УДК 519.863

ВЫПУКЛЫЕ МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Григорьев В.В.*, Тизик А.П., Тресков Ю.П.****
*Московский государственный институт международных отношений МИД России, г. Москва
**Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 23.07.2009, после переработки 10.09.2009.

В работе рассматриваются так называемые выпуклые матрицы. Доказана их абсолютная унимодулярность. Обсуждается разрешимость линейных целочисленных оптимизационных задач с выпуклой матрицей ограничений симплекс-методом и полиномиальным методом.

So-called convex matrixes are considered. It is proved their absolute unimodular Resolvability of linear integer optimization problems is discussed with a convex matrix of restrictions by a simplex-method and polynomial method.

Ключевые слова: матрица, абсолютная унимодулярность, транспортная задача, задача о ранце, полиномиальный алгоритм.
Keywords: matrix, absolute unimodular property, transportation problem, knapsack problem, polynomial algorithm.

1. Введение

Линейные целочисленные оптимизационные задачи в общем случае не могут быть решены никаким полиномиальным методом. Не могут они решаться и с помощью симплекс-метода, так как в этом случае не гарантируется целочисленность решения. Исключение составляют задачи с абсолютно унимодулярными матрицами ограничений. Для таких задач, и только таких, гарантируется целочисленность оптимального решения, получаемого с помощью симплекс-метода при любом целочисленном столбце свободных членов. Успешно применяющийся симплекс-метод не является, как известно, полиномиальным, так что остаются актуальными как поиски новых классов абсолютно унимодулярных матриц, так и полиномиальных методов решения линейных целочисленных оптимизационных задач.

2. Выпуклые матрицы и их абсолютная унимодулярность

Определение 1. Матрица A называется абсолютно унимодулярной, если все ее миноры равны либо 0, либо ± 1 [1]. Абсолютная унимодулярность матрицы ограничений задачи линейного программирования

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad cx \to \max$$

необходима и достаточна для целочисленности оптимального решения при любом неотрицательном целочисленном столбце свободных членов.

Известные достаточные условия абсолютной унимодулярности формулируются для матриц, содержащих элементы $+1$, 0, -1 [1].

Мы будем рассматривать матрицы, элементы которых равны единице или нулю.

Определение 2. Строку произвольной матрицы, состоящей из 0 и 1, назовем выпуклой по единицам, если в ней слева направо сначала идут нули (возможно ни одного), потом подряд единицы (возможно до конца строки), затем нули до конца строки. Аналогично определим выпуклый по единицам столбец.

Определение 3. Матрица A называется 1-выпуклой по строкам, если все ее строки выпуклы по единицам. Аналогично определяется матрица, 1-выпуклая по столбцам.

Матрицу, 1-выпуклую по строкам или по столбцам, будем называть 1-выпуклой.

Аналогично можно ввести определение 0-выпуклой матрицы. Далее будем называть 1-выпуклую матрицу просто выпуклой.

Теорема. Выпуклая матрица абсолютно унимодулярна.

Доказательство. Для определенности рассмотрим матрицу, выпуклую по строкам. Выберем произвольный ее минор M. Очевидно, его матрица также будет выпукла по строкам. Выделим в матрице минора M все строки, единицы в которых начинаются с первого столбца (если таковых нет – минор равен нулю). Среди выделенных строк выберем такую, в которой минимальное количество единиц, прибавим выбранную строку к остальным выделенным строкам с обратным знаком. Эта операция не меняет величины M и не нарушает выпуклости его матрицы. Кроме того, она позволяет свести вычисления минора M к вычислению с коэффициентом ± 1 минора M', порядка на 1 меньшего, чем у минора M. При этом матрица минора M' также выпукла. Тем самым теорема доказана.

Определение выпуклости матрицы дано в терминах, зависящих от взаимного расположения строк (столбцов) матрицы. Абсолютная унимодулярность выпуклой матрицы не зависит от взаимного расположения строк (столбцов). Поэтому представляет интерес алгоритм проверки, является ли произвольная заданная матрица, состоящая из 0 и 1, выпуклой или нет. Как показывают построенные примеры, матрица, выпуклая по строкам, может оказаться не выпуклой по столбцам, и наоборот. Поэтому алгоритм проверки выпуклости матрицы необходимо состоит из двух частей: проверка выпуклости по строкам и проверка выпуклости по столбцам. Очевидно, выпуклость матрицы по строкам можно проверить перестановкой ее столбцов. Рассмотрим проверку выпуклости по строкам. Переставим столбцы рассматриваемой матрицы так, чтобы некоторая в ней строка стала выпуклой. Заметим, что после получения хотя бы одной выпуклой строки возможности перестановки столбцов сужаются. Следующую строку можно сделать выпуклой лишь при соблюдении условия сохранения выпуклости уже полученной строки. Эти условия состоят в следующем: единицы выпуклой строки между собой могут переставляться произвольно, нули выпуклой строки также могут переставляться между собой произвольно, допускается также перестановка влево и вправо до конца строки всех столбцов, содержащих единицы выпуклой строки, как единого целого. Пусть мы получили некоторое количество выпуклых строк проверяемой матрицы и пусть при рассмотрении очередной строки окажется, что строка не может быть сделана выпуклой без нарушения выпуклости других строк. Тогда, очевидно, матрица не является выпуклой по строкам. Аналогично может быть проведена проверка выпуклости матрицы по столбцам. Алгоритм проверки выпуклости, очевидно, не требует большого количества операций. В некоторых случаях проверка на выпуклость может быть осуществлена быстрее.

Лемма 1. Рассмотрим матрицу A, состоящую из нулей и единиц. Пусть множество нулей W матрицы A выпукло по строкам и по столбцам. Тогда, если в множестве W имеется столбец (строка), пересекающийся со всеми строками (столбцами) множества W, то матрица A абсолютно унимодулярна.

Доказательство. Свернем матрицу A в цилиндр так, чтобы столбцы (строки) были образующими цилиндра. Далее развернем этот цилиндр в плоскость так, чтобы столбец (строка) из нулей, пересекающийся со всеми строками (столбцами) множества Wоказался крайним столбцом матрицы A. Тогда очевидно, что множество единиц матрицы A будет выпукло, а матрица A, следовательно, абсолютно унимодулярна.

Лемма 2. Рассмотрим матрицу A, состоящую из нулей и единиц. Пусть множество нулей W матрицы A выпукло по строкам и по столбцам. Тогда, если в множестве W имеется 2 соседних столбца (строки), пересекающихся в совокупности со всеми строками (столбцами) множества W, то матрица A абсолютно унимодулярна.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 1 свернём матрицу A в цилиндр, затем развернём её в плоскость так, чтобы указанные в лемме столбцы (строки) оказались крайними. Множество единиц матрицы A окажется выпуклым, а матрица A, следовательно, абсолютно унимодулярной.

Следствие. Если в матрице A имеется несколько множеств $W_1, W_2, \ldots, W_k$, удовлетворяющих условиям леммы 1 или леммы 2 и, кроме того, указанные в лемме 1 или лемме 2 столбцы (строки) множеств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ расположены, соответственно, в одном столбце (строке) матрицы A, то матрица A абсолютно унимодулярна.

Лемма 3. Если матрица A, состоящая из нулей и единиц, содержит три множества нулей W_1, W_2, W_3, расположенных в попарно непересекающихся подмножествах строк и столбцов матрицы A, то матрица A не является абсолютно унимодулярной.

Доказательство. В силу расположения множеств W_1, W_2, W_3 матрица A необходимо содержит минор

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

или получающийся из него перестановкой строк и столбцов. Модуль такого минора равен 2, следовательно, матрица A не является абсолютно унимодулярной.

Известным примером абсолютно унимодулярной матрицы ограничений, состоящей из нулей и единиц, является матрица ограничений транспортной задачи.

3. Задачи о ранце с выпуклыми матрицами ограничений

Абсолютная унимодулярность матрицы ограничений, по крайней мере некоторых, линейных целочисленных оптимизационных задач, состоящей из нулей и единиц, по-видимому, позволяет не только применить для их решения симплекс-метод, но и разработать полиномиальные методы для их решения.

Таким примером может служить одномерная задача о ранце

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad b > 0, \quad c_j > 0, \tag{2}$$

a_j принимают значения 1 или 0,
$j = 1, \ldots, n$,
x_j принимают значения 1 или 0.

Задача (1)–(2), очевидно, решается простым выбором $x_{j1}, \ldots, x_{jb}$, с номерами, соответствующими условию

$$c_{jp} \leq \min_{1 \leq r \leq b} c_{jr}, \quad m \geq p \geq 1.$$

Теперь рассмотрим двумерную задачу о ранце с абсолютно унимодулярной матрицей ограничений

$$\sum_{j=1}^{J_1} x_j \leq b_1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=j_1}^{J_2} x_j \leq b_2, \tag{4}$$

$$\sum c_j x_j \to \max, \tag{5}$$

$$j_1 < J_1, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0 \text{ — целые}, \quad c_j > 0,$$
$$J_2 > J_1.$$

Задачу (3)–(5) тоже можно легко решить без привлечения симплекс-метода.

Сначала обсудим свойства оптимального решения задачи (3)–(5).

Итак, пусть имеется оптимальное решение задачи (3)–(5). Обозначим через $c^{0,0}$ максимальный из c_j среди $x_j = 0$ и $c^{0,1}$ минимальный из c_j среди $x_j = 1$ в оптимальном решении в диапазоне индексов $j \in [1, j_1 - 1]$. Через $c^{1,0}$ и $c^{1,1}$ соответственно – в диапазоне индексов $j \in [j_1, J_1]$ и через $c^{2,0}$ и $c^{2,1}$ – в диапазоне индексов $j \in [J_1 + 1, J_2]$.

Имеем по условию оптимальности решения задачи (3)–(5)

$$\begin{aligned}
&c^{1,1} \geq c^{1,0},\\
&c^{1,1} \geq c^{0,0} + c^{2,0},\\
&c^{0,1} + c^{2,1} \geq c^{1,0},\\
&c^{0,1} \geq c^{0,0},\\
&c^{2,1} \geq c^{2,0}.
\end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями можно построить оптимальное решение задач (3)–(5) последовательным назначением нулей и единиц.

4. Пример

Решим вышеизложенным алгоритмом двумерную задачу о ранце, взятую из [2].

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 11x_5 + 10x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 \to \max,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2,\\
&x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 4.
\end{aligned}$$

Так как на x_8 и x_9 не наложены никакие ограничения, то сразу полагаем $x_8 = 1$, $x_9 = 1$. Далее $x_2 = 1$, $x_6 = 1$, так как $c_2 = \max\limits_{1\leq j\leq 2} c_j$, $c_6 = \max\limits_{5\leq j\leq 7} c_j$ и $c_2 + c_6 > c_4$ $(c_4 = \max\limits_{3\leq j\leq 4} c_j)$.

Далее $x_4 = 1$, так как $c_4 > c_1 + c_7$.

Первое ограничение вышло на равенство, поэтому следующим неравенством, определяющим значение x_j будет $c_2 + c_5 > c_3$, так как $c_2 = \min\limits_{1\leq j\leq 2} c_j$ при $x_j = 1$. Отсюда $x_5 = 1$. И снова $c_2 + c_7 > c_3$. Отсюда $x_7 = 1$. Итого, оптимальное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 1, \quad x_7 = 1, \quad x_8 = 1, \quad x_9 = 1.$$

Значение целевой функции в оптимальном решении

$$12 + 12 + 11 + 10 + 7 + 8 + 9 = 69.$$

5. Разложение двумерной задачи о ранце с выпуклой матрицей ограничений на две одномерные задачи

Докажем одно интересное свойство задачи (3)–(5). Найдем λ^0, λ^1 такие, что

$$\lambda^1 c^{1,1} \geq \lambda^0 c^{1,0}, \quad (1-\lambda^1)c^{1,1} \geq (1-\lambda^0)c^{1,0}, \tag{6}$$

$$\lambda^1 c^{1,1} \geq c^{0,0}, \quad (1-\lambda^1)c^{1,1} \geq c^{2,0}, \tag{7}$$

$$\lambda^0 c^{1,0} \leq c^{0,1}, \quad (1-\lambda^0)c^{1,0} \leq c^{2,1}, \tag{8}$$

$$0 \leq \lambda^0 \leq 1, \quad 0 \leq \lambda^1 \leq 1. \tag{9}$$

Выписанная система неравенств (6)–(9) очевидно, совместна. Добавим к (6)–(9) уравнение:

$$\lambda^1 = \lambda^0 \tag{10}$$

и решим задачу

$$\lambda^1 \to \max \tag{11}$$

при (6)–(9).

В зависимости от исходных данных решение задачи (11) будет одним из двух

$$\lambda^1 = 1 - \frac{c^{2,0}}{c^{1,1}},$$
$$\lambda^1 = \frac{c^{0,1}}{c^{1,0}}.$$

В силу выбора λ^1 сумма значений целевых функций в оптимальных решениях двух следующих задач:

$$\sum_{j=1}^{j_1-1} c_j x_j + \sum_{j=j_1}^{J_1} \lambda^1 c_j x_j \to \max, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{J_1} x_j \le b_1 \tag{13}$$

и

$$\sum_{j=j_1}^{J_1} (1-\lambda^1) c_j x_j + \sum_{j=J_1+1}^{J_2} c_j x_j \to \max, \tag{14}$$

$$\sum_{j=j_1}^{J_2} x_j \le b_2 \tag{15}$$

при тех же обозначениях, что и в задаче (3)–(5) будет равна значению целевой функции задачи (3)–(5) и решение задачи (3)–(5) может быть составлено из решений задач (12), (13) и (14), (15).

6. Заключение

Итак, в работе введено понятие выпуклой матрицы, доказана абсолютная унимодулярность выпуклых матриц, рассмотрены некоторые признаки абсолютной унимодулярности матриц. Показано, что для решения одно- и двумерной задач о ранце с выпуклыми матрицами ограничений можно использовать полиномиальный алгоритм.

Список литературы

[1] Т. Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[2] И.Х. Сигал, А.П. Иванова. Введение в прикладное дискретное программирование М.: Физматлит, 2007.