УДК 519.816

О МИНИМУМЕ ФУНКЦИОНАЛА ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ОБЪЕКТА В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ[1]

Галяев А.А.
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.11.2009, после переработки 16.11.2009.

В работе доказано, что при степенной зависимости функционала обнаружения от модуля скорости движения объекта в конфликтной среде экстремали функционала доставляют ему глобальный минимум.

The risk's power dependence from velocity modula is considered. The global minimum of risk extremals is proved.

Ключевые слова: управление движением, конфликтная среда, вариационное исчисление, глобальный минимум функционала.
Keywords: path planning, threat environment, variational calculus, global minimum.

1. Введение

В работе [1], которая явилась логическим продолжением работы [2], решается вариационная задача о построении оптимальной траектории уклонения на плоскости для функционала обнаружения (риска) в случае управления скоростью движения объекта. При решении задачи нахождения траектории и параметров движения управляемого объекта в конфликтной среде, где конфликтующим объектом является сенсор, ведущий наблюдение в пассивном режиме, получается семейство экстремалей. В результате решения краевой задачи для уравнений Эйлера-Лагранжа в работе [1] получен аналитический вид экстремалей и законы изменения скорости управляемого объекта на них. Также произведен количественный анализ значений функционала обнаружения при различных законах изменения скорости на выбранной экстремальной траектории движения управляемого объекта.

Те частные случаи, рассмотренных в [1] экстремальных траекторий и законов изменения скорости, навели на мысль, что скорее всего имеет место глобальный минимум функционала обнаружения на экстремалях задачи. Поэтому целью настоящей работы является исследование достаточных условий минимума функционала обнаружения. Оказывается, что на экстремалях задачи выполняется неравенство аналогичное неравенству треугольника. В результате будет доказано, что экстремали функционала доставляют ему глобальный минимум на классе дважды

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №07-08-00739-а), программы №29 Президиума РАН «Математическая теория управления».

непрерывно–дифференцируемых траекторий. А в случае, когда найденная экстремаль является логарифмической спиралью, условия глобального минимума легко проверяются.

2. Постановка задачи

На плоскости расположены два объекта - одиночный неподвижный наблюдатель и управляемый подвижный объект. Координаты начальной и конечной точек маршрута и позиции наблюдателя заданы в неподвижной декартовой системе, начало которой совпадает с позицией наблюдателя. Управляемый объект перемещается из фиксированной начальной в фиксированную конечную точку маршрута (из $A(x_1, y_1)$ в $B(x_2, y_2)$), за фиксированное время T минимизируя путем выбора траектории и скорости объекта управления функционал обнаружения (риск)

$$R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \int_0^T \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{x^2 + y^2}\, dt \longrightarrow \min_{(\dot{x}, \dot{y}, x, y)}, \tag{1}$$

где T – время движения объекта по траектории, m – произвольный показатель степени.

В работе [1] был получен аналитический вид экстремалей функционала (1) и проведено сравнение значений функционала на различных траекториях движения объекта и при различных скоростных режимах. Докажем, что на этих экстремалях при $m \geq 1/2$ значение функционала (1) является глобальным минимумом.

3. Решение задачи

Перейдем теперь от декартовых координат (x, y) в полярные координаты (r, ψ). В этих координатах функционал обнаружения становится равным

$$R(r, \psi, \dot{r}, \dot{\psi}) = \int_0^T \frac{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2)^m}{r^2} dt. \tag{2}$$

Далее осуществим замену $\rho = \ln r$, которая приводит функционал (2) к виду

$$R(\rho, \psi, \dot{\rho}, \dot{\psi}) = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\psi}^2)^m \Phi(\rho) dt, \tag{3}$$

где $\Phi(\rho) = \exp(k\rho)$, $k = 2m - 2$.

Функционал (3) записан в удобном для дальнейшего исследования виде. Пусть функции $r_*(t)$ и $\psi_*(t)$ доставляют экстремум функционалу (2). Следуя работе [1], формулы (4), (5) представляют эти зависимости:

$$r_*(\psi_*) = r_0 \left(\cos\left(\psi_* \frac{k}{2m} + C_2 \right) \right)^{-\frac{2m}{k}}, \tag{4}$$

где константы r_0, C_2 определяются краевыми условиями, т.е. координатами (r_A, ψ_A) и (r_B, ψ_B),

$$r_0 = r_A \left(\frac{\left(\sin\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)\right)^2}{1 + d_1^2 - 2d_1 \cos\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)} \right)^{\frac{m}{k}}, \quad d_1 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^{\frac{k}{2m}},$$

$$C_2 = \arctan\left(\frac{d_1\cos\left(\psi_A\frac{k}{2m}\right) - \cos\left(\psi_B\frac{k}{2m}\right)}{d_1\sin\left(\psi_A\frac{k}{2m}\right) - \sin\left(\psi_B\frac{k}{2m}\right)}\right).$$

$$C_4 t = \frac{2m}{k}\left[\tan\left(\psi_*\frac{k}{2m} + C_2\right)\right]_{\psi_A}^{\psi_B}, \quad C_4 = \frac{1 + d_1^2 - 2d_1\cos\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)}{d_1\sin\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)}\frac{2m}{k}\frac{1}{T}. \tag{5}$$

Случай $m = 1$ $(k = 0)$ будет рассмотрен отдельно.

3.1 Достаточные условия локального минимума

Сначала докажем, что $r_*(t)$ и $\psi_*(t)$ доставляют локальный минимум функционалу (2). Введем следующие общепринятые обозначения. Пусть $q_1 = \rho$, $q_2 = \psi$, $L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2\right)^m \Phi(q_1)$. Тогда $R(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \int_0^T L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)\, dt$. Так как функция Лагранжа $L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то ее приращение в области около экстремальной траектории можно представить в виде

$$\triangle L = \delta L + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}\delta q_i \delta q_j + 2\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot q_j}\delta q_i \delta \dot q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\delta \dot q_i \delta \dot q_j\right) + o(d^2) \tag{6}$$

где $d = \sqrt{\delta q_1^2 + \delta q_2^2 + \delta \dot q_1^2 + \delta \dot q_2^2}$, а δq_i, $\delta \dot q_i$ при $i = 1, 2$ являются вариациями функций q_i, $\dot q_i$ соответственно. При этом считаем, что δq_i, $\delta \dot q_i$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями с заданными краевыми условиями $\delta q_i(0) = \delta q_i(T) = 0$. Члены степени 1 и 2 относительно δq_i, $\delta \dot q_i$ в формуле Тейлора (6) соответственно составляют первую вариацию δL функции L и половину второй ее вариации $\delta^2 L$.

Равенство нулю первой вариации функции L дает необходимые условия минимума фунционала обнаружения R. На экстремальной траектории выполняются уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Учитывая, что выполнены равенства $\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ и как следствие уравнений (7) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_2} = 0$, интеграл по времени от второй вариации может быть представлен в виде

$$\int_0^T \delta^2 L dt = \int_0^T \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \dot q_1}\right)\delta q_1^2 + \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\delta \dot q_i \delta \dot q_j\right) dt$$

Из-за экспоненциальной зависимости L от q_1 вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \dot q_1} = (2m-2)\left(\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right) = 0,$$

которое есть ничто иное как уравнение (7), выполняющееся на экстремали исходной задачи. Откуда следует, что разность $\triangle R = R(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta\dot{q}_2) - R(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ представима в виде

$$\triangle R = \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta\dot{q}_i \delta\dot{q}_j \right) dt + o(d^2) > 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) определяет тот факт, что экстремальная траектория функционала обнаружения (1) является траекторией, доставляющей локальный минимум этому функционалу [3], [4].

Осталось найти при каких значениях m квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta\dot{q}_i \delta\dot{q}_j$ является положительно определенной. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 1. При $m \geq \frac{1}{2}$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta\dot{q}_i \delta\dot{q}_j$ является положительно определенной.

Доказательство. Выпишем искомую квадратичную форму в явном виде

$$\frac{2mL}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2)^2} \left(((2m-1)\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\delta\dot{q}_1^2 + 2(m-1)\dot{q}_1\dot{q}_2\delta\dot{q}_1\delta\dot{q}_2 + ((2m-1)\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2)\delta\dot{q}_2^2 \right). \tag{9}$$

Так как $\frac{2mL}{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2)^2} > 0$, то знак искомой квадратичной формы совпадает со знаком формы, определенной последним множителем выражения (9), а именно знаком формы

$$\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}\delta\dot{q}_i\delta\dot{q}_j = ((2m-1)\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\delta\dot{q}_1^2 + 2(m-1)\dot{q}_1\dot{q}_2\delta\dot{q}_1\delta\dot{q}_2 + ((2m-1)\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2)\delta\dot{q}_2^2.$$

Для положительной определенности G_{ij} вследствие произвольности $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ необходимо, чтобы $2m - 1 \geq 0$, и $\det G_{ij} > 0$.

$$\det G_{ij} = (2m-1)(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + ((2m-1)^2 + 1 - (m-1)^2)\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 > 0 \tag{10}$$

Неравенство (10) при $2m - 1 \geq 0$ всегда выполняется, так как $3m^2 - 2m + 1 > 0$. Доказательство завершено.

Тем самым было доказано, что экстремали функционала обнаружения вида (1) – (3) доставляют ему локальный минимум.

Далее в случае $m = 1$ удается достаточно просто доказать глобальность минимума функционала обнаружения.

3.2 Случай $m = 1$

Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $m = 1$, тогда функции $\rho_*(t)$ и $\psi_*(t)$ доставляют глобальный минимум функционалу (3).

Доказательство. В случае $m = 1$ экстремальная траектория движения является логарифмической спиралью [1]. Тогда через любые две точки плоскости (x, y) можно провести единственную спираль при $\psi \in [0, \pi]$. Предположим, что $\rho(t) = \rho_*(t) + \delta\rho(t)$ и $\psi(t) = \psi_*(t) + \delta\psi(t)$ определяют некоторую непрерывно-дифференцируемую траекторию движения объекта управления. Переменную t в функциях $\rho(t)$ и $\psi(t)$ дальнейшем при доказательстве будем опускать. Выпишем функционал обнаружения на этой траектории, учитывая, что в этом случае $\Phi(\rho) = 1$.

$$R(\rho, \psi, \dot{\rho}, \dot{\psi}) = \int_0^T ((\dot{\rho}_* + \delta\rho)^2 + (\dot{\psi}_* + \delta\psi)^2)dt =$$
$$= \int_0^T ((\dot{\rho}_*)^2 + (\dot{\psi}_*)^2)dt + \int_0^T ((\delta\dot{\rho})^2 + (\delta\dot{\psi})^2)dt + 2\int_0^T (\dot{\rho}_*\delta\dot{\rho} + \dot{\psi}_*\delta\dot{\psi})dt.$$

Последнее слагаемое в вышестоящем выражении равно нулю вследствие того, что функции $\rho_*(t)$ и $\psi_*(t)$ доставляют экстремум функционалу (3). Функционал обнаружения становится равным

$$R(\rho, \psi, \dot{\rho}, \dot{\psi}) = R(\rho_*, \psi_*, \dot{\rho}_*, \dot{\psi}_*) + \int_0^T ((\delta\dot{\rho})^2 + (\delta\dot{\psi})^2)dt. \tag{11}$$

Из равенства (11) следует, что $R(\rho, \psi, \dot{\rho}, \dot{\psi}) > R(\rho_*, \psi_*, \dot{\rho}_*, \dot{\psi}_*)$, если $\delta\rho \neq 0$ и $\delta\psi \neq 0$ не равны нулю одновременно. Доказательство завершено.

Итак леммой 2 было установлено, что для значения $m = 1$ локальный минимум является глобальным.

3.3 О временной плотности сигнала на экстремальной траектории

Функция Лагранжа исходной задачи является временной плотностью сигнала, пришедшего на сенсор. Далее, пусть L^*_{AB}– плотность сигнала на экстремальной траектории. В работе [1] доказано, что $L^*_{AB} \equiv const$. Пусть r_A, r_B – длина радиус векторов, проведенных в точки A и B соответственно. Тогда выполняется равенство

$$L^*_{AB} = \frac{1}{T^{2m}}\left(\frac{4m^2}{k^2}\right)^m \left(r_A^{\frac{k}{m}} + r_B^{\frac{k}{m}} - 2r_A^{\frac{k}{2m}} r_B^{\frac{k}{2m}} \cos\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)\right)^m. \tag{12}$$

Следствием формулы (12) является зависимость функционала обнаружения от краевых условий задачи

$$R_{AB}(T) = \frac{K}{T^{2m-1}}|\mathbf{w}_{AB}|^{2m}. \tag{13}$$

где $|\mathbf{w}_{AB}| = \left(r_A^{\frac{k}{m}} + r_B^{\frac{k}{m}} - 2r_A^{\frac{k}{2m}} r_B^{\frac{k}{2m}} \cos\left((\psi_B - \psi_A)\frac{k}{2m}\right)\right)^{1/2}$, $K = \left(\frac{4m^2}{k^2}\right)^m$. Поставим вопрос: "Можно ли разбив временной интервал $[0, T]$ на два интервала, выбрав промежуточную точку C и двигаясь по экстремалям от A к C и далее от

C к B, получить значение функционала обнаружения меньшее чем при движении по экстремали от A к B?". Ответ дает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $R_{AB}(T)$ определяется формулой (13), и выполняется равенство $T = T_1+T_2$. Тогда для любых r_A, r_B, r_C, ψ_A, ψ_B, ψ_C справедливо неравенство

$$R_{AB}(T) \leq R_{AC}(T_1) + R_{CB}(T_2). \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая равенство $T = T_1 + T_2$, получаем

$$R_{AC}(T-T_2) + R_{CB}(T_2) = \frac{K}{(T-T_2)^{2m-1}}|\mathbf{w}_{AC}|^{2m} + \frac{K}{T_2^{2m-1}}|\mathbf{w}_{CB}|^{2m}. \tag{15}$$

Выражение (15) как функция аргумента T_2 является положительным, и его значение при стремлении T_2 к границам интервала $(0,T)$ становится бесконечно большим. Поэтому это выражение имеет на интервале $T_2 \in (0,T)$ минимум. Найдем значение T_2 доставляющее минимум выражению (15). Требование $\min\limits_{T_2}(R_{AC}(T-T_2) + R_{CB}(T_2))$ дает

$$T_1 = \frac{|\mathbf{w}_{AC}|}{|\mathbf{w}_{AC}| + |\mathbf{w}_{CB}|}T, \qquad T_2 = \frac{|\mathbf{w}_{CB}|}{|\mathbf{w}_{AC}| + |\mathbf{w}_{CB}|}T.$$

Откуда следует, что

$$\min_{T_1+T_2=T}(R_{AC}(T_1) + R_{CB}(T_2)) = \frac{K}{T^{2m-1}}\left(|\mathbf{w}_{AC}| + |\mathbf{w}_{CB}|\right)^{2m}. \tag{16}$$

Определение $|\mathbf{w}_{AB}|$ в формуле (13) по смыслу является немного модифицированной теоремой косинусов. Поэтому для любых точек A, B, C выполняется неравенство

$$|\mathbf{w}_{AB}| \leq |\mathbf{w}_{AC}| + |\mathbf{w}_{CB}|. \tag{17}$$

Объединяя равенство (16) и неравенство (17), при $m \geq 1/2$ получаем

$$R_{AB}(T) \leq \min_{T_1+T_2=T}(R_{AC}(T_1) + R_{CB}(T_2)) \leq R_{AC}(T_1) + R_{CB}(T_2).$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3 может быть обобщена на произвольное разбиение временного интервала $[0,T]$.

Лемма 4. Пусть T_i, где $i = 0,\ldots,N$, являются последовательными моментами времени, причем $T_0 = 0$, $T_N = T$, $\triangle T_i = T_{i+1} - T_i$. Пусть в эти моменты времени T_i траектория движения объекта проходит через точки B_i соответственно, причем точка B_0 совпадает с точкой A, а точка B_N с точкой B. Тогда выполнено неравенство

$$R_{AB}(T) \leq \sum_{i=0}^{N-1} R_{B_iB_{i+1}}(\triangle T_i).$$

Доказательство леммы 4 следует по индукции из леммы 3.

Все необходимые приготовления уже сделаны, что дает возможность сформулировать и доказать главный результат работы.

3.4 Глобальный минимум функционала обнаружения

Теорема. Пусть $m \geq 1/2$. Экстремаль функционала обнаружения вида (1) как решение уравнений Эйлера-Лагранжа (7) доставляет функционалу глобальный минимум на классе $\mathcal{C}^2[0,T]$ дважды непрерывно – дифференцируемых траекторий.

Доказательство. Будем использовать обозначения лемм 3 и 4. Выберем произвольную траекторию $(q_1(t), q_2(t))$ движения объекта из точки A в точку B, где $q_1(t),\ \ q_2(t)$ дважды непрерывно – дифференцируемые функции. Выберем произвольное достаточно мелкое разбиение произвольно выбранной траектории, такое что модуль скорости движение объекта мало меняется. Это всегда можно сделать вследствие дважды непрерывной дифференцируемости траектории. Пусть $L(q_1(t), q_2(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t))$– плотность сигнала на выбранной траектории, обозначим через $L_{B_iB_{i+1}}(t)$ эту же плотность сигнала на выбранной траектории при движении из точки B_i в точку B_{i+1}. Тогда значение функционала обнаружения на выбранной траектории равно

$$R = \sum_{i=0}^{N-1} L_{B_iB_{i+1}}(T_i)\triangle T_i + o(\max_i \triangle T_i). \tag{18}$$

Отсюда видно, что фактически при движении из точки B_i в точку B_{i+1} плотность сигнала остается постоянной. Значит можно считать, что на этом куске траектории выполняются уравнения Эйлера-Лагранжа (7), откуда вследствие единственности решения краевой задачи и малости разбиения получаем

$$L_{B_iB_{i+1}}(T_i) = L^*_{B_iB_{i+1}} + o(\triangle T_i). \tag{19}$$

Объединение результатов леммы 4 и формул (18), (19) дает неравенство

$$R_{AB}(T) \leq \sum_{i=0}^{N-1} R_{B_iB_{i+1}}(T_{i+1} - T_i) = R + o(\max_i \triangle T_i). \tag{20}$$

В выражении (20) перейдем к пределу при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. Вследствие произвольности разбиения выбранной траектории получаем

$$R_{AB}(T) \leq R. \tag{21}$$

Здесь $R_{AB}(T)$ есть значение функционала на экстремали, а R– его значение на произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой траектории. Неравенство (21) означает, что экстремаль функционала обнаружения вида (1) как решение уравнений Эйлера-Лагранжа (7) доставляет функционалу глобальный минимум. Теорема доказана.

Заключение

В заключении работы хотелось отметить те характерные особенности рассмотренной задачи, благодаря которым удалось полностью ее решить.

- Функция Лагранжа, входящая в функционал обнаружения, с точностью до постоянного множителя, зависящего от m, совпадает с функцией Гамильтона искомой вариационной задачи.
- Вследствие автономности системы уравнений Эйлера-Лагранжа гамильтониан является первым интегралом этой системы уравнений.
- Решение системы уравнений Эйлера-Лагранжа является единственным при $m \geq 1/2$ и любых краевых условиях.
- Любую траекторию движения системы с некоторым законом изменения скорости на ней можно приблизить экстремальными траекториями, которых функция Лагранжа является постоянной.
- Сумма значений функционалов обнаружения на этих экстремалях больше или равна значения функционала обнаружения на постоянной функции Лагранжа, соответствующей экстремали исходной вариационной задачи (леммы 3 и 4, теорема 1).

Список литературы

[1] Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде. Известия РАН. Теория и системы управления, 2009, №3, с. 130-136.

[2] Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P. Optimal Risk Path Algorithms.// Cooperative Control and Opimizaton. Ch.1/ R. Murphey, P.Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad., 2002. P.271-303.

[3] Босс В.Г. Лекции по математике. Оптимизация. Т.7, URSS, 2007.

[4] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. Физматгиз, 1962.