МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

О КЛАССАХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.06.2020, после переработки 18.06.2020.

Получено условие совпадения решений уравнений Навье–Стокса и квазигидродинамической системы. Показано, что многие известные решения системы Навье–Стокса подчиняются этому условию. Рассмотрены классы точных решений, общих для уравнений Навье–Стокса и квазигидродинамической системы. Применение принципа суперпозиции при построении точных решений показано на конкретных примерах, как в стационарном, так и в нестационарном случае.

Ключевые слова: система Навье–Стокса, квазигидродинамическая система, условие совпадения решений, классы точных решений, принцип суперпозиции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17.
https://doi.org/10.26456/vtpmk592

Введение

Построению точных решений классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература [1–5]. Эти решения играют важную роль в численном анализе, так как используются в качестве тестов компьютерных программ. Альтернативная квазигидродинамическая (КГД) система была предложена в 1993 году автором [6]. Обоснованию подхода, выявлению связей с классической теорией Навье–Стокса посвящены монографии [7, 8]. Анализ точных решений КГД системы был продолжен в работах [9–13]. В частности, в [10] для построения стационарных решений, общих для систем Навье–Стокса и КГД, использовался принцип суперпозиции. В цилиндрических координатах этот принцип применялся в [9]. Идея расщепления уравнений Навье–Стокса, фактически приводящая к принципу суперпозиции, рассматривалась в [14].

В настоящей работе рассмотрены классы точных решений квазигидродинамической системы, удовлетворяющих предложенному автором условию. Все построенные решения являются точными и для соответствующей системы Навье–Стокса. Указанному условию подчиняются многие классические решения уравнений Навье–Стокса.

1. Условие совпадения решений уравнений Навье–Стокса и квазигидродинамической системы

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в виде

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla \big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости, Δ – оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами.

Пренебрегая в системе (1.1) – (1.2) членами, содержащими τ, получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.5}$$

Будем рассматривать гладкие (бесконечно-дифференцируемые) решения систем Навье–Стокса и КГД. Справедлива

Теорема 1. *Пусть пара бесконечно-дифференцируемых функций* $(\vec{u}, p)$ *образует точное решение системы Навье–Стокса* (1.4) – (1.5) *и выполнено условие*

$$(\vec{w} \cdot \nabla)\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{w} = 0. \tag{1.6}$$

Тогда $(\vec{u}, p)$ *является гладким решением квазигидродинамической системы.*

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – бесконечно-дифференцируемое решение системы Навье–Стокса (1.4) – (1.5). Тогда выполняется равенство (1.4). Подействуем оператором «div» на обе части равенства (1.5). Принимая во внимание (1.3) и (1.4), получим

$$\mathrm{div}\ \vec{w} = 0. \tag{1.7}$$

В силу (1.4), (1.7) первое уравнение квазигидродинамической системы обращается в истинное равенство. Преобразуем (1.2) к эквивалентному виду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p - \nu \Delta \vec{u} =$$

$$= \nu\nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) + \vec{w}\ \mathrm{div}\ \vec{u} + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w}. \qquad (1.8)$$

Учтем (1.4) и (1.5). При выполнении условия (1.6) пара функций $(\vec{u}, p)$ обращает (1.8) в истинное равенство. □

Замечание 1. *Условие* (1.6) *было получено автором.*

См., например, [8], с. 98.

Замечание 2. *Условие* (1.6) *может быть представлено в эквивалентном виде*

$$\nabla\big(\vec{u}\cdot\vec{w}\big) - \vec{u}\times\mathrm{rot}\ \vec{w} - \vec{w}\times\mathrm{rot}\ \vec{u} = 0. \qquad (1.9)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться известным векторным тождеством, приведенным в [1] на с. 32.

2. Общие решения системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы в декартовых координатах

Запишем систему Навье–Стокса (1.4) – (1.5) в декартовых координатах:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \qquad (2.4)$$

Она замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x,y,z,t)$, $u_y = u_y(x,y,z,t)$, $u_z = u_z(x,y,z,t)$ и давления $p = p(x,y,z,t)$. Займемся поиском классов точных решений уравнений Навье–Стокса (2.1) – (2.4), подчиняющихся условию (1.6). По теореме, доказанной в предыдущем пункте, найденные решения будут также удовлетворять КГД системе (1.1) – (1.2), выписанной в декартовых координатах.

Класс 1. Будем искать решение системы (2.1) – (2.4) в виде

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x,y,t), \qquad (2.5)$$

$$p = A(t)z + B(t). \qquad (2.6)$$

Здесь $A(t)$ и $B(t)$ – неизвестные функции времени. Для зависимостей (2.5), (2.6) декартовы компоненты вектора $\vec{w}$ выглядят следующим образом:

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = \tau A(t). \qquad (2.7)$$

Условие (1.6) принимает вид

$$\tau A(t)\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}0\\0\\u_z(x,y,t)\end{pmatrix}+u_z(x,y,t)\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}0\\0\\\tau A(t)\end{pmatrix}=0. \tag{2.8}$$

Равенство (2.8), очевидно, выполняется. Подстановка (2,5), (2.6) в (2.1) – (2.3) приводит к истинным равенствам. Соотношение (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\Big)-A(t). \tag{2.9}$$

Линейное двумерное уравнение теплопроводности (2.9) с источниковым членом $\big(-A(t)\big)$ в правой части хорошо изучено. Можно привести множество точных решений этого уравнения для конкретных задач. Ограничимся несколькими известными примерами.

Пример 1. Задача Стокса. Пусть жидкость занимает полупространство $x \geqslant 0$, а плоскость yoz, являющаяся твердой границей, совершает гармонические колебания параллельно оси oz с положительной частотой ω. Решение системы (2.1) – (2.4), отвечающее этой задаче, будем искать в виде

$$u_x=0,\quad u_y=0,\quad u_z=u_z(x,t), \tag{2.10}$$

$$p=p_0. \tag{2.11}$$

Из (2.9) находим одномерное линейное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \tag{2.12}$$

которое имеет решение (см. [2], с. 122–123) типа затухающей бегущей волны

$$u_z=U_0\exp\Big(-\frac{x}{\delta}\Big)\cos\Big(\frac{x}{\delta}-\omega t\Big). \tag{2.13}$$

Здесь $\delta=\sqrt{2\nu/\omega}$, U_0 – заданная положительная постоянная.

Пример 2. Рассмотрим течение жидкости между двумя параллельными плоскостями с координатами $x=0$ и $x=H>0$. Левая плоскость совершает гармонические колебания в направлении оси oz с положительной частотой ω. Скорость на ней меняется по закону

$$u_z\Big|_{x=0}=U_0\cos(\omega t). \tag{2.14}$$

Правая плоскость неподвижна. Для системы Навье–Стокса эта задача решена в [2] на с. 128. Схема такая же, как и в предыдущем примере. Зависимость $u_z=u_z(x,t)$ имеет вид

$$u_z=Re\bigg(U_0e^{-i\omega t}\frac{\sin\big(k(H-x)\big)}{\sin(kH)}\bigg). \tag{2.15}$$

Здесь i – мнимая единица, $k=(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}$. Символом Re обозначена действительная часть комплексного числа.

Класс 2. Займемся поиском решений системы (2.1) – (2.4) вида

$$u_x = 0, \quad u_y = u_y(x,t), \quad u_z = u_z(x,t), \tag{2.16}$$

$$p = A(t)y + B(t)z + C(t). \tag{2.17}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – неизвестные функции времени. Для распределений скорости (2.16) и давления (2.17) декартовы компоненты вектора $\vec{w}$ выглядят так:

$$w_x = 0, \quad w_y = \tau A(t), \quad w_z = \tau B(t). \tag{2.18}$$

Условие (1.6) запишется следующим образом:

$$\tau\Big(A(t)\frac{\partial}{\partial y} + B(t)\frac{\partial}{\partial z}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ u_y(x,t) \\ u_z(x,t) \end{pmatrix} + \Big(u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \tau A(t) \\ \tau B(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{2.19}$$

Соотношение (2.19) представляет собой истинное равенство. Для зависимостей (2.16) и (2.17) равенства (2.1) и (2.2) удовлетворяются тождественно. Уравнения (2.3), (2.4) принимают, соответственно, вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - A(t), \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - B(t). \tag{2.21}$$

Проблема свелась к анализу двух независимых линейных одномерных нестационарных уравнений теплопроводности с источниковыми членами. Это позволяет применять принцип суперпозиции при построении точных решений уравнений Навье–Стокса и КГД. Продемонстрируем этот принцип лишь на одном примере.

Пример 3. Рассмотрим движение жидкости между двумя параллельными плоскими пластинами, которые расположены перпендикулярно оси ox и имеют координаты $x = 0$ и $x = H > 0$, соответственно. Правая пластина колеблется с положительной частотой ω_1 параллельно оси oy. Компоненты скорости на ней равны

$$u_y\Big|_{x=H} = U_0\cos(\omega_1 t), \qquad u_z\Big|_{x=H} = 0. \tag{2.22}$$

Левая пластина совершает гармонические колебания параллельно оси oz с положительной частотой ω_2. Граничные условия для составляющих поля скорости на ней выглядят следующим образом:

$$u_y\Big|_{x=0} = 0, \qquad u_z\Big|_{x=0} = V_0\cos(\omega_2 t). \tag{2.23}$$

В (2.22) и (2.23) символами U_0 и V_0 обозначены заданные положительные константы. Давление в жидкости считаем постоянным:

$$p = p_0 = const > 0.$$

Тогда $A(t) = 0$, $B(t) = 0$. Уравнения (2.20) и (2.21) принимают вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}.$$

Решения выписанных краевых задач находятся по стандартной схеме (см. [2], с. 128):

$$u_y = Re\biggl(U_0 e^{-i\omega_1 t} \frac{\sin\bigl(k_1 x\bigr)}{\sin(k_1 H)}\biggr),$$

$$u_z = Re\biggl(V_0 e^{-i\omega_2 t} \frac{\sin\bigl(k_2 (H - x)\bigr)}{\sin(k_2 H)}\biggr).$$

Здесь $k_1 = (1+i)\sqrt{\omega_1/2\nu}$, $k_2 = (1+i)\sqrt{\omega_2/2\nu}$. Составляющая скорости u_x равна нулю.

3. Общие решения системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах

Классическая система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах [2] выглядит так:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} =$$
$$= \nu \biggl[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\biggr], \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} =$$
$$= \nu \biggl[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\biggr], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} =$$
$$= \nu \biggl[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\biggr]. \tag{3.4}$$

Неизвестными в ней являются компоненты вектора скорости $u_r = u_r(r, \varphi, z, t)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi, z, t)$, $u_z = u_z(r, \varphi, z, t)$ в базисе $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ и давление $p = p(r, \varphi, z, t)$.

Класс 3. Будем искать решение системы (3.1) – (3.4) в виде

$$u_r = 0, \qquad u_\varphi = u_\varphi(r,t), \qquad u_z = u_z(r,t), \tag{3.5}$$

$$p = \widehat{p}(r,t) + A(t)z + B(t). \tag{3.6}$$

Для зависимостей (3.5), (3.6) составляющие вектора $\vec{w}$ в базисе $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ таковы:

$$w_r = \tau\Big(\frac{\partial \widehat{p}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r}\Big), \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = \tau A(t). \tag{3.7}$$

Если

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial r} = \frac{u_\varphi^2}{r}, \tag{3.8}$$

то условие (1.6) выполняется. Принимая во внимание (3.8), подставим (3.5) и (3.6) в (3.1) – (3.4). Это приводит к соотношениям

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\Big) - \frac{u_\varphi}{r^2}\right], \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big) - A(t). \tag{3.10}$$

Система, эквивалентная (3.8) – (3.10), была выписана в [14] на с. 167. Идея расщепления системы Навье–Стокса состоит в том, что уравнения (3.9) и (3.10) могут быть решены по отдельности, независимо друг от друга. Функция $\widehat{p} = \widehat{p}(r,t)$ находится из (3.8) простым интегрированием:

$$\widehat{p}(r,t) = p_0 + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{u_\varphi^2(r_*,t)}{r_*}\, dr_*. \tag{3.11}$$

Здесь r и r_0 – заданные неотрицательные числа, p_0 – положительное число.

Пример 4. Задача Озина. В формулах (3.5), (3.6) положим $u_z = 0$, $A(t) = 0$, $B(t) = 0$. Тогда (3.10) удовлетворяется тождественно. Уравнение (3.9) имеет частное решение

$$u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}\Big[1 - \exp\Big(-\frac{r^2}{4\nu t}\Big)\Big]. \tag{3.12}$$

Распределение давления может быть найдено по формуле

$$p = p_\infty - \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{u_\varphi^2(r_*,t)}{r_*}\, dr_*. \tag{3.13}$$

Символом Γ обозначена положительная константа, p_∞ – значение давления в бесконечно удаленной точке. Решение (3.12) – (3.13) описывает эволюцию изолированной вихревой нити в вязкой жидкости.

Пример 5. Суперпозиция течений Куэтта между соосными цилиндрами. Рассмотрим стационарное течение жидкости, заключенной между двумя вращающимися с постоянными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 соосными цилиндрами. Пусть

R_1 и R_2 – их радиусы, причем $R_2 > R_1 > 0$. Выберем цилиндрические координаты r, φ, z с осью oz по оси цилиндров. Предположим еще, что внутренний цилиндр радиуса R_1 движется вдоль оси oz с постоянной скоростью U, а составляющая скорости вдоль оси oz внешнего цилиндра радиуса R_2 равна нулю. Решение будем искать в виде

$$u_r = 0, \qquad u_\varphi = u_\varphi(r), \qquad u_z = u_z(r), \tag{3.14}$$

$$p = p(r). \tag{3.15}$$

Зависимости (3.14) и (3.15) есть частный случай (3.5) и (3.6) для установившихся течений. Градиент давления в направлении оси oz отсутствует. Уравнения (3.9) и (3.10) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\varphi)}{\partial r}\Big) = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big) = 0. \tag{3.17}$$

С учетом граничных условий получаем

$$u_\varphi = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\, r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}, \tag{3.18}$$

$$u_z = U\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}, \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2. \tag{3.19}$$

Компонента скорости u_r равна нулю. Распределение давления имеет вид

$$\begin{aligned} p(r) = p_1 + \frac{1}{\big(R_2^2 - R_1^2\big)^2}\Big[&\big(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2\big)^2\ \frac{r^2 - R_1^2}{2} + \\ &+2\big(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2\big)\big(\Omega_1 - \Omega_2\big)R_1^2 R_2^2 \ln\Big(\frac{r}{R_1}\Big) + \\ &+\big(\Omega_1 - \Omega_2\big)^2 R_1^4 R_2^4\Big(\frac{1}{2R_1^2} - \frac{1}{2r^2}\Big)\Big], \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь $p_1 = p(R_1)$.

4. Потенциальные и однородно-винтовые течения

Итак, предложенному автором условию

$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w} = 0 \tag{4.1}$$

подчиняются многие известные решения классической системы Навье–Стокса, как в стационарном, так и в нестационарном случае. Это условие может быть представлено в эквивалентном виде

$$\Big(\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big)\cdot\nabla\Big)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big) = 0. \tag{4.2}$$

Все построенные решения удовлетворяют также квазигидродинамической системе. Выписанному условию подчиняются стационарные потенциальные течения жидкости и нестационарные однородно-винтовые течения.

Действительно, пусть в некоторой области V пространства $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ задана гармоническая функция $\varPhi = \varPhi(\vec{x})$. Определим поле скорости по формуле

$$\vec{u} = \nabla \varPhi. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \quad \mathrm{rot}\ \vec{u} = 0, \quad \Delta \vec{u} = 0. \tag{4.4}$$

Давление определим по формуле Бернулли

$$p = p_0 - \frac{\vec{u}^2}{2}. \tag{4.5}$$

Здесь $p_0 = const$. Нетрудно проверить [8], что пара функций $(\vec{u}, p)$, определяемых формулами (4.3) и (4.5), является общим точным решением стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД. Представим вектор $\vec{w}$ в виде

$$\vec{w} = \tau \biggl(\nabla \Bigl(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \Bigr) + [\mathrm{rot}\ \vec{u} \times \vec{u}] \biggr). \tag{4.6}$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что $\vec{w} = 0$. Таким образом, условие (4.1) для установившихся потенциальных течений жидкости выполняется.

Пусть нестационарное движение жидкости является однородно-винтовым. Это означает, что существует такая постоянная $\lambda \neq 0$, что выполнено соотношение

$$\mathrm{rot}\ \vec{u} = \lambda \vec{u}. \tag{4.7}$$

Пусть пара функций $(\vec{u}, p)$, где

$$p = p_0(t) - \frac{\vec{u}^2}{2}, \tag{4.8}$$

$p_0(t)$ – произвольная функция времени, задает однородно-винтовое решение системы Навье–Стокса. Подстановка (4.7) и (4.8) в (4.6) дает $\vec{w} = 0$. В силу доказанной теоремы $(\vec{u}, p)$ является также однородно-винтовым решением квазигидродинамической системы.

Заключение

Точные решения квазигидродинамической системы, не починяющиеся условию (4.1), существуют. Пример приведен в [7] на с. 107. Расширение класса точных решений КГД системы, не удовлетворяющих уравнениям Навье–Стокса, является актуальной и трудной задачей. Будут ли они поточечно или равномерно стремиться к соответствующему решению системы Навье–Стокса при $\tau \to +0$? Ответов на эти вопросы пока нет.

Предложенная автором квазигидродинамическая система применялась при компьютерных расчетах многих практически важных задач гидродинамики. Ограничимся ссылкой на одну из последних работ [15], где рассмотрена проблема моделирования дискового насоса в пакете OpenFOAM. Эффективные насосы, способные поддерживать кровообращение в сердце человека, широко используются в современной медицине.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[5] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[6] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[7] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[8] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[9] Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

[10] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[11] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[12] Шеретов Ю.В. Точные решения квазигидродинамической системы на основе формулы Био-Савара // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49. https://doi.org/10.26456/vtpmk525

[13] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96.

[14] Сизых Г.Б. Расщепление уравнений Навье–Стокса для одного класса осесимметричных течений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 163–173. https://doi.org/10.14498/vsgtu1740

[15] Stenina T., Elizarova T., Ryazanov D., Ryabinkin E. Implementation of regularized equations for the disk pump simulation problem in OpenFOAM // Proceedings of 2019 Ivannikov ISPRAS Open Conference, ISPRAS. 2019. Pp. 124–130.

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON CLASSES OF EXACT SOLUTIONS OF QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU.
E-mail: *Sheretov.YV@tversu.ru*

Received 10.06.2020, revised 18.06.2020.

The condition for the coincidence of the solutions of Navier–Stokes equations and the quasi–hydrodynamic system is obtained. It is shown that many well-known solutions of the Navier–Stokes system obey this condition. Classes of exact solutions common to the Navier–Stokes equations and the quasi–hydrodynamic system are considered. The application of the principle of superposition to the constructing exact solutions is shown on concrete examples, both in the stationary and non-stationary cases.

Keywords: Navier–Stokes system, quasi–hydrodynamic system, condition for coincidence of solutions, classes exact solutions, principle of superposition.

Citation

Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk592

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[5] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[6] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[7] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[8] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[9] Sheretov Yu.V., "On the exact solutions of stationary quasi–hydrodynamic equations in cylindrical coordinates", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 1, 85–94 (in Russian).

[10] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk169.

[11] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[12] Sheretov Yu.V., "Exact solutions of quasi-hydrodynamic system on the base of Biot-Savart formula", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 38–49 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk525.

[13] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian).

[14] Sizykh G.B., "The splitting of Navier–Stokes equations for a class of axisymmetric flows", *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*, **24**:1 (2020), 163–173 (in Russian), https://doi.org/10.14498/vsgtu1740.

[15] Stenina T., Elizarova T., Ryazanov D., Ryabinkin E., "Implementation of regularized equations for the disk pump simulation problem in OpenFOAM", *Proceedings of 2019 Ivannikov ISPRAS Open Conference*, ISPRAS, 2019, 124–130.