_k(t) - p_{k-1}(t) | \cdot \| M_2(x) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq q \, | p_k(t) - p_{k-1}(t) | .$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (29) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное функциональное уравнение (29) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Теорема доказана. $\square$

Это решение обозначим так

$$p(t) = h(t, g(t)). \tag{31}$$

Подставляя (31) в (27), с учетом (28) получаем следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g(t) = \Im(t; g) \equiv F(t) - \int_0^T Q_{2n}(t, s) \times$$

$$\times \left[\eta_2(s) \, u_n(s) + \int_0^l f(s, y, \beta(y), h(s, g(s))) \, b_n(y) \, dy \right] ds +$$

$$+ \int_0^T Q_{3n}(t, \varsigma) \left[\eta_2(\varsigma) u_n(\varsigma) + \int_0^l f(\varsigma, y, \beta(y), h(\varsigma, g(\varsigma))) \, b_n(y) \, dy \right] d\varsigma . \tag{32}$$

Для произвольной функции $\psi(t) \in C(\Omega_T)$ используется и следующая норма

$$\| \psi(t) \|_C = \max_{t \in \Omega_T} | \psi(t) | .$$

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$\xi(x) \in L_2(\Omega_l);$$

$$0 < \| f(t, x, \beta(x), h(t, g(t))) \|_{L_2(\Omega_l)} \leq M_1(t);$$

$$|\, f\,(t\,,\,x,\,\beta\,(x)\,,\,h_1) - f\,(t\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,h_2)| \le M_2(x)\;|\,h_1 - h_2\,|\,;$$

$$|\,h\;(t\,,\,g_1(t)) - h\;(t\,,\,g_2(t))\,| \le M_3\,|\,g_1(t) - g_2(t)\,|\,;$$

$$\tau = M_3\;\|\,M_2(x)\,\|_{L_2(\Omega_l)} \max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t\,,\,s)\,d\,s < 1,$$

где $K(t\,,\,s) \ge |\,Q_{2n}(t\,,\,s)\,| + |\,Q_{3n}(t\,,\,\varsigma)\,|$.

Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма (32) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций:* $g\,(t) \in C\,(\Omega_T)$*, которое может быть найдено из следующего итерационного процесса:*

$$g_0(t) = F\,(t)\,,\quad g_{k+1}(t) = \Im\,(t\,;\,g_k),\;\; k = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots \tag{33}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (33) получаем, что справедливы следующие оценки

$$\|\,g_{k+1}(t) - g_0(t)\,\|_C \le \max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t,s) \int_0^l |\,f\,(s,y,\beta\,(y),h\,(s,g_k(s)))\,b_n(y)\,|\,d\,y\,d\,s \le$$

$$\le \max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t,s)\,\|\,f\,(s,x,\beta\,(x),h_k(s))\|_{L_2(\Omega_l)}\,d\,s \le \max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t,s)\,M_1(s)\,d\,s < \infty,$$

где $h_k(s) = h\,(s\,,\,g_k(s))$, $K(t\,,\,s) \ge |\,Q_{2n}(t\,,\,s)\,| + |\,Q_{3n}(t\,,\,\varsigma)\,|$;

$$\|\,g_{k+1}(t) - g_k(t)\,\|_C \le$$

$$\le \max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t\,,\,s)\,\|\,f\,(s\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,h_k\,(s)) - f\,(s\,,\,x\,,\,\beta\,(x)\,,\,h_{k-1}(s))\,\|_{L_2(\Omega_l)}\,d\,s \le$$

$$\le M_3\;\|\,M_2(x)\,\|_{L_2(\Omega_l)}\;\max_{t\in\Omega_T} \int_0^T K\,(t\,,\,s)\,\|\,g_k(t) - g_{k-1}\,(t)\,\|_C\,d\,s =$$

$$= \tau\cdot\|\,g_k(t) - g_{k-1}(t)\,\|_C < \|\,g_k(t) - g_{k-1}(t)\,\|_C\,.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (32) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C\,(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (32) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $g\,(t) \in C\,(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

Подстановкой решения уравнения (32) в (31) определяется управляющая функция $p\,(t)$.

6. Построение оптимального процесса и вычисление минимального значения функционала

Согласно (18) оптимальный процесс находится по формуле

$$\overline{u}\,(t\,,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\,x)\times$$

$$\times\left\{\mu_n(t)+\int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n(s)+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n\,b_n(y),\overline{p}\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\,s-\right.$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^t G_n(t\,,\,s)\cdot\eta_1(s)\int_0^T\Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta\,,\,\varsigma)\times$$
$$\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\,\overline{u}_n(\varsigma)+\int_0^l f\left(\varsigma\,,\,y\,,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n\cdot b_n(y)\,,\,\overline{p}\,(\varsigma)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\varsigma\,d\theta\,d\,s\right\}. \qquad (34)$$

Согласно (19) следующим образом определяется функция восстановления

$$\overline{\beta}\,(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\,x)\left\{\gamma_{1\,n}-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^T\Theta\,(t)\int_0^t G_n(t\,,\,s)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n(s)+\int_0^l f\left(s\,,\,y\,,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n\cdot b_n(y)\,,\,\overline{p}\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\,s\,d\,t\right\}. \qquad (35)$$

Оптимальный процесс (34) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\overline{u}^{\,k+1}(t\,,\,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\,x)\times$$
$$\times\left\{\mu_n(t)+\int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n^k(s)+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n^k\,b_n(y),\overline{p}^k(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\,s-\right.$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^t G_n\,(t\,,\,s)\cdot\eta_1(s)\int_0^T\Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta\,,\,\varsigma)\times$$
$$\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\,\overline{u}_n^{\,k}(\varsigma)+\int_0^l f\left(\varsigma\,,\,y\,,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n^{\,k}\cdot b_n(y)\,,\,\overline{p}^{\,k}(\varsigma)\right)b_n(y)\,d\,y\right]d\varsigma\,d\theta\,d\,s\right\}. \qquad (36)$$

Функцию восстановления (35) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\overline{\beta}^{\,k+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\,x)\left\{\gamma_{1\,n}-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^T\Theta\,(t)\int_0^t G_n(t\,,\,s)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n^{\,k}(s)+\int_0^l f\left(s\,,\,y\,,\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n^{\,k}\cdot b_n(y)\,,\,\overline{p}^{\,k}(s)\right)b_n(y)d\,y\right]d\,s\,d\,t\right\}. \qquad (37)$$

Согласно формулам (8) и (36) минимальное значение функционала находится из следующей формулы

$$J\,[\overline{p}]=\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n(y)\left[\mu_n(t)+\int_0^t G_n(t\,,\,s)\times\right.\right.$$
$$\times\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n(s)+\int_0^l f\left(s\,,\,z\,,\,\overline{\beta}\,(z)\,,\,\overline{p}\,(s)\right)b_n(z)\,d\,z\right]d\,s-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^t G_n(t\,,\,s)\cdot\eta_1(s)\int_0^T\Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta\,,\,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_2(\varsigma)\,\overline{u}_n(\varsigma)+\int_0^l f\left(\varsigma\,,\,z\,\overline{\beta}\,(z)\,,\,\overline{p}\,(\varsigma)\right)\,b_n(z)\,d\,z\right]d\varsigma\,d\,\theta\,d\,s-\xi_n\Bigg]\Bigg\}^2\,d\,y+$$

$$+\,\alpha\int_0^T\left(\overline{p}\,(t)\right)^2\,d\,t\,. \tag{38}$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда функционал* (38) *принимает конечное значение.*

Доказательство. Достаточно показать, что сходятся следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(t), \tag{39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G_n\,(t\,,\,s)\int_0^l f\left(s\,,\,y\,,\,\overline{\beta}\,(y)\,,\,\overline{p}\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\,d\,s, \tag{40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^t G_n(t\,,\,s)\,\eta_1(s)\int_0^T\Theta\,(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta\,,\,\varsigma)\times$$

$$\times\int_0^l f\left(\varsigma,\,y,\,\overline{\beta}\,(y),\,\overline{p}\,(\varsigma)\right)b_n(y)\,d\,y\,d\varsigma\,d\,\theta\,d\,s. \tag{41}$$

Покажем абсолютную и равномерную сходимость рядов (39) и (40). Применяем неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\,\mu_n(t)\,|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\,\omega_n(t)\,|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\gamma_{1\,n}\int_0^t G_n(t\,,\,s)\cdot\eta_1(s)\,d\,s\right|\le$$

$$\le\|\,\varphi\,\|_{\ell_2}\,\|\,G\,(t,0)\,\|_{B_2(T)}+\varepsilon_1\,\|\,\gamma_1\,\|_{\ell_2}\,\|\,G\,(t,s)\,\|_{B_2(T)}=\chi_2\left(\chi_1+\varepsilon_1\,\|\,\gamma_1\,\|_{\ell_2}\right)<\infty,$$

где $\varepsilon_1=\max\limits_t\int_0^t|\,\eta_1(s)\,|\,d\,s$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left|G_n(t\,,\,s)\int_0^l f\left(s\,,\,y\,,\,\overline{\beta}\,(y)\,,\,\overline{p}\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right|d\,s\le$$

$$\le\int_0^t\|\,G\,(t\,,\,s)\,\|_{B_2(T)}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^l f\left(s\,,\,y\,,\,\overline{\beta}\,(y)\,,\,\overline{p}\,(s)\right)b_n(y)\,d\,y\right|^2}\,d\,s\le$$

$$\le\chi_2\int_0^t\left\|\,f\,(s\,,\,x\,,\,\overline{\beta}\,,\,\overline{p})\right\|_{L_2(\Omega_l)}\,d\,s<\infty.$$

Сходимость ряда (41) доказывается аналогично. □

Приближенное значение функционала вычисляется из следующего итерационного процесса

$$J\left[\overline{p}^{\,k+1}\right]=\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n(y)\left[\mu_n(t)+\int_0^t G_n(t,s)\times\right.\right.$$

$$\times\left[\eta_2(s)\,\overline{u}_n^{\,k}(s)+\int_0^l f\left(s,z,\overline{\beta}^{\,k}(z),\,\overline{p}^{\,k}(s)\right)b_n(z)\,dz\right]ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0\,n}}\int_0^t G_n(t,s)\cdot\eta_1(s)\int_0^T\Theta(\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\left.\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\,\overline{u}_n^{\,k}(\varsigma)+\int_0^l f\left(\varsigma,z,\overline{\beta}^{\,k}(z),\overline{p}^{\,k}(\varsigma)\right)b_n(z)\,dz\right]d\varsigma\,d\theta\,ds-\xi_n\right]\right\}^2dy+$$

$$+\alpha\int_0^T\left(\overline{p}^{\,k}(t)\right)^2dt. \tag{42}$$

Заключение

В работе предлагается методика решения нелинейного оптимального управления в нелинейной обратной задаче для одного типа параболического уравнения с начально-краевым и нелокальным условиями. Используется метод Фурье разделения переменных. На основе принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности функции управления при квадратичных критериях. Однозначно определяется функция оптимального управления из сложного интегрального уравнения (27). При этом используется метод последовательных приближений. Получена система из двух счетных систем уравнений для определения функции восстановления и функции состояния, функции оптимального управления. Функция восстановления и функция состояния оптимального управления определены в виде рядов Фурье (34) и (35). Определена формула вычисления минимального значения функционала (38). Приводятся формулы для приближенного вычисления оптимального процесса, функции восстановления и минимального значения функционала. При этом используются итерационные процессы (30), (36), (37) и (42). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение в развитии математической теории нелинейного оптимального управления в обратных задачах для систем с распределенными параметрами.

Список литературы

[1] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.

[2] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

[3] Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.

[4] Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 2003. 224 с.

[5] Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 412 с.

[6] Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.

[7] Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 680 с.

[8] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.

[9] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 56–103.

[10] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.

[11] Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: СО Наука, 1992. 193 с.

[12] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

[13] Kowalewski A. Optimal Control of an Infinite Order Hyperbolic System with Multiple Time-Varying Lags // Automatyka. 2011. Vol. 15. Pp. 53–65.

[14] Machado L., Abrunheiro L., Martins N.J. Variational and Optimal Control Approaches for the Second-Order Herglotz Problem on Spheres // Optimal Theory and its Applications. 2019. Vol. 182, № 3. Pp. 965–983.

[15] Hassan S.N., Niimi H.B., Yamashita N.J. Augmented Lagrangian Method with Alternating Constraints for Nonlinear Optimization Problems // Optimal Theory and its Applications. 2019. Vol. 181, № 3. Pp. 883–904.

[16] Юлдашев Т.К. Нелинейное оптимальное управление в обратной задаче для одной системы с параболическим уравнением // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 59–78.

[17] Керимбеков А., Наметкулова Р.Ж., Кадиримбетова А.К. Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 15. С. 50–61.

[18] Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.

Образец цитирования

Юлдашев Т.К. Об одном оптимальном управлении обратными тепловыми процессами с интегральным условием переопределения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 65–87. https://doi.org/10.26456/vtpmk549

Сведения об авторах

1. **Юлдашев Турсун Камалдинович**
доцент Узбекско-Израильского совместного факультета Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, Студгородок, 4, НУУзб.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ON AN OPTIMAL CONTROL OF INVERSE THERMAL PROCESSES WITH AN INTEGRAL CONDITION OF REDEFINITION

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Associate professor of Uzbek–Israel Joint Faculty,
Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan
Uzbekistan, 100174, Tashkent, Studgorodok, 4, NUUzb.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Received 30.09.2019, revised 28.11.2019.

The questions of weakly generalized solvability of a nonlinear inverse problem in nonlinear optimal control of thermal processes for one type of parabolic differential equation are studied. The parabolic differential equation with respect to the state function is linear, with respect to the recovery function is nonlinear and with respect to the control function is implicit. The parabolic equation is considered under initial boundary conditions. To determine the recovery function, a nonlocal integral condition is specified. A system of two countable systems of integral and functional equations is obtained with respect to the state function and the recovery function. For fixed values of the control function, the unique solvability of the inverse problem by the method of compressing mappings is proved. The quality functional is nonlinear. The necessary optimality conditions for nonlinear control are formulated. The determination of the optimal control function is reduced to a complex functional-integral equation, the process of solving which consists of solving separately taken two nonlinear functional and integral equations. Nonlinear functional and integral equations are solved by the method of successive approximations. Formulas are obtained for the approximate calculation of the state function of the controlled process, the recovery function, and the optimal control function.

Keywords: parabolic equation, nonlinear inverse problem, necessary conditions for optimal control, nonlinear control, minimization of the functional.

Citation

Yuldashev T.K., "On an optimal control of inverse thermal processes with an integral condition of redefinition", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 65–87 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk549

References

[1] Butkovskij A.G., *Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [The theory of optimal control of systems with distributed parameters]*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (in Russian), 474 pp.

[2] Evtushenko Yu.G., *Metody resheniya ekstremalnykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizatsii [Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems]*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (in Russian), 432 pp.

[3] Egorov A.I., *Optimalnoe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami [Optimal control of thermal and diffusion processes]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian), 464 pp.

[4] Kerimbekov A., *Nelinejnoe optimalnoe upravlenie linejnymi sistemami s raspredelennymi parametrami*, PhD Thesis, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 2003 (in Russian), 224 pp.

[5] Lions Zh.L., *Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]*, Mir Publ., Moscow, 1972 (in Russian), 412 pp.

[6] Lure K.A., *Optimalnoe upravlenie v zadachakh matematicheskoj fiziki [Optimal control in the problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 480 pp.

[7] Rapoport E.Ya., *Optimalnoe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami [Optimal control of systems with distributed parameter]*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 2009 (in Russian), 680 pp.

[8] Krotov V.F., Gurman V.I., *Metody i zadachi optimalnogo upravleniya [Methods and problems of optimal control]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 448 pp.

[9] Miller B.M., Rubinovich E.Ya., "Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations", *Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]*, **74**:12 (2013), 1969–2006.

[10] Srochko V.A., *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimalnogo upravleniya [Iterative methods for solving optimal control problems]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2000 (in Russian), 160 pp.

[11] Tyatyushkin A.I., *Chislennye metody i programmnye sredstva optimizatsii upravlyaemykh sistem [Numerical methods and software for optimization of control systems]*, SO Nauka Publ., Novosibirsk, 1992 (in Russian), 193 pp.

[12] Fedorenko R.P., *Priblizhennoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya [Approximate solution of optimal control problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian), 488 pp.

[13] Kowalewski A., "Optimal Control of an Infinite Order Hyperbolic System with Multiple Time-Varying Lags", *Automatyka*, **15** (2011), 53–65.

[14] Machado L., Abrunheiro L., Martins N.J., "Variational and Optimal Control Approaches for the Second-Order Herglotz Problem on Spheres", *Optimal Theory and its Applications*, **182**:3 (2019), 965–983.

[15] Hassan S.N., Niimi H.B., Yamashita N.J., "Augmented Lagrangian Method with Alternating Constraints for Nonlinear Optimization Problems", *Optimal Theory and its Applications*, **181**:3 (2019), 883–904.

[16] Yuldashev T.K., "Nonlinear optimal control in an inverse problem for a system with parabolic equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 59–78 (in Russian).

[17] Optimality Conditions in the Problem of Thermal Control with Integral-Differential Equation, "Optimality Conditions in the Problem of Thermal Control with Integral-Differential Equation", *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika [Izvestiya Irkutsk State Univers. Mathematics]*, **15** (2016), 50–61 (in Russian).

[18] Aleksandrov A.G., *Optimalnye i adaptivnye sistemy*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1989 (in Russian), 263 pp.