УДК 517.521.7, 517.443

О СУММИРОВАНИИ ПО АБЕЛЮ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ В R^n

Архипов С.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 03.11.2019, после переработки 20.12.2019.

Как известно, к наиболее часто употребляемым функциям на прямой относятся степенные функции. Многомерным аналогом степенных функций являются однородные, имеющие вид $\theta(\tau)|t|^\alpha$, в которых помимо параметра α присутствует произвольная функция на единичной сфере. При вычислении обратного преобразования Фурье этих функций имеются ограничения на порядок α. Одним из приемов для улучшения сходимости является суммирование по Абелю. В статье получены формулы суммирования по Абелю для обратного преобразования Фурье однородных функций, имеющих вид $\theta(\tau)|t|^\alpha$, $\tau \in S^{n-1} = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| = 1\}$, для различных функциональных пространств на единичной сфере.

Ключевые слова: суммирование по Абелю, обратное преобразование Фурье, однородные функции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 98–107.
https://doi.org/10.26456/vtpmk547

Введение

В настоящее время применяются различные подходы к вычислению преобразования Фурье однородных функций в $\mathbb{R}^n$

$$F\theta(\tau)|t|^\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)}\theta(\tau)|t|^\alpha\,dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{|x|\le N} e^{i(x,t)}\theta(\tau)|t|^\alpha\,dt, \tag{1}$$

где $t = |t|\tau$. Отметим, что $F[\cdot](t) = (2\pi)^n F^{-1}[\cdot](-t)$.

В статье [5], посвящённой вычислению характеристики по символу, показано, что (1) в силу L_1 и L_2-теории является сходящимся для достаточно гладкой функции $\theta(\tau)$ при $-n < \alpha < fracn2$. Для вычисления этого интеграла при $\alpha \ge -\frac{n}{2}$ применяется явная регуляризация, использующая средние следов на единичной сфере. Для этого были введены p.f.-интегралы и отмечалось, что их сходимость обеспечивается достаточной гладкостью функций на сфере. В [9] предложен подход, основанный на преобразовании Фурье обобщённых функций в $\mathbb{R}^n$. В [1] используется контурное интегрирование по двойным петлям в комплексной плоскости.

В книге [8] рассматривается суммирование интегралов по Абелю. Мы будем опираться на изложение метода суммирования Абеля из книги Стейна, Вейса [7]. Основываясь на этом подходе, вычислим обратное преобразование Фурье однородных функций.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\theta(\tau) \in C^\infty(S^{n-1})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на единичной сфере. Тогда при $\alpha > -n$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,t)} e^{-\varepsilon|t|} \theta(\tau)|t|^\alpha \, dt = \frac{2^\alpha}{\pi^{n/2}} \sum_{l,j} (-i)^l \theta_{lj} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{2}\right)} Y_{lj}(\tau). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $\theta(\tau) \in L_2^r(S^{n-1})$ — пространство дифференцируемых функций на сфере S^{n-1}, чьи производные до порядка r существуют и принадлежат пространству $L_2(S^{n-1})$ суммируемых с квадратом функций. Тогда* (2) *справедливо при $r \geq \alpha + \frac{n}{2}$ и $\alpha > -n$.*

1. Некоторые сведения из теории функций на сфере

Рассмотрим однородные гармонические многочлены порядка l: $P_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Будем называть сужение $P_l(x)$ на единичную сферу S^{n-1}*

$$|x|^{-l} P_l(x) = Y_l(\xi), \quad \xi = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

сферической гармоникой порядка l.

Лемма 1 ([5], с. 30)**.** *Пусть имеем произвольные сферические гармоники $Y_l(\xi)$ и $Y_k(\xi)$ разного порядка $k, l = 0, 1, 2, \dots$, $k \neq l$. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} Y_l(\xi) Y_k(\xi) \, d\xi = 0.$$

Обозначим через

$$L_2(S^{n-1}) = \left\{ \theta(\xi) : \left(\int\limits_{S^{n-1}} |\theta(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций на сфере со скалярным произведением

$$\int\limits_{S^{n-1}} \theta_1(\xi) \theta_2(\xi) \, d\xi.$$

Зафиксируем в $L_2(S^{n-1})$ ортонормированный базис из сферических гармоник порядка l: $Y_{lj}(\xi)$; $l = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, d(l)$, где $d(l)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка l

$$d(l) = \frac{(n + 2l - 2)\Gamma(n + l - 2)}{\Gamma(l + 1)\Gamma(n - 1)}.$$

Лемма 2 ([5], с. 30). *Функции* $\{Y_{lj}(\xi)\}$ *образуют полную ортонормированную систему функций на сфере* S^{n-1}.

Таким образом, каждую функцию из $L_2(S^{n-1})$ можно представить с помощью сходящегося в среднем квадратичном ряда Фурье-Лапласа

$$\theta(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(l)} \theta_{lj} Y_{lj}(\xi). \tag{3}$$

Коэффициенты разложения определяются по формулам

$$\theta_{lj} = \int\limits_{S^{n-1}} \theta(\xi) Y_{lj}(\xi)\, d\xi.$$

Введём функциональные пространства дробной гладкости для функций из $L_2(S^{n-1})$. Рассмотрим оператор Лапласа. Для его записи будем использовать сферические координаты:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos\varphi_1,\\
\xi_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,\\
\xi_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,\\
&\dots\\
\xi_{n-2} &= \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2},\\
\xi_{n-1} &= \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1},\\
\xi_n &= \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}$$

причём $0 \le \varphi_j \le \pi$, $j = 1, \dots, n-2$, $0 \le \varphi_{n-1} < 2\pi$.

Лапласиан в $\mathbb{R}^n$, рассмотренный в сферических координатах, допускает следующее представление

$$\begin{aligned}
\Delta &\equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta_\rho - \frac{1}{\rho^2}\Delta_\xi, \quad \text{где}\\
\Delta_\rho &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho},\\
\Delta_\xi &= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j (\sin\varphi_j)^{n-j-1}} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\left(\sin^{n-j-1}(\varphi_j)\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right),\\
q_1 &= 1,\\
q_j &= \prod_{k=1}^{j-1} (\sin\varphi_k)^2, \quad \text{при } j > 1.
\end{aligned}$$

Оператор Δ_ρ называется радиальной частью Δ, а Δ_ξ — сферическим оператором Лапласа или оператором Бельтрами-Лапласа. Будем обозначать через $\theta\big(\frac{x}{|x|}\big)$, $x \in \mathbb{R}^n$ продолжение функции $\theta(\xi)$ постоянным образом по радиальным направлениям $\xi \in S^{n-1}$. Понятно, что

$$\Delta_\xi \theta(\xi) = \Delta\theta\Big(\frac{x}{|x|}\Big)$$

в точках сферы и поэтому можно говорить о совпадении дифференциальных свойств на сфере и в пространстве.

Лемма 3 ([3], с. 144). *Собственными функциями оператора Δ_ξ являются сферические гармоники, причём*

$$\Delta_\xi Y_l(\xi) = l(l+n-2)Y_l(\xi), \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 2. *Оператор, определённый равенством*

$$T\theta = \sum_{l,j} t_l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi),$$

будем называть мультипликаторным, а его спектр $\{t_l\}$ мультипликатором по сферическим гармоникам ([10], с. 510).

Рассмотрим мультипликаторный оператор $(E+\Delta_\xi)^{\frac{r}{2}}$ с мультипликатором $\{(1+l(l+n-2))^{\frac{r}{2}}\}$, где E — единичный оператор.

Определение 3. *Если $0 < r < \infty$, то в пространство $L_2^r(S^{n-1})$ будем включать те функции $\theta(\xi)$, определённые на сфере, для которых*

$$(E+\Delta_\xi)^{\frac{r}{2}} \theta(\xi) \in L_2(S^{n-1}).$$

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Запишем формулу обратного преобразования Фурье однородной функции порядка α и сделаем замену переменной $r = |x||t|$:

$$F^{-1}\theta(\tau)|t|^\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,t)} \theta(\tau)|t|^\alpha \, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n |x|^{\alpha+n}} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^\infty e^{-i(\xi,\tau)r} \theta(\tau) r^{\alpha+n-1} \, dr \, d\tau.$$

Так как при $-n < \alpha < -\frac{n}{2}$ этот интеграл определяет обычную функцию (см. [5]), то можно просуммировать его не изменяя результата (см. [7], § 1):

$$F^{-1}\theta(\tau)|t|^\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n |x|^{\alpha+n}} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^\infty e^{-i(\xi,\tau)r} e^{-\varepsilon r} \theta(\tau) r^{\alpha+n-1} \, dr \, d\tau.$$

Применим во внутреннем интеграле формулу (3.381.4) из [2]:

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x} \, dx = \frac{1}{\mu^\nu} \Gamma(\nu), \quad \operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Тогда

$$F^{-1}\theta(\tau)|t|^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(2\pi)^n|x|^{\alpha+n}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\theta(\tau)}{(i(\xi,\tau)+\varepsilon)^{\alpha+n}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n|x|^{\alpha+n}} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\theta(\tau)}{\left(\frac{i(\xi,\tau)}{\varepsilon}+1\right)^{\alpha+n}}\, d\tau. \quad (4)$$

Вычислим отдельно выражение под знаком предела. Применим разложение в ряд справедливое при $|x|<1$:

$$(1+x)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\Gamma(k+1)} x^k.$$

Будем иметь при $\varepsilon > 1$

$$I = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{\theta(\tau)}{\left(\frac{i(\xi,\tau)}{\varepsilon}+1\right)^{\alpha+n}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \int\limits_{S^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{i(\xi,\tau)}{\varepsilon}\right)^k \theta(\tau)\, d\tau.$$

Поменяем местами знаки суммирования и интегрирования. Обоснование проведём позже.

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k\Gamma(k+1)} \int\limits_{S^{n-1}} (\xi,\tau)^k \theta(\tau)\, d\tau.$$

Подставим разложение (3) для $\theta(\tau)$ в ряд Фурье-Лапласа по сферическим гармоникам под знак интеграла

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k\Gamma(k+1)} \sum_{l,j} \theta_{lj} \int\limits_{S^{n-1}} (\xi,\tau)^k Y_{lj}(\tau)\, d\tau.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (26.80) из [4]:

$$\int\limits_{S^{n-1}} (\xi,\tau)^k Y_{lj}(\tau)\, d\tau = \frac{2^{1-k}\pi^{n/2}\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{l+n+k}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-l}{2}\right)} Y_{lj}(\xi),$$

если $k-l = 0, 2, 4, \ldots$, в остальных случаях целочисленных значений разности $k-l$ интеграл равен 0.

Применяя последнюю формулу, получим

$$I = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \sum_{l,j} \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \frac{2^{1-k}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha+n+k)}{\varepsilon^k\Gamma\left(\frac{l+n+k}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-l}{2}\right)}.$$

Отметим, что если $\frac{k-l}{2} = -1, -2, -3, \ldots$, то $\dfrac{1}{\Gamma\left(1+\frac{k-l}{2}\right)} = 0$. Введём новый индекс суммирования: $K = \frac{k-l}{2}$. Перепишем сумму ряда по k и поменяем местами знаки суммирования:

$$I = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \sum_{K=0}^{\infty} (-i)^{2K+l} \frac{2^{1-(2K+l)} \Gamma\left(2\left(K+\frac{\alpha+n+l}{2}\right)\right)}{\varepsilon^{2K+l} \Gamma\left(\frac{2l+2K+n}{2}\right) \Gamma(K+1)}.$$

Преобразуем гамма-функцию в числителе по формуле двойного аргумента:

$$I = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\alpha+n}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \left(\frac{-i}{\varepsilon}\right)^l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \times \sum_{K=0}^{\infty} (-i)^{2K} \frac{\Gamma\left(K+\frac{\alpha+n+l}{2}\right) \Gamma\left(K+\frac{\alpha+n+l+1}{2}\right)}{\varepsilon^{2K} \Gamma\left(K+l+\frac{n}{2}\right) \Gamma(K+1)}.$$

При $\varepsilon > 1$ второй ряд является гипергеометрическим. Он равномерно и абсолютно сходится, когда модуль аргумента меньше единицы. Используя обозначение гипергеометрического ряда, получаем

$$I = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\alpha+n}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \left(\frac{-i}{\varepsilon}\right)^l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n+l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+n+l}{2}, \frac{\alpha+n+l+1}{2}; l+\frac{n}{2}; -\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Очевидно, что при $\varepsilon > 1$ $-\frac{1}{\varepsilon^2} \in (-1, 0)$. Осуществим аналитическое продолжение гипергеометрического ряда в комплексную плоскость с разрезом по лучу $(1, \infty)$ с помощью преобразования $w = \frac{z}{z-1}$. (см. [2], 9.131.1):

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-w)^a {}_2F_1(a, c-b; c; w).$$

Тогда имеем

$$I = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\alpha+n}}{\varepsilon^{\alpha+n}} \sum_{l,j} \left(\frac{-i}{\varepsilon}\right)^l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \left(1 - \frac{1/\varepsilon^2}{1/\varepsilon^2+1}\right)^{\frac{\alpha+n+l}{2}} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n+l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+n+l}{2}, \frac{l-\alpha-1}{2}; l+\frac{n}{2}; \frac{1}{1+\varepsilon^2}\right).$$

Проводя преобразования, получаем справедливое при $\varepsilon > 0$ выражение для I:

$$I = \sum_{l,j} (-i)^l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)^{\frac{\alpha+n+l}{2}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n+l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+n+l}{2}, \frac{l-\alpha-1}{2}; l+\frac{n}{2}; \frac{1}{1+\varepsilon^2}\right).$$

Подставляя полученное выражение в (4) и переходя к пределу, мы придём к

$$F^{-1}\theta(\tau)|t|^\alpha == \frac{2^{\alpha+n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}} |x|^{\alpha+n}} \sum_{l,j} (-i)^l \theta_{lj} Y_{lj}(\xi) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+n+l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{\alpha+n+l}{2}, \frac{l-\alpha-1}{2}; l+\frac{n}{2}; 1\right).$$

Применим формулу для значения гипергеометрической функции в единице (см. [2], 9.122.1). После преобразований, получаем

$$F^{-1}\theta(\tau)|t|^{\alpha} = \frac{2^{\alpha}}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{\alpha+n}} \sum_{l,j}(-i)^{l}\frac{\Gamma\left(\frac{l+\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{2}\right)}\theta_{lj}Y_{lj}(\xi). \qquad (5)$$

В последнем выражении получен мультипликаторный оператор, причём его спектр имеет порядок

$$m_l = \frac{\Gamma\left(\frac{l+\alpha+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{2}\right)} \sim l^{\alpha+\frac{n}{2}} \quad \text{при } l \to \infty.$$

Так как $\theta(\tau) \in C^{\infty}(S^{n-1})$, то по теореме 4.8 из [5]

$$\theta_{lj} = O(l^{-k}) \quad \text{для всех } k > 0.$$

В силу этого получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд в (5). Это обосновывает перемены знаков суммирования и интегрирования.

Исходное предположение $-n < \alpha < -\frac{n}{2}$ можно расширить в область $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$ в силу аналитичности по α правой части в (2). □

Доказательство теоремы 2. Все произведённые вычисления в теореме 1 остаются в силе. Исследуем на сходимость ряд Фурье-Лапласа в (5).

Необходимо обеспечить достаточный порядок гладкости полученной функции на сфере. Мультипликатор m_l соответствует операции дифференцирования на сфере порядка $\alpha+\frac{n}{2}$. Для того, чтобы ряд был сходящимся в $L_2(S^{n-1})$ необходимо потребовать, чтобы $\theta(\tau) \in L_2^r(S^{n-1})$, где $r \geq \alpha + \frac{n}{2}$.

Отметим, что имеет место теорема вложения (см. [1], лемма 1.7):

$$L_2^r(S^{n-1}) \subset C^k(S^{n-1}) \text{ при } r \geq k + \frac{n}{2}.$$

Таким образом, ряды в (5) абсолютно и равномерно сходятся и их сумма принадлежит пространству $C^k(S^{n-1})$, если $r \geq k + \alpha + n$. □

Заключение

Для получения разложений в ряд плотностей многомерных устойчивых распределений необходимо находить обратное преобразование Фурье однородных функций в $\mathbb{R}^n$. При вычислении обратного преобразования Фурье этих функций имеются ограничения на порядок α. Одним из приемов для улучшения сходимости является суммирование по Абелю.

В статье получены формулы суммирования по Абелю для обратного преобразования Фурье этих функций, имеющих вид $\theta(\tau)|t|^{\alpha}$, $\tau \in S^{n-1} = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| = 1\}$, для различных функциональных пространств на единичной сфере.

Список литературы

[1] Архипов С.В. Разложения плотности строго устойчивых распределений в $\mathbb{R}^n$ в случае абсолютно непрерывной спектральной меры: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 1989. 102 с.

[2] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

[3] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 254 с.

[4] Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. 208 с.

[5] Самко С.Г. Обобщённые риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1980. Т. 156. С. 152–222.

[6] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[7] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

[8] Bochner S. Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley: University of California Press, 1955. 176 p.

[9] Lemoine C. Fourier transforms of homogeneous distributions // Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Classe di scienze. 1972. Vol. 26, № 1. Pp. 11–149.

[10] Rubin B. Introduction to Radon Transform: with elements of fractional calculations and harmonic analysis. 2015. 576 p.

Образец цитирования

Архипов С.В. О суммировании по Абелю обратного преобразования Фурье однородных функций в R^n // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 98–107. https://doi.org/10.26456/vtpmk547

Сведения об авторах

1. **Архипов Сергей Викторович**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

THE ABEL SUMMATION OF THE INVERSE FOURIER TRANSFORM OF THE HOMOGENEOUS FUNCTIONS IN R^n

Arkhipov Sergey Viktorovich
Associate Professor at the Department of Mathematical Statistics and System Analysis, Tver State University
170100, Russia, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 03.11.2019, revised 20.12.2019.

As is well known, the most commonly used functions on a line are powerful functions. A multidimensional analogue of power functions is homogeneous functions, which look like $\theta(\tau)|t|^\alpha$ and have an arbitrary function on a unit sphere additionally to the parameter α. The inverse Fourier transform for these functions results in restrictions for an order of α. One approach to improve convergence is Abel summation. Abel summation formulas for inverse Fourier transform of homogeneous functions have been derived in the article, which look like$\theta(\tau)|t|^\alpha$, $\tau \in S^{n-1} = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| = 1\}$ for various function spaces on a unit sphere.

Keywords: Abel summation formula, inverse Fourier transform, homogeneous functions.

Citation

Arkhipov S.V., “The Abel summation of the inverse Fourier transform of the homogeneous functions in R^n”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 98–107 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk547

References

[1] Arkhipov S.V., *Razlozheniya plotnosti strogo ustojchivykh raspredelenij v* $\mathbb{R}n$ *v sluchae absolyutno nepreryvnoj spektralnoj mery*, PhD Thesis, 1989 (in Russian), 102 pp.

[2] Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M., *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenij [Table of Integrals, Series, and Products]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1963 (in Russian), 1100 pp.

[3] Mikhlin S.G., *Mnogomernye singulyarnye integraly i integralnye uravneniya [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (in Russian), 254 pp.

[4] Samko S.G., *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya [Hypersingular Integrals and Their Applications]*, Rostov University Press, Rostov, 1984 (in Russian), 208 pp.

[5] Samko S.G., “Obobshchyonnye rissovy potentsialy i gipersingulyarnye integraly s odnorodnymi kharakteristikami, ikh simvoly i obrashchenie”, *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova Akademii nauk SSSR [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics]*, **156** (1980), 152–222 (in Russian).

[6] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Fractional integrals and derivatives: theory and applications]*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian), 688 pp.

[7] Stejn I., Vejs G., *Vvedenie v garmonicheskij analiz na evklidovykh prostranstvakh [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces]*, Mir Publ., Moscow, 1974 (in Russian), 333 pp.

[8] Bochner S., *Harmonic analysis and the theory of probability*, University of California Press, Berkeley, 1955, 176 pp.

[9] Lemoine C., “Fourier transforms of homogeneous distributions”, *Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Classe di scienze*, **26**:1 (1972), 11–149.

[10] Rubin B., *Introduction to Radon Transform: with elements of fractional calculations and harmonic analysis*, 2015, 576 pp.