УДК 519.6:681.31

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЛОГИЧЕСКОГО СИНТЕЗА[1]

Чебурахин И.Ф.*, Матвеев И.А., Тресков Ю.П.****

*ГОУ ВПО «МАТИ» - РГТУ им. К.Э. Циолковского, г. Москва

**Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.09.2009, после переработки 31.09.2009.

Предлагаются эффективные методы реализации булевых функций в классах формул и схем из функциональных элементов. При этом до этапа синтеза в разных базисах выводятся оценки для различных показателей сложности-качества предстоящего синтеза (в классе формул: число подформул и глубина формулы; в классе схем: число функциональных элементов и глубина схемы), что позволяет их улучшать, минимизируя трудоемкость синтеза. Методы рекомендуются для интеллектуализации автоматизированного синтеза логических схем.

Quantum transitive probabilities are considered. It is proved that their calculation is reduced to the decision of the first order linear differential equations system. The method of their calculation is described and application for construction of simulation models of evolution is discussed.

Ключевые слова: булева функция, формула, схема из функциональных элементов, анализ, синтез, декомпозиция, сложность, показатели качества, минимазация, функциональное и разностное уравнение.
Keywords: boolean function, formula, circuit of functional elements, analysis, synthesis, decomposition, complexity, quality characteristics, minimization, functional and difference equation.

Введение

Задача представления произвольной булевой функции в различных базисах с получением заранее показателей сложности–качества такого представления в отдельных случаях успешно решается [1]—[4]. Эти случаи определяются предварительно выполненной некоторой классификацией множества всех булевых функций, которая в работе не рассматривается. В качестве одного из таких классов в работе рассматриваются симметрические булевы функции, представимые полиномами Жегалкина и соответствующими схемами из функциональных элементов (ФЭ) с возможным ветвлением их выходов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-90441 УкрФ).

1. Булевы функции, базисы, формулы и схемы

Пусть $f(f^{(n)})$ — булева функция, зависящая от n существенных переменных из множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Под базисом понимаем произвольную конечную функционально полную систему булевых функций. В работе рассматриваются базисы $G_1 = \{\&, \vee, ^{-}\}$ и $G_3 = \{\&, \oplus, 1\}$ для множества всех булевых функций и $G_2 = \{\&, \vee\}$ для монотонных функций.

В качестве меры сложности–качества представления функции f формулой F или схемой S из ФЭ определяем соответствующие показатели — функционалы, которые минимизируем: $L_{\text{Б}}(f, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу F, реализующую функцию f в базисе G; $L_F(f, G)$ — число подформул в F; $\mathrm{Dep}_F(f, G)$ — глубина F; $L_S(f, G)$ — число ФЭ в схеме S; $\mathrm{Dep}_S(f, G)$ — глубина S, определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке, среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом. Возможны сокращения $L_F(f)$ и др.

Между собой эти показатели имеют сложные связи. Один из главных показателей — $L_{\text{Б}}$ по практическим соображениям минимизируется за счет расширения класса моделей (формул) при реализации булевых функций и привлечения аппарата булевой алгебры. Минимизация $L_{\text{Б}}$ в классе скобочных формул приводит к уменьшению или оставляет без изменения, или увеличивает глубину соответствующей формулы F (и схемы S) [1]—[4].

При синтезе схем средством для минимизации показателя L_S, наряду с отмеченным преобразованием формул к скобочному виду, является использование ветвления выходов ФЭ. Причем, в зависимости от повторяемости переменных, такая возможность может быть или не быть. Но уменьшение показателя L_S таким способом может приводить к увеличению глубины схемы S.

2. Функциональные уравнения (ФУ)

В работе рассматривается ФУ (типа 1) как рекуррентное соотношение [1]—[4]

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n), \quad n \geq 3, \tag{2.1}$$

где $h^{(2)}$ — функция рекурсии, $f^{(2)}$ — начальная функция. Соотношение (2.1) позволяет конструктивно получить суперпозиционную формулу F, реализующую функцию $f^{(n)}$. Таким образом, ФУ представляет собой конструктивный метод построения булевых формул определенного класса на основе заданных. Соотношение (2.1) характеризуется показателями качества, для каждого из которых выводится ФУ показателя качества (ФУ$_{\text{ПК}}$). Моделирование ФУ$_{\text{ПК}}$ используется для получения оценок показателей качества. Конкретизируя правую часть ФУ$_{\text{ПК}}$, для решения получаем соответствующее приближение. Таким образом, представляется возможность минимизировать сложность требуемого представления исходной функции.

3. Элементарные симметрические полиномы (ЭСП) Жегалкина

Имеется n ЭСП Жегалкина над множеством X, $n \geq 2$,

$$\begin{gathered}
F_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n, \\
F_2^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_n^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где в их обозначениях верхний индекс n — число переменных; нижний — i, $1 \leq i \leq n$, — степень ЭСП Жегалкина. $F_m^{(n)}$ понимается как сумма по mod 2 ЭК, содержащих по m всевозможных множителей из n переменных $(1 \leq m \leq n)$. Аналогично определяются симметрические полиномы в классе монотонных функций в базисе G_2.

Заметим, что в работе предлагаются различные методы, способы реализации булевых функций в классах формул и схем из ФЭ и получаемые при этом оценки показателей качества. Введем следующие определения. Метод, использующий непосредственный подсчет числа букв в полиноме Жегалкина, назовем **С-методом**. Он («скорый», упрощенный, быстрый метод) дает «грубую» оценку $L_Б$. Метод, основанный на классификации итераций ФУ по назначению в построениии схемы S, назовем **методом структуризации**. Он позволяет получать минимальные оценки. Метод, с помощью которого реализуется возможность синтеза схем с ветвлением ФУ, назовем **методом ветвления**. Этот метод позволяет минимизировать число ФЭ в схеме S. Метод синтеза формулы или схемы, основывающийся на ФУ, назовем **методом ФУ**. Он позволяет заранее выводить оценки для показателей качества.

Проведем исследование ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$.

При $i = 1$ или n приходим к ЭСП Жегалкина $F_1^{(n)} = f^{(n)}$ и $F_n^{(n)} = f^{(n)}$, где функция $f^{(n)}$ из одного класса — & или $\oplus$, для которых получены минимальные значения показателей качества.

Изучен также ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)} = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot x_n$, $n \geq 2$, в базисе G_3 на основе ФУ типа 1

$$F_2^{(n)} = F_2^{(n-1)} \oplus (x_n \cdot F_1^{(n-1)}), \quad n \geq 3. \tag{3.2}$$

Ниже выпишем верхние оценки [1]—[4], на которые в работе имеются ссылки,

$$L_Б(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 2)/2, \tag{3.3}$$

$$L_F(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Dep}_F(F_2^{(n)}, G_3) = 2n - 3, \tag{3.5}$$

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Dep}_S(F_2^{(n)}, G_3) = 2n - 3. \tag{3.7}$$

Затем оценки (3.5)–(3.7) улучшаются за счет использования разных методов (ФУ, определения глубины формулы [5] и ветвления)

$$\mathrm{Dep}_F(F_2^{(n)}, G_3) = n, \tag{3.8}$$

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3)_{\min} = 3n - 5, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Dep}_S(F_2^{(n)}, G_3) = n. \tag{3.10}$$

Заметим, что оценка (3.8) получена на основе ФУ и [5]; (3.9) — на основе ветвления; (3.10) — в силу изоморфизма формулы и схемы без ветвления. Теперь используем эти результаты для вывода нижней оценки показателя $L_Б(F_2^{(n)})$. В базисах G_2 и G_3 из соотношения

$$L_Б(F_2^{(n)}) = L_F(F_2^{(n)}) + 1$$

и оценки (3.9) следует нижняя оценка сложности показателя $L_Б(F_2^{(n)})$:

$$L_Б(F_2^{(n)}) \geq L_S(F_2^{(n)})_{\min} + 1 = 3n - 4. \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3.3) и (3.11) получаем

$$3n - 4 \leq L_Б(F_2^{(n)})_{\min} \leq (n^2 + n - 2)/2. \tag{3.12}$$

4. Сложность ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$ и $F_{n-(i-1)}^{(n)}$

Вначале рассмотрим свойства ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$ в базисе G_3, представляя их парами $F_i^{(n)}$ и $F_{n-(i-1)}^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$. Для **С-метода** (по самим формулам) получаем для элементов пары совпадение основного показателя сложности $L_Б$:

$$\begin{gathered}
L_Б(F_i^{(n)}, G_3) = i \cdot C_n^i = i \cdot (n(n-1)\ldots(n-(i-1)))/i! = \\
= (n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(i-1)))/(i-1)!, \\
L_Б(F_{n-(i-1)}^{(n)}, G_3) = (n-(i-1)) \cdot C_n^{n-(i-1)} = (n-(i-1)) \cdot C_n^{i-1} = \\
= (n-(i-1)) \cdot (n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(i-2)))/(i-1)!.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует

Гипотеза. Если каждый ЭСП Жегалкина из пары $F_i^{(n)}$ и $F_{n-(i-1)}^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \lfloor n/2 \rfloor$, реализовывать в базисе G_3 на основе метода ФУ типа 1 (действуя подобным образом) в классе формул или схем без ветвления, то соответствующие друг другу показатели качества ($L_Б, L_F, L_S$ и, возможно, $\mathrm{Dep}_F, \mathrm{Dep}_S$) будут иметь одинаковые оценки.

Гипотезу можно переопределить следующим образом: получив оценки для показателей качества ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, можно ожидать их у ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}$, $\lfloor n/2 \rfloor \leq i \leq n$.

Исследуя ЭСП Жегалкина

$$F_{n-1}^{(n)} = x_1 x_2 .. x_{n-2} x_{n-1} \oplus x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_n \oplus \ldots \oplus x_2 \ldots x_{n-1} x_n, \tag{4.2}$$

получаем ФУ типа 1

$$F_{n-1}^{(n)} = F_{n-1}^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_{n-2}^{(n-1)}, \quad n \geq 3. \tag{4.3}$$

Для применения метода ФУ и «действуя подобным образом» означает, что необходимо учитывать и сохранять связь степени полинома с числом переменных, зависящая от интерпретации подформул $ФУ_{ПК}$ при переходе к разностному уравнению. Отказ от подобных действий приводит к получению оценок — некоторых приближений к минимизируемому показателю качества. Для (4.3) получаем ФУ$_{\text{ПК}}$

$$L_{\text{Б}}(F_{n-1}^{(n)}) = L_{\text{Б}}(F_{n-1}^{(n-1)}) + L_{\text{Б}}(F_{n-2}^{(n-1)}) + 1 =$$
$$= (n-1) + L_{\text{Б}}(F_{n-2}^{(n-1)}) + 1 = L_{\text{Б}}(F_{n-2}^{(n-1)}) + n, \tag{4.4}$$

с начальным условием $L_{\text{Б}}(F_2^{(3)}) = u_3 = 5$. Для (4.4) получаем разностное уравнение

$$u_n - u_{n-1} = n, \tag{4.5}$$

решением которого является функция

$$u_n = (n^2 + n - 2)/2. \tag{4.6}$$

Возвращаемся к соответствующему показателю качества

$$L_{\text{Б}}(F_{n-1}^{(n)})) = (n^2 + n - 2)/2, \tag{4.7}$$

Для показателя качества L_F получаем на основе (4.3) ФУ$_{\text{ПК}}$, применяя тот же метод, что и для $L_{\text{Б}}$ в (4.4),

$$L_F(F_{n-1}^{(n)}) = L_F(F_{n-1}^{(n-1)}) + L_F(F_{n-2}^{(n-1)}) + 2 =$$
$$= L_F(F_{n-2}^{(n-1)}) + (n-2) + 2 = L_F(F_{n-2}^{(n-1)}) + n. \tag{4.8}$$

Разностным уравнением для (4.8) является (4.5), но начальное условие отличается, $L_F(F_2^{(3)}) = u_3 = 4$.

Поэтому решаем разностное уравнение (4.5), получая функцию

$$u_n = (n^2 + n - 4)/2, \tag{4.9}$$

и возвращаемся к исходному показателю

$$L_F(F_{n-1}^{(n)}) = (n^2 + n - 4)/2. \tag{4.10}$$

При представлении полинома Жегалкина (4.2) схемой S возможно использование метода с ветвлением выходов ФЭ. Поэтому оценка (4.10) для числа подфункций является достижимой верхней оценкой для числа ФЭ в соответствующей схеме S, т.е.

$$L_S(F_{n-1}^{(n)}) = (n^2 + n - 4)/2, \tag{4.11}$$

Для глубины на основе (4.3) и [5] выводим ФУ$_{\text{ПК}}$

$$\mathrm{Dep}_F(F_{n-1}^{(n)} = \max\{\mathrm{Dep}_F(F_{n-1}^{n-1}); 1 + \mathrm{Dep}_F(F_{n-2}^{(n-1)})\} + 1 =$$
$$= \max\{(n-2); 1 + \mathrm{Dep}_F(F_{n-2}^{(n-1)})\} + 1. \tag{4.12}$$

Моделируя (4.12) для $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$, получаем последовательность $5, 7, 9, 11, \ldots$ и выражение общего члена $2n - 3$, т.е. определяется аналитически сеточная функция для показателя

$$\mathrm{Dep}_F(F_{n-1}^{(n)}) = 2n - 3. \tag{4.13}$$

В силу изоморфизма формул и схем получаем оценку для показателя

$$\mathrm{Dep}_S(F_{n-1}^{(n)}) = 2n - 3. \tag{4.14}$$

Отметим, что в поддержку гипотезы для (3.3) и (4.7), (3.4) и (4.10), (3.5) и (4.13), (3.6) и (4.11), (3.7) и (4.14), получили в результате равенства в классе формул

$$L_{\text{Б}}(F_2^{(n)}) = L_{\text{Б}}(F_{n-1}^{(n)}) = (n^2 + n - 2)/2,$$

$$L_F(F_2^{(n)}) = L_F(F_{n-1}^{(n)}) = (n^2 + n - 4)/2,$$

$$\mathrm{Dep}_F(F_2^{(n)}) = \mathrm{Dep}_F(F_{n-1}^{(n)}) = 2n - 3,$$

а также для схемы S без ветвления

$$L_S(F_2^{(n)}) = L_S(F_{n-1}^{(n)}) = (n^2 + n - 4)/2,$$

$$\mathrm{Dep}_S(F_2^{(n)}) = \mathrm{Dep}_S(F_{n-1}^{(n)}) = 2n - 3.$$

Причем оценка для $L_S(F_2^{(n)})$ верхняя, она уменьшена выше (см. (3.9)) на основе ветвления выходов ФУ.
Заметим, что (3.5) и (4.13) получены на основе разных преобразований (на основе ФУ типа 1), а одинаковые преобразования ФУ типа 1 (подобные действия) дают разные результаты (3.8) и (4.13). Т.е. здесь еще необходимо дополнительное, глубокое изучение темы.
Заметим, что имеются другие методы [1-4], с помощью которых для отдельных случаев достигаются лучшие результаты. Для иллюстрации тезиса рассмотрим в качестве примера следующие два такие представления ЭСП Жегалкина $F_3^{(4)}$ и сравним их. На основе ФУ типа 1 :

- формула

$$F_3^{(4)} = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3 \oplus x_4(x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \oplus x_2)),$$

- показатели качества

$$L_{\text{Б}}(F_3^{(4)}) = 9, \quad L_F(F_3^{(4)}) = 8, \quad \mathrm{Dep}_F(F_3^{(4)}) = \mathrm{Dep}_S(F_3^{(4)}) = 5, \quad L_S(F_3^{(4)}) = 7.$$

На основе структурно-функциональной декомпозиции:

- формула

$$F_3^{(4)} = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4 = x_1x_2(x_3 \oplus x_4) \oplus x_3x_4(x_1 \oplus x_2),$$

- показатели качества

$$L_{\text{Б}}(F_3^{(4)}) = 8, \quad L_F(F_3^{(4)}) = L_S(F_3^{(4)}) = 7, \quad \mathrm{Dep}_F(F_3^{(4)}) = \mathrm{Dep}_S(F_3^{(4)}) = 3.$$

В этом примере показатели качества свидетельствуют в пользу применения метода структурно-функциональной декомпозиции.

Заключение

Полученные результаты применимы при разработке автоматизированных систем оптимального синтеза логических схем на основе интегральных схем различной степени интеграции в сочетании с методами [6], [7].

Список литературы

[1] Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Оптимизация и автоматизация синтеза симметрических комбинационных автоматов на основе базовых матричных кристаллов. Мехатроника, автоматизация, управление. № 7. 2009.

[2] Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.

[3] Чебурахин И. Ф. Функциональные уравнения и сложность булевых функций в разных базисах. Труды VII Межд. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: МАКС Пресс, 2006.

[4] Чебурахин И. Ф. Математические модели для интеллектуализации синтеза дискретных логических управляющих устройств на основе цифровых интегральных схем. Изв. РАН. ТиСУ. № 1. 2008.

[5] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

[6] Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

[7] Батыршин И. З., Недосекин А. А., Стецко А. А., Тарасов В. Б., Язенин А. В., Ярушкина Н. Г. Теория и практика нечетких гибридных систем / Под ред. Н. Г. Ярушкиной. М.: Физматлит, 2006.