УДК 512.573, 519.17

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ УНОИДОВ

Дудаков С.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 03.12.2019, после переработки 20.12.2019.

В работе показано, что если рассмотреть алгебру из некоторых уноидов в виде «кустов», соединённых в бесконечную линию, и построить алгебру её конечных подмножеств, то полученная система имеет теорию, допускающую эффективную элиминацию кванторов независимо от исходной. Таким образом, показано, что теория алгебры конечных подмножеств может быть существенно проще алгоритмически, чем теория исходной, а операция объединения для алгебр подмножеств является существенной для алгоритмических свойств.

Ключевые слова: уноид, дерево-куст, алгебра подмножеств, элиминация кванторов.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 108–116. https://doi.org/10.26456/vtpmk540

Введение

Один из способов построения новых алгебр из уже имеющихся — это рассмотрение алгебр всех или некоторых подмножеств. В частности, таким образом можно перейти от алгебры слов к алгебре языков [2, 4].

Один из естественных вопросов, которые возникают при таком переходе, — это изменение (или, наоборот, сохранение) алгоритмических свойств новых систем по сравнению с исходными.

Если в новой алгебре допустить использование отношения включения или какой-либо теоретико-множественной операции, позволяющей включение выразить, то открывается возможность интерпретировать старую алгебру в новой, так как формула

$$(\forall y)(y \subseteq x \to y = x \vee y = \varnothing)$$

будет выделять в точности одноэлементные подмножества, образующие алгебру, изоморфную исходной.

Но, как показано в работе [1], возможность интерпретации может сохраняться и без применения теоретико-множественных средств. Возникает естественный вопрос, является ли такое поведение универсальным или же оно связано с какими-то специфическими особенностями исходной алгебры?

В настоящей работе мы показываем, что существуют алгебры, даже среди уноидов, для которых описанное выше поведение не имеет места. Мы строим примеры уноидов $\mathfrak{A}_B$, алгебры конечных подмножеств которых имеют алгоритмически существенно более простую теорию, чем исходные. Исходные алгебры могут иметь сколь угодно сильно неразрешимые теории, в то время как все алгебры конечных подмножеств элементарно эквивалентны и допускают эффективную элиминацию кванторов.

Таким образом, при рассмотрении алгебр подмножеств отношение включения и теоретико-множественные операции могут играть существенную роль в плане разрешимости теории.

1. Определение исходного уноида

Пусть сигнатура $\Sigma = \{f^{(1)}\}$ содержит единственный одноместный функциональный символ f. С помощью $f^i(x)$ везде как обычно обозначается i-кратное применение f:

$$f^i(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(}_{i\ \text{раз}}x)\ldots))).$$

Возьмём произвольное бесконечное подмножество $B \subseteq \omega$ натуральных чисел, не содержащее нуля. Для каждого целого $j \in \mathbb{Z}$ построим куст (неветвящееся дерево) $\mathcal{D}_j$ с корнем r_j следующим образом. Для каждого целого $n > 0$ куст $\mathcal{D}_j$ имеет ровно два листа $\ell_{r,n}$ глубины n, если $n \in B$, или ровно один лист $\ell_{r,n}$, если $n \notin B$. Путь из корня r_j в $\ell_{r,n}$ не ветвится, а $f(a)$ — это отец a. Таким образом, выполнено

- $f^n(\ell_{j,n}) = r_j$;
- $f^m(\ell_{j,n}) \neq r_j$ для всех $m < n$;
- $f(a) \neq \ell_{j,n}$ для всех a.

Корни кустов удовлетворяют условию $f(r_j) = r_{j+1}$. Таким образом, в алгебре $\mathfrak{A}_B$ каждый элемент r_j является корнем куста, имеющего один или два листа каждой глубины $n > 0$.

Для дальнейшего отметим вот какое свойство алгебры $\mathfrak{A}_B$: для любого j существует бесконечно много элементов v, для которых $f^k(v) = r_j$, но если a не является корнем, то элемент v, для которого $f^k(v) = r_j$, если существует, то единственен.

Заметим, что построенный уноид может иметь сколь угодно алгоритмически сложную теорию.

Теорема 1. *Множество B алгоритмически сводимо (см. [5]) к теории уноида $\mathfrak{A}_B$.*

Доказательство. В теории алгебры $\mathfrak{A}_B$ можно определить множество корней кустов R:

$$R(x) \equiv (\exists y, z)(y \neq z \wedge f(y) = x \wedge f(z) = x).$$

Также определимо множество листьев L:

$$L(x) \equiv \neg(\exists y) f(y) = x.$$

Таким образом, $n \in B$ тогда и только тогда, когда существуют два разных листа ℓ и ℓ' глубины n, для которых выполнено $f^n(\ell) = f^n(\ell')$:

$$n \in B \iff (\exists y, z)\Big(y \neq z \wedge L(y) \wedge L(z) \wedge \\ \wedge f^n(y) = f^n(z) \wedge \neg R\big(f^{n-1}(y)\big) \wedge \neg R\big(f^{n-1}(z)\big)\Big). \qquad \square$$

2. Уноид подмножеств

С помощью $\exp \mathfrak{A}_B$ обозначаем алгебру конечных подмножеств $\mathfrak{A}_B$ с соответствующей операцией:

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Наша основная теорема заключается в том, что теория алгебры $\exp \mathfrak{A}_B$ допускает эффективную элиминацию кванторов и, в отличие от теории самой алгебры $\mathfrak{A}_B$, не зависит от множества B.

С помощью $\top$ обозначаем тождественно истинную формулу.

Для начала отметим определимость в $\exp \mathfrak{A}_B$ некоторых символов.

Лемма 1. *В алгебре* $\exp \mathfrak{A}_B$ *определимы следующие символы:*

1. *пустое множество* $\varnothing$*;*
2. *одноместный предикат* R*, состоящий из множеств, не содержащих ни одного листа, но содержащих хотя бы один корень* r_j*.*

Доказательство. 1) $x = \varnothing \equiv f(x) = x \wedge \neg(\exists y)(y \neq x \wedge f(y) = x)$;
2) $R(x) \equiv (\exists y, z)(y \neq x \wedge z \neq x \wedge y \neq z \wedge f(y) = x \wedge f(z) = x)$. $\square$

Для элиминации кванторов введём ещё одно отношение:

$$L^m_n(x) \equiv (\exists y) f^{m+n}(y) = f^m(x).$$

Заметим, что из формулы $L^m_n(x)$ автоматически следуют формулы $L^m_{n'}(x)$ для $n' < n$.

В дальнейшем нам будет полезно такое обозначение:

$$V_{D,H}(x) = \{(d_D(a), h_H(a)) : a \in x\}.$$

Здесь D и H — произвольные натуральные числа, $h_H(a)$ — высота вершины a, если она не превосходит H, или $H+1$ в противном случае; $d_D(a)$ — глубина вершины a, если она не превосходит D, или $D+1$ в противном случае. Иными словами, это список глубин и высот вершин из x, ограниченных $D+1$ и $H+1$ соответственно.

Лемма 2. *Пусть* $\psi(x)$ *— произвольная элементарная конъюнкция, составленная из формул вида* $L^m_n(x)$ *и* $R(f^q(x))$*, а также их отрицаний, причём* $0 \leq n \leq H$*,* $0 \leq m, q \leq D$*. Если* $V_{D,H}(x) = V_{D,H}(z)$*, то* $\psi(x) \equiv \psi(z)$*.*

Доказательство. Прежде всего, укажем содержательное значение формул, из которых составлена конъюнкция $\psi(x)$:

- $L_n^m(x)$ означает, что все* вершины множества x глубины более m имеют высоту не меньшую n;
- $\neg L_n^m(x)$ означает, что существует хотя бы одна вершина в x глубины более m и высоты меньшей n;
- $R(x)$ означает, что x не содержит* ни одной вершины высоты 0 и содержит хотя бы одну вершину глубины 0;
- $R(f^q(x))$ для $q > 0$ означает, что x содержит хотя бы одну вершину глубины не более q;
- $\neg R(x)$ означает, что x содержит хотя бы одну вершину высоты 0 или не содержит* ни одной вершины глубины 0;
- $\neg R(f^q(x))$ для $q > 0$ означает, что все* вершины множества x имеют глубину более q.

Звёздочкой отмечены универсальные части условий, которые мы в будущем должны будем проверять при доказательстве основной теоремы.

Таким образом, $\psi(x)$ является утверждением только о значениях высот и глубин вершин множества x, причём высоты сравниваются с величинами не превосходящими H, а глубины — с величинами не превосходящими D. Следовательно, значение этой формулы определяется исключительно множеством $V_{D,H}(x)$, а если $V_{D,H}(x) = V_{D,H}(z)$, то $\psi(x) \equiv \psi(z)$. □

Следствие 1. *Пусть множество u содержит хотя бы по одной вершине каждой глубины и высоты из диапазонов $0, \ldots, D+1$ и $0, \ldots, H+1$ соответственно. Если формула ψ указанного в лемме 2 вида выполнима, то она выполнена для некоторого $x \subseteq u$.*

Доказательство. Пусть выполнено $\psi(z)$. Тогда достаточно найти подмножество $x \subseteq u$ такое, что $V_{D,H}(x) = V_{D,H}(z)$. Такое x обязательно найдётся. □

Теорема 2. *Теория алгебры $\exp \mathfrak{A}_B$ не зависит от множества B и допускает эффективную элиминацию кванторов в сигнатуре $\{f, \varnothing, L_n^m, R : n, m \in \omega\}$.*

Доказательство. Как обычно (см. [3]), для доказательства возможности эффективной элиминации кванторов достаточно для произвольной элементарной конъюнкции $\phi(x)$ указать алгоритм построения бескванторной формулы эквивалентной $(\exists x)\phi(x)$. Сразу отметим, что приведённый далее алгоритм элиминации квантора не зависит от множества B. Следовательно, теория алгебры $\exp \mathfrak{A}_B$ тоже от B не зависит.

Если среди элементов конъюнкции $\phi(x)$ есть равенство $x = t$ для терма t, не содержащего переменной x, то элиминация квантора выполняется заменой x на t в $\phi(x)$: $(\exists x)\phi(x) \equiv \phi(t)$.

Если среди элементов $\phi(x)$ есть равенство $f^n(x) = f^m(x)$ при $n \neq m$, то оно выполнено только при $x = \varnothing$. Следовательно, элиминация квантора выполняется заменой x на $\varnothing$: $(\exists x)\phi(x) \equiv \phi(\varnothing)$.

В дальнейшем будем считать, что равенств указанных видов в ϕ нет.

Следующий случай, который следует рассмотреть, — это наличие в элементарной конъюнкции нескольких равенств вида $f^k(x) = t$:

$$\phi(x) \equiv f^{k_1}(x) = t_1 \wedge \cdots \wedge f^{k_r}(x) = t_r \wedge \phi'(x).$$

В этом случае выберем наименьшее из k_i, допустим, это будет k_1. Тогда для каждого $i > 1$ равенство $f^{k_i}(x) = t_i$ эквивалентно $f^{k_i - k_1}(t_1) = t_i$. Следовательно, мы можем полагать, что в элементарной конъюнкции ϕ имеется не более одного равенства вида $f^k(x) = t$ причём $k \geq 1$.

Заметим, что при наличии равенства $f^k(x) = t$ все неравенства $f^p(x) \neq s$ при $p \geq k$ можно заменить тем же способом: $f^{p-k}(t) \neq s$. Аналогично $R(f^q(x))$ при $q \geq k$ эквивалентно $R(f^{q-k}(t))$. Отношение $L_n^m(x) \equiv (\exists y) f^{m+n}(y) = f^m(x)$ при $m \geq k$ эквивалентно

$$(\exists y) f^{m+n}(y) = f^m(x) \equiv (\exists y) f^{m+n}(y) = f^{m-k}(f^k(x)) \equiv \\ \equiv (\exists y) f^{m+n}(y) = f^{m-k}(t) \equiv (\exists y) f^{(m-k)+(n+k)}(y) = f^{m-k}(t) \equiv L_{n+k}^{m-k}(t).$$

В силу вышесказанного мы теперь можем полагать, что элиминация квантора должна происходить для формулы $(\exists x)\phi(x)$ вида

$$(\exists x)\Big(\psi(x) \wedge f^k(x) = t \wedge \bigwedge_i f^{p_i}(x) \neq s_i\Big). \tag{1}$$

Здесь $\psi(x)$ — это некоторая элементарная конъюнкция формул вида $L_n^m(x)$ и $R(f^q(x))$, а также их отрицаний. При этом $m, q, p_i < k$ и $1 \leq k$ (если часть $f^k(x) = t$ присутствует в формуле).

Сначала рассмотрим случай, когда равенство $f^k(x) = t$ в формуле (1) отсутствует. Выберем H — наибольшее из всех n, а также D — наибольшее из m, q, p_i. Так как алгебра $\exp \mathfrak{A}_B$ состоит из конечных подмножеств $\mathfrak{A}_B$, то количество элементов $\mathfrak{A}_B$, входящих во всевозможные s_i, конечно. Пусть $r_{j'}$ — всевозможные корни кустов, содержащих вершины из s_i. Выберем j, превосходящее все j'. Переберём всевозможные варианты множеств $V_{D,H}(x)$ (их существует не более $2^{(D+2)(H+2)}$) и выделим из них те, для которых $\psi(x)$ будет истинной (лемма 2 и следствие 1). Если хотя бы одно такое $V^*_{D,H}$ нашлось, то, взяв в качестве x множество вершин куста с корнем r_j, для которых $V_{D,H}(x) = V^*_{D,H}$, мы получим истинность формулы (1). Таким образом, формула (1) эквивалентна $\top$. В противном случае, когда множество $V^*_{D,H}$ не найдено, формула (1) будет эквивалентна $\neg\top$, так как $\psi(x)$ несовместна в $\mathfrak{A}_B$.

Пусть теперь в конъюнкции $\phi(x)$ присутствует равенство $f^k(x) = t$. Рассмотрим три взаимоисключающих случая.

Первый: $t = \varnothing$. Так как $f^k(x) = \varnothing$, то $x = \varnothing$, поэтому элиминация снова выполняется простой заменой x на $\varnothing$: $(\exists x)\phi(x) \equiv \phi(\varnothing)$.

Два других случая: когда для $t \neq \varnothing$ выполнено $\neg R(t)$ или $R(t)$ соответственно.

Если выполнено $\neg R(t)$, то x, для которого $f^k(x) = t$, существует в точности тогда, когда выполнено $L_k^0(t)$, то есть все вершины t имеют высоту не меньшую k. Так как $k \geq 1$, то t не может содержать листьев, а поэтому (по определению R) множество t не содержит и корней. Следовательно, такой x единственен:

$$x = \{f^{-k}(x) : a \in t\}.$$

Учитывая неравенства $m, p_i, q < k$, получаем $R(f^q(x)) \equiv \neg\top$ и

$$L_n^m(x) \equiv (\exists y) f^{n+m}(y) = f^m(x) \equiv (\exists y) f^{k-m}(f^{n+m}(y)) = f^{k-m}(f^m(x)) \equiv \\ \equiv (\exists y) f^{n+k}(y) = f^k(x) \equiv (\exists y) f^{n+k}(y) = t \equiv L_{n+k}^0(t). \quad (2)$$

Аналогично неравенства вида $f^{p_i}(x) \neq s_i$ эквивалентны $f^{k-p_i}(s_i) \neq t$. Следовательно, формула (1) эквивалентна конъюнкции перечисленных выше бескванторных формул или их отрицаний.

Пусть, наконец, выполнено $R(t)$. Это означает, что $r_j \in t$ хотя бы для одного j. Если для x выполнено $L_n^m(x)$, то для $t = f^k(x)$ по аналогии с (2) должно выполняться $L_{n+k}^0(t)$, но следование теперь будет только в одну сторону, поскольку переход от u к $f^{k-m}(u)$ теперь не является разнозначным. Далее, если выполнено $R(x)$, то x не содержит листьев, то есть вершин высоты 0, поэтому вершины t не могут иметь высоту меньшую $k+1$, то есть должно быть выполнено $L_{1+k}^0(t)$. Наконец, как и в предыдущем случае должно выполняться $L_k^0(t)$.

Выберем H — наибольшее из всех n, и положим $D = k - 1$. Тогда с учётом неравенств $m, q < k$ для формулы $\psi(x)$ будут выполнены условия леммы 2. Аналогично описанному выше будем для конъюнкции ψ искать множество $V_{D,H}^*$ такое, что при $V_{D,H}(x) = V_{D,H}^*$ формула $\psi(x)$ истинна. Если такого $V_{D,H}^*$ не нашлось, то $\psi(x)$ невыполнима в $\mathfrak{A}_B$, поэтому формула (1) эквивалентна $\neg\top$.

Покажем, что если $V_{D,H}^*$ нашлось, то $L_{N+k}^0(t)$ является эквивалентной (1) бескванторной формулой. Здесь N — наибольшее из n таких, что формула $L_n^m(x)$ входит в $\psi(x)$ без отрицания. Если положительных вхождений формул $L_n^m(x)$ в конъюнкции $\psi(x)$ нет, но есть положительное вхождение $R(x)$, то в качестве эквивалентной формулы берётся $L_{1+k}^0(t)$, а если и такого нет, то $L_k^0(t)$. Иными словами, эквивалентной (1) будет одна из формул вида $L_{\Delta+k}^0(t)$, где $\Delta \in \{0, 1, N\}$.

Прежде всего заметим, что максимальная глубина из $V_{D,H}^*$ не превышает $D+1 = k$. Пусть выполнено $L_{\Delta+k}^0(t)$. Множество x образуем следующим способом.

1. Для каждого $a \in t$, не являющегося корнем куста, x будет содержать $f^{-k}(a)$. Это возможно в силу $L_{\Delta+k}^0(t)$.

2. Для каждого $r_j \in t$ выберем вершину b_j под r_j такую, что её глубина равна k, высота больше H, и при этом на пути из r_j в b_j нет элементов ни одного из множеств s_i. Включим b_j в x.

3. Для каждой пары $(d, h) \in V_{D,H}^*$ и для каждого $r_j \in t$ выберем вершину $c_{j,d,h}$ глубины d и высоты h в кусте с корнем $r_{j-(k-d)}$ и включим её в x.

Прежде всего, отметим, что $f^k(x) = t$. Для $a \in t$, которые не являются корнями, мы непосредственно получаем $f^k(f^{-k}(a)) = a$. Для $r_j \in t$ мы будем иметь $f^k(b_j) = r_j$ и

$$f^k(c_{j,d,h}) = f^{k-d}(f^d(c_{j,d,h})) = f^{k-d}(r_{j-(k-d)}) = r_j.$$

Далее отметим, что $f^{p_i}(x) \neq s_i$, так как $f^{p_i}(b_j)$ лежит на пути между между r_j и b_j, который не содержит элементов множеств s_i.

Теперь рассмотрим элементы формулы $\psi(x)$, все виды которых перечислены в доказательстве леммы 2.

Сразу заметим, что в силу выбора вершин $c_{j,d,h}$ их множество c по лемме 2 удовлетворяет формуле $\psi(x)$, а потому все экзистенциальные утверждения истинные для c будут истинны и для $x \supseteq c$. Рассмотрим универсальные утверждения для вершин $f^{-k}(a)$ и b_j.

Для формулы $L^m_n(x)$. Из истинности $L^0_{N+k}(t)$ следует, что высоты вершин $a \in t$ будут не меньше $N + k$, а высоты $f^{-k}(a)$ — не меньше $N \geq n$. Высоты вершин b_j превосходят H и, следовательно, n. Таким образом, выполнено $L^m_n(x)$.

Для формулы $R(x)$. При наличии $R(x)$ в конъюнкции $\psi(x)$ мы получим $\Delta \geq 1$. Из истинности $L^0_{\Delta+k}(t)$ следует, что высоты вершин a будут не меньше $1 + k$, а высоты $f^{-k}(a)$ — не меньше 1. Высоты вершин b_j по-прежнему превосходят H и n. Таким образом, все вершины x будут иметь высоту большую 0.

Для формулы $\neg R(f^q(x))$ при $q \geq 0$. Глубина вершин a не меньше 1, так как они не являются корнями, следовательно, глубина вершин $f^{-k}(a)$ не меньше $1+k > q$. Глубина вершин b_j равна $k > q$.

Это заканчивает доказательство истинности формулы $\psi(x)$. Следовательно, при наличии$V^*_{D,H}$ из формулы $L^0_{\Delta+k}(t)$ действительно следует $(\exists x)\phi(x)$, то есть эти две формулы эквивалентны. □

Из теоремы сразу получаем

Следствие 2. *Теория алгебры* $\exp \mathfrak{A}_B$ *является разрешимой для любого множества* B.

Следствие 3. *Существуют множества* B*, для которых алгебра* $\mathfrak{A}_B$ *в алгебре* $\exp \mathfrak{A}_B$ *не интерпретируется.*

Доказательство. Достаточно взять любое нерекурсивное множество B (см. [5]). □

Следствие 4. *Существуют* B*, для которых алгебра* $(\exp \mathfrak{A}_B, \cup)$ *алгоритмически существенно сложнее, чем алгебра* $\exp \mathfrak{A}_B$.

Доказательство. В алгебре $(\exp \mathfrak{A}_B, \cup)$ определима совокупность одноэлементных множеств U:

$$U(x) \equiv (\forall y)(y \cup x = x \to y = x \vee (\forall z) z \cup y = z).$$

Но это U является носителем подалгебры, изоморфной самой $\mathfrak{A}_B$. Следовательно, в алгебре $(\exp \mathfrak{A}_B, \cup)$ всегда интерпретируется $\mathfrak{A}_B$, что вместе с предыдущим следствием доказывает требуемое. □

Заключение

Итак, мы продемонстрировали, что существуют алгебры $\mathfrak{A}$, для которых алгебра конечных подмножеств $\exp \mathfrak{A}$ может быть существенно проще исходной, в то время как операция объединения или аналогичные ей отношения всегда препятствуют этому. В связи с этим возникает несколько естественных вопросов.

1. Можно ли тоже самое утверждать для алгебры всех, а не только конечных подмножеств?

2. Можно ли привести аналогичный пример для алгебр с многоместными операциями, не сводящимися к уноидам?

3. Найти общие условия, при которых алгебра (всех или только конечных) подмножеств будет алгоритмически проще исходной.

Список литературы

[1] Дудаков С.М. О неразрешимости алгебры односимвольных языков с операцией конкатенации // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). Казань: КФУ, 2019. С. 101–103.

[2] Карлов Б.Н. О теории регулярных языков с оператором итерации // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). Казань: КФУ, 2019. С. 114–115.

[3] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. Computability and Logic. 5th edition. New York: Cambridge University Press, 2007.

[4] Dudakov S.M., Karlov B.N. On Decidability of Regular Languages Theories // Proc. of 14th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2019. Series: LNCS. Vol. 11532. 2019. Pp. 119–130.

[5] Rogers H. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York: McGraw-Hill Education, 1967.

Образец цитирования

Дудаков С.М. Об алгоритмических свойствах алгебры конечных подмножеств некоторых уноидов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 108–116. https://doi.org/10.26456/vtpmk540

Сведения об авторах

1. **Дудаков Сергей Михайлович**
заведующий кафедрой информатики Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

ON ALGORITHMIC PROPERTIES OF FINITE SUBSET ALGEBRA FOR SOME UNOIDS

Dudakov Sergey Mikhailovich
Head of Computer Science Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

Received 03.12.2019, revised 20.12.2019.

We consider unoids consisting of identical non-branching trees which are connected into an infinite line. We establish that the finite subset algebra admits effective quantifier elimination and it does not depend on the original algebra. So, we have an instance where the finite subset algebra theory is algorithmically simpler than the theory of the original one. Also it demonstrates that the union operation for finite subset algebras does matter for algorithmical properties.

Keywords: unoid, non-branching tree, subset algebra, quantifier elimination.

Citation

Dudakov S.M., “On algorithmic properties of finite subset algebra for some unoids”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 108–116 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk540

References

[1] Dudakov S.M., “On the unsolvability of the algebra of one-character languages with the operation of concatenation”, *Materialy konferentsii "Algebra i matematicheskaya logika: teoriya i prilozheniya" [Conference proceedings "Algebra and Mathematical Logic: Theory and applications"]* (Kazan, 24-28 of June 2019), KFU, Kazan, 2019, 101–103 (in Russian).

[2] Karlov B.N., “On the theory of regular languages with an iteration operator”, *Materialy konferentsii "Algebra i matematicheskaya logika: teoriya i prilozheniya" [Conference proceedings "Algebra and Mathematical Logic: Theory and applications"]* (Kazan, 24-28 of June 2019), KFU, Kazan, 2019, 114–115 (in Russian).

[3] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C., *Computability and Logic*, 5th edition, Cambridge University Press, New York, 2007.

[4] Dudakov S.M., Karlov B.N., “On Decidability of Regular Languages Theories”, *Proc. of 14th International Computer Science Symposium in Russia.* V. 11532, CSR 2019, LNCS, 2019, 119–130.

[5] Rogers H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Education, New York, 1967.