УДК 510.6

ОБ УНОИДАХ УЖИЧИНА СО СВЯЗНЫМ ОСНОВНЫМ МНОЖЕСТВОМ

Дадеркин Д.О.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 13.09.2019, после переработки 27.09.2019.

Одним из самых важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, является свойство табличности. Данная работа посвящена изучению некоторых табличных уноидов. Начало этим исследованиям положили работы П. Ужичина [1–3], в которых были предложены достаточные условия табличности. Однако единственным табличным уноидом, известным Ужичину, было объединение бесконечного числа попарно не пересекающихся уноидов, каждый из которых изоморфен натуральным числам вместе с операцией следования. В данной работе доказывается существование табличного уноида со связным основным множеством, тем самым показывается, что требование несвязности основного множества уноида не является существенным.

Ключевые слова: алгебраическая система, алгебра, уноид, свойство табличности, динамические логики, терм.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 117–125. https://doi.org/10.26456/vtpmk551

Введение

Использование языков динамических логик является естественным путем задания новых отношений на данной алгебраической системе. В некотором смысле это задание конструктивно. Хорошо известно, что обычные арифметические операции сложения и умножения определяются программами, не использующими других операций, кроме одноместных операций следования (прибавления единицы). Поэтому многие вопросы теории динамических логик являются содержательными уже для систем, в которых нет неодноместных операций. Такие системы обычно называются уноидами.

Одним из самых важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, является свойство табличности.

Говорят, что программа обладает свойством табличности, если на любом входе результат её работы совпадает с результатом работы некоторой бесцикловой программы, другими словами, с точки зрения выхода, работа такой программы состоит в последовательной проверке условий из конечной последовательности условий, и в случае истинности проверяемого условия программа выполняет заранее заданную соответствующую последовательность присваиваний.

Если программы, представляющие собой конечные последовательности присваиваний, называть линейными, то бесцикловые программы естественно называть кусочно-линейными.

Алгебраические системы, в которых каждая тотальная программа эквивалентна бесцикловой, будем называть табличными. Следующая теорема (см. [8]) устанавливает важное соответствие между понятием табличности алгебраических систем и выразительной силой динамических логик.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ - классы программ. Если существует такая программа p из $\mathcal{K}_1$, что для любой конечной совокупности программ $r_1, \ldots, r_k$ из класса $\mathcal{K}_2$ найдется такая алгебраическая система $\mathfrak{A}$, что $r_1, \ldots, r_k$ табличны в $\mathfrak{A}$, а p - не таблична, то $L(\mathcal{K}_1) \nleq L(\mathcal{K}_2)$, то есть, либо $L(\mathcal{K}_2) < L(\mathcal{K}_1)$, либо динамические логики $L(\mathcal{K}_2)$ и $L(\mathcal{K}_1)$ несравнимы.*

Данная работа посвящена изучению некоторых табличных уноидов.

В работах П. Ужичина [1–3] были предложены достаточные условия табличности.

Условия Ужичина - это наличие в каждой системе равенств эквивалентной конечной подсистемы и наличие конечного базиса для каждой системы равенств. Эти алгебраические условия Ужичина, однако, трудно проверяемы на практике и не дают возможности строить нетривиальные примеры табличных уноидов. Например, единственным табличным уноидом, известным Ужичину, было объединение бесконечного числа попарно не пересекающихся уноидов, каждый из которых изоморфен натуральным числам вместе с операцией следования.

1. Базовые понятия и обозначения.

Пусть $\mathbb{N} = \{0,\ 1, \ldots\}$ - множество натуральных чисел. Пусть заданы множество Ω функциональных, предикатных и константных символов и отображение τ, которое каждому функциональному и предикатному символу ставит в соответствие положительное натуральное число - местность (число аргументов) этого символа.

Сигнатурой Ω называется множество Ω вместе с отображением τ .

Алгебраической системой сигнатуры Ω называется пара $\mathfrak{A} =< \mathbb{A}, \Gamma >$, где $\mathbb{A}$ — непустое множество, Γ — такое отображение с областью определения Ω , что

a) если $P \in \Omega$ — n-арный предикатный символ, то $\Gamma(P) \subseteq \mathbb{A}^n$;

b) если $f \in \Omega$ — n-арный функциональный символ, то $\Gamma(f) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}$;

c) если $a \in \Omega$ — константный символ, то $\Gamma(a) \in \mathbb{A}$.

Будем обозначать $\mathfrak{A}$ как $< \mathbb{A}, \Omega >$, множество $\mathbb{A}$ будем называть *основным множеством* алгебраической системы $\mathfrak{A}$, а элементы множества $\mathbb{A}$ — элементами системы $\mathfrak{A}$. Зафиксируем некоторую сигнатуру Ω . Пусть $\mathbb{V}$ — совокупность переменных, $\mathbb{V} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Определим *термы* сигнатуры Ω :

a) каждая переменная и всякий константный символ сигнатуры Ω есть терм сигнатуры Ω ;

b) если f— n-арный функциональный символ сигнатуры Ω и $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм сигнатуры Ω ;

c) некоторое выражение есть терм сигнатуры Ω только тогда, когда это следует из (a) и (b).

Если $t, t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — переменные, то $t(x_{i_1}/t_1, \ldots, x_{i_n}/t_n)$ означает терм, полученный одновременной подстановкой термов t_k вместо x_k , $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Если $t_1,\ t_2, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, $P \in \Omega$ — некоторый $n-$арный предикатный символ, то $(t_1 = t_2)$ и $P(t_1, \ldots, t_n)$ — атомные формулы сигнатуры Ω.

Формулой сигнатуры Ω называется :

a) каждая атомная формула сигнатуры Ω;

b) каждое выражение вида $(\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \to \varphi_2), \neg\varphi, (\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$, где $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi$ — формулы сигнатуры Ω, а x — переменная.

Придадим переменным из $\mathbb{V}$ в качестве значений элементы $\mathbb{A}$. Такое отображение из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{A}$ назовем *состоянием* σ алгебраической системы $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $t(\mathbb{A},\ \sigma)$ значение терма t на состоянии σ алгебраической системы $\mathfrak{A}$. Определим

$$t(\mathbb{A},\ \sigma) = \begin{cases} \Gamma(a), & \text{если } t\text{— константный символ } a \in \Omega; \\ \sigma(x_i), & \text{если } t\text{— переменная из } \mathbb{V}; \\ \Gamma(f)(t_1(\mathbb{A},\ \sigma), \ldots, t_n(\mathbb{A},\ \sigma)) & \text{если } t\text{— терм } f(t_1, \ldots, t_n). \end{cases}$$

Определим истинность формулы φ сигнатуры Ω на состоянии σ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω ($(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$) :

a) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (t_1 = t_2)$ равносильно $t_1(\mathbb{A}, \sigma) = t_2(\mathbb{A}, \sigma)$;

b) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models P(t_1, \ldots, t_n)$ равносильно $(t_1(\mathbb{A}, \sigma), \ldots, t_n(\mathbb{A}, \sigma)) \in \Gamma(P)$;

c) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \neg\varphi$ равносильно тому, что неверно $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$;

d) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\varphi \wedge \psi)$ равносильно $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\varphi)$ и $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\psi)$;

e) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\varphi \vee \psi)$ равносильно $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\varphi)$ или $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\psi)$;

f) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\exists x_i)\varphi$ равносильно тому, что существует такое состояние σ' алгебраической системы $\mathfrak{A}$, что $(\mathfrak{A}, \sigma') \models \varphi$ и $\sigma'(x_j) = \sigma(x_j)$ для $i \neq j$;

g) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\forall x_i)\varphi$ равносильно $\neg(\exists x_i)\neg\varphi$;

h) $(\mathfrak{A}, \sigma) \models (\varphi \to \psi)$ равносильно $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Запись $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)$ будет означать, что φ истинна в $\mathfrak{A}$ на любом таком состоянии σ , что $\sigma(x_j) = a_j,\ a_j \in \mathbb{A}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Если из контекста ясно, какие переменные получают значения a_j, то будем писать $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

С описанием регулярных детерминированных программ можно ознакомиться в [4] и [6].

2. Свойство табличности алгебраических систем

Часто используется следующее

Определение 1. *Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ обладает свойством табличности для класса детерминированных регулярных программ $\mathcal{K}$, если каждая программа из $\mathcal{K}$ эквивалентна в $\mathfrak{A}$ программе без циклов.*

Через $T_\Omega(n)$ и $F_\Omega(n)$ будем обозначать множество всех термов и всех бескванторных формул логики предикатов первого порядка сигнатуры Ω с индивидуальными переменными из множества $\mathbb{V}_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Далее под программой, если не оговорено, будем понимать тотальную детерминированную регулярную программу.

Под *алгеброй* будем понимать алгебраическую систему, сигнатура которой не содержит символов отношений.

Будем называть *равенством с n переменными* формулу вида $t_1 = t_2$, где $t_1, t_2 \in T_\Omega(n)$. Поскольку равенства задаются входящими в них термами, под *множеством* (или *системой) равенств* E будем понимать подмножество $(T_\Omega(n))^2$.

Скажем, что множество равенств E *совместно* в алгебре $\mathfrak{A}$, если все входящие в это множество равенства одновременно истинны в $\mathfrak{A}$ на некотором состоянии алгебраической системы $\mathfrak{A}$.

Каждый вектор $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, содержащийся в $\mathbb{A}^n$, такой, что все равенства из E истинны в $\mathfrak{A}$ при соответствующих значениях переменных (будем обозначать это $\mathfrak{A}, \overline{a} \models E$), назовём *решением* множества E равенств с n переменными.

Два множества равенств E_1 и E_2 назовём *эквивалентными* (и обозначим это $E_1 \equiv E_2$) тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же решения.

Скажем, что алгебра $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию обрывающейся цепи*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого множества равенств E с n переменными найдётся такое конечное подмножество $E_0 \subseteq E$, что $E_0 \equiv E$.

Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра, E_0 - конечное множество равенств с n переменными, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Будем говорить, что совокупность векторов $\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m\} \subseteq \mathbb{A}^n$ образует *базис* для E_0 в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

(a) каждое $\overline{a}_i$ есть решение E_0 , $i \in \{1, \dots, m\}$;

(b) для любых равенств $e_1, \dots, e_m$ с n переменными из того, что $\mathfrak{A}, \overline{a}_i \models e_i$ $(i \in \{1, \dots, m\})$, следует $E_0 \models e_1 \vee \ldots \vee e_m$, то есть одно из равенств $e_1, \dots, e_m$ истинно на любом решении E_0.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *табличной*, если она обладает свойством табличности для тотальных детерминированных регулярных программ.

Приведем важный результат Я. Ужичина [2], связывающий понятия базиса, условия обрывающейся цепи и свойства табличности для алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию обрывающейся цепи и такова, что любое конечное совместное множество равенств с n переменными имеет некоторый базис в $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ является табличной.*

Будем говорить, что *алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям Ужичина*, если для любого натурального числа n и любого множества равенств E с n переменными найдётся такое конечное подмножество $E_0 \subseteq E$, что $E_0 \equiv E$ в $\mathfrak{A}$, и любое конечное совместное множество равенств с n переменными имеет базис.

Алгебра, сигнатура которой содержит только символы но более чем одноместных операций, называется уноидом.

В [2] приведён пример уноида, удовлетворяющего условиям Ужичина и, следовательно, табличного по теореме 2: $\mathfrak{A} =< \mathbb{U}, s >, \mathbb{U} = \{< m, n >: m, n \in \mathbb{N}\}, s(m, n) =< m+1, n >$. В примере при доказательстве табличности уноида $\mathfrak{A}$ используется то обстоятельство, что его основное множество $\mathbb{U}$ состоит из бесконечного числа замкнутых относительно s непересекающихся подмножеств

$\mathbb{U}_i = \{< n, i > : n \in \mathbb{N}\} :\ < 0, i > \in \mathbb{U}_i$ и, если $< k, i > \in \mathbb{U}_i$, то

$$s(< k, i >) \in \mathbb{U}_i, \quad \bigcup_{i \geqslant 0} \mathbb{U}_i = \mathbb{U}, \quad \mathbb{U}_i \bigcap \mathbb{U}_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \dots \quad .$$

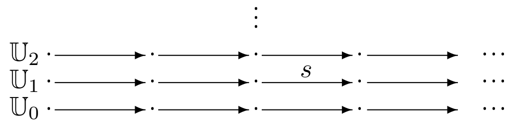

Рис. 1: Униод $\mathfrak{A}$

Покажем, что требование несвязности основного множества униода не является существенным.

Теорема 3. *Существует униод со связным основным множеством, являющийся табличным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} =< \mathbb{B}; f, g >$, $\mathbb{B} = 0(0+1)^*$ - полное бесконечное бинарное дерево, унарные операции f и g заданы так: $f(x) = x0$, $g(x) = x1$ для любых $x \in \mathbb{B}$. Покажем, что униод $\mathfrak{B}$ обладает свойством табличности.

Сначала убедимся, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию обрывающейся цепи.

Предположим, что E - это множество равенств с n переменными, и пусть каждое конечное подмножество в E совместно, а совпадающие равенства отсутствуют. Пусть $h_1, h_2, \dots$ – термы заданной сигнатуры. Возьмем в E любые два равенства, содержащие x_i и x_j, например, $h_1(x_i) = h_2(x_j)$ и $h_4(x_i) = h_5(x_j)$, такие, что $h_1 \neq h_4$ или $h_2 \neq h_5$. Если бы эти равенства не были эквивалентны, то они не были бы совместны. Но тогда для каждой пары (i, j) $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ достаточно выбрать по одному равенству, чтобы получить конечное подмножество E_0 , содержащееся в E , и при этом $E_0 \equiv E$. Следовательно, для униода $\mathfrak{B}$ выполнено условие обрывающейся цепи.

Покажем теперь, что любая конечная совместная система равенств E с n переменными имеет базис.

Пусть термы h_1, h_2 и элементы x_i, x_j таковы, что имеет место равенство $h_1(x_i) = h_2(x_j)$. Ясно, что в $\mathfrak{B}$ существует единственный путь, проходящий через элементы x_i, x_j, $h_1(x_i)$. Поскольку возможны равенства вида $x_i = x_j$, то будем считать, что существует такой терм e, что $e(a) = a$ для любых $a \in \mathbb{B}$. Понятно, что $h_1(x_i) = h_2(x_j)$ тогда и только тогда, когда существует такой терм h_3, что либо $x_i = h_3(x_j)$, либо $x_j = h_3(x_i)$. Поэтому будем считать, что любое равенство в E имеет вид $x_i = h(x_j)$, и если $x_i = h(x_j)$, то положим $i > j$.

Через $R(E)$ обозначим множество всех тех переменных из $(x_1, \dots, x_n)$, которые не содержатся слева от знака равенства в E. Пусть $R(E) = \{x_1, \dots, x_p\}$, $p < n$. Такую нумерацию элементов множества $R(E)$ всегда можно получить, производя при необходимости перенумерацию переменных. Легко заметить, что каждый вектор $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{B}^p$ может быть расширен до решения E.

Положим $a_i = 01^i0$ $(i \in \{1, \dots, p\})$.

Пусть вектор $\overline{b}$ будет таким решением, полученным из $(a_1, \dots, a_p)$ расширением до $(a_1, \dots, a_n)$.

Покажем, что $\{\overline{b}\}$ является базисом для системы E. Действительно, пусть $\mathfrak{B}, \overline{b} \models x_i = h(x_j)$. Переменные x_i и x_j можно выразить через переменные из $R(E)$, в таком случае найдутся такие натуральные u и $t : u \geqslant p$, $t \geqslant p$, что

$$\mathfrak{B}, E \models x_i = h_4(x_t) \ \wedge x_j = h_5(x_u), \tag{1}$$

но тогда $h_4(b_t) = h(h_5(b_u))$, поскольку из (1) следует, что существует путь, проходящий через x_i и x_t, через x_j и x_u, а из того, что $x_i = h(x_j)$, вытекает существование пути, проходящего через x_i и x_j.

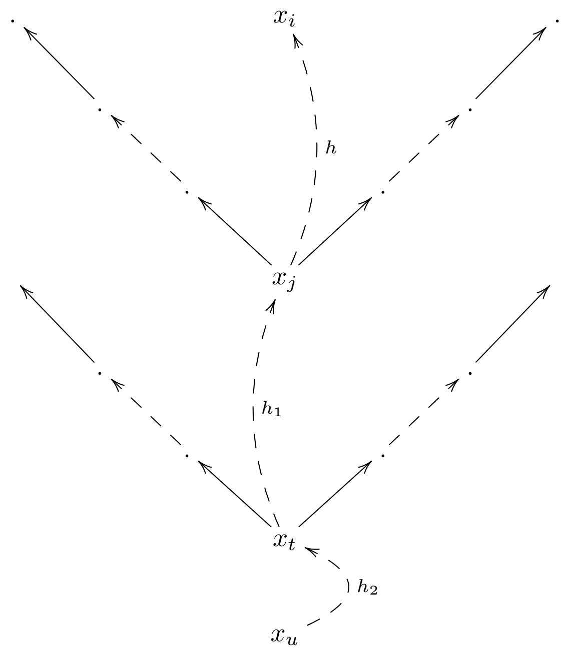

Рис.2: Фрагмент дерева $\mathfrak{B}$

Следовательно, x_u и x_t лежат на единственном пути, проходящем через x_i, x_j, x_u, x_t. Тогда найдутся такие термы h_1 и h_2, что имеет место либо $h(h_1(b_t)) = h(h_1(h_2(b_u)))$, либо $h(h_1(h_2(b_t))) = h(h_1(b_u))$, что приводит к равенству вида $b_t = h_2(b_u)$ или $b_u = h_2(b_t)$. Эти равенства выполняются только при $u = t$ и $h_2 = e$, но тогда по (1) $\mathfrak{B}, E \models x_i = h(x_j)$. Теорема доказана. $\square$

В доказательстве теоремы 3 использован метод, предложенный в [2].

Заключение

Свойство табличности является одним из самых важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе. Единственным табличным униоидом, известным Ужичину, было объединение бесконечного числа попарно не пересекающихся униоидов, каждый из которых изоморфен натуральным числам вместе с операцией следования. В данной работе доказано существование табличного униоида со связным основным множеством, тем самым показано, что требование несвязности основного множества униоида не является существенным.

Список литературы

[1] Urzyczyn P. Algorithmic triviality of abstract structures // Fundamenta Informaticae. 1981. № 4. Pp. 819–849.

[2] Urzyczyn P. The unwind property in certain algebras // Information and Control. 1981. Vol. 50, № 2. Pp. 91–109.

[3] Urzyczyn P. Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs // Foundation of computer theory. Berlin: Springer-Verlag, 1983. Pp. 469–504.

[4] Столбоушкин А.П., Тайцлин М.А. Динамические логики // Кибернетика и вычислительная техника. 1986. № 2. С. 180–230.

[5] Тайцлин М.А. Иерархия программных логик // Сибирский математический журнал. 1983. Т. XXIV, № 2. С. 184–192.

[6] Дудаков С.М., Карлов Б.Н. Математическое введение в информатику. Учебник. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 320 с.

[7] Kfoury A.J., Urzyczyn P. Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms // Acta informatica. 1985. Vol. 22. Pp. 347–377.

[8] Kfoury A.J. Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic) // Information and Control. 1985. Vol. 65. Pp. 98–121.

[9] Tiuryn J. Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic // Information and Control. 1984. Vol. 60. Pp. 12–35.

[10] Tiuryn J., Urzyczyn P. Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms // Mathematical Foundations of Computer Science. Eds. by M.P. Chytil, V. Koubek. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 176. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/BFb0030337

Образец цитирования

Дадеркин Д.О. Об уноидах Ужичина со связным основным множеством // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 117–125. https://doi.org/10.26456/vtpmk551

Сведения об авторах

1. **Дадеркин Дмитрий Ольгердович**
   доцент кафедры информатики Тверского государственного университета.

   170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: d.daderkin@yandex.ru

ON URZYCZYN'S UNOIDS WITH A CONNECTED UNDERLYING SET

Daderkin Dmitry Olgerdovich
Associate Professor at the Department of Informatics,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov st., TverSU.
E-mail: *d.daderkin@yandex.ru*

Received 13.09.2019, revised 27.09.2019.

One of the most important properties characterizing the work of a program in an algebraic system is the truth-table property. This work is devoted to the study of some truth-table unoids. The beginning of these studies was initiated by works of P. Urzyczyn [1–3], in which sufficient truth-table conditions were proposed. However, the only truth-table unoid known by P.Urzyczyn was the union of an infinite number of pairwise disjoint unoids, each of which is isomorphic to the natural numbers together with the operation of follow. In this work the existence of a truth-table unoid with a connected underlying set is proved, thus showing that the requirement of disjointedness of the underlying set of an unoid is not essential.

Keywords: algebraic system, algebra, unoid, truth-table property, dynamic logics, term.

Citation

Daderkin D.O., "On Urzyczyn's Unoids with a Connected Underlying Set", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 117–125 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk551

References

[1] Urzyczyn P., "Algorithmic triviality of abstract structures", *Fundamenta Informaticae*, 1981, № 4, 819–849.

[2] Urzyczyn P., "The unwind property in certain algebras", *Information and Control*, **50**:2 (1981), 91–109.

[3] Urzyczyn P., "Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs", *Foundation of computer theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 469–504.

[4] Stolboushkin A.P., Tajtslin M.A., "Dynamic logic", *Kibernetika i vychislitelnaya tekhnika [Cybernetics and computing]*, 1986, № 2, 180–230 (in Russian).

[5] Tajtslin M.A., "Software Logic Hierarchy", *Sibirskij matematicheskij zhurnal [Siberian Mathematical Journal]*, **XXIV**:2 (1983), 184–192 (in Russian).

[6] Dudakov S.M., Karlov B.N., *Matematicheskoe vvedenie v informatiku [Mathematical Introduction to Computer Science]*, Tutorial, Tver State University, Tver, 2017 (in Russian), 320 pp.

[7] Kfoury A.J., Urzyczyn P., "Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms", *Acta informatica*, **22** (1985), 347–377.

[8] Kfoury A.J., "Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic)", *Information and Control*, **65** (1985), 98–121.

[9] Tiuryn J., "Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic", *Information and Control*, **60** (1984), 12–35.

[10] Tiuryn J., Urzyczyn P., "Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms", *Mathematical Foundations of Computer Science*. V. 176, Lecture Notes in Computer Science, eds. M.P. Chytil, V. Koubek, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, https://doi.org/10.1007/BFb0030337.