УДК 517.917, 530.1

ОДНОФАЗОВЫЕ И ДВУХФАЗОВЫЕ РЕШЕНИЯ ФОКУСИРУЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА[1]

Куликов А.Н., Куликов Д.А.
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, г. Ярославль

Поступила в редакцию 02.05.2020, после переработки 30.05.2020.

Рассматривается периодическая краевая задача для фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера. Такой вариант уравнения имеет приложения в нелинейной оптике. Показано существование однофазовых решений, имеющих структуру бегущих волн. Для таких решений рассмотрен вопрос об их устойчивости. Найдены еще три иных вида однофазовых решений. Для этих решений получены асимптотические формулы. Показано также, что эти решения порождают три типа уже двухфазовых решений основной краевой задачи для фокусирующего уравнения Шредингера. Для этого использован принцип самоподобия. Некоторые результаты могут быть перенесены на дефокусирующий вариант нелинейного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера, периодическая краевая задача, принцип самоподобия, однофазовые и двухфазовые решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 18–34.
https://doi.org/10.26456/vtpmk593

Введение

В работе рассматривается нелинейное (кубическое) уравнение Шредингера (НУШ). Это уравнение, как правило, записывают в виде [1]

$$i\psi_\tau + b\psi_{zz} + c\psi|\psi|^2 = 0, \tag{0.1}$$

где $\psi = \psi(\tau, z)$ – комплекснозначная функция, $b, c \in \mathbb{R}$ и $bc \neq 0$. Уравнение (0.1) встречается во многих разделах физики [1,2]. Например, оно используется в нелинейной оптике для приближенного описания модулированных пакетов волн.

Обычно, оно дополняется какими-либо краевыми условиями. Если $z \in \mathbb{R}$, то это могут быть некоторые условия, регламентирующие ψ на бесконечности.

В данной работе будет использован иной востребованный вариант краевых условий

$$\psi(\tau, z + 2l) = \psi(\tau, z), l > 0. \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (грант № 18-01-00672).

После перенормировок

$$z = \frac{l}{\pi}y, \;\; \tau = \gamma t(\gamma > 0), \;\; \psi = \delta w,$$

где $\gamma = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{|b|}$, $|c|\delta^2\gamma = 1$, и преобразований получим четыре варианта уравнения

$$w_t = \pm i w_{yy} \pm i w|w|^2. \tag{0.3}$$

Если допустить обращение времени ($t \to -t$), то число вариантов, естественно, сокращается до двух.

Далее будет рассмотрена периодическая краевая задача (КЗ) для того варианта уравнения, которое в нелинейной оптике и других приложениях [1,3–5] принято называть фокусирующим (самофокусирующим) НУШ.

Итак, пусть рассматривается КЗ

$$w_t = i w_{yy} + i w|w|^2, \tag{0.4}$$

$$w(t, y + 2\pi) = w(t, y). \tag{0.5}$$

Для дифференциального уравнения в частных производных (0.4) изучались многие актуальные вопросы. Например, о существовании солитонных решений, бризеров и т.д. [6-10]. В данной работе продолжается исследование вопросов, которые были затронуты в работах [3-5]. Кроме однофазовых решений будут получены и двухфазовые (см. п. 14.9 из [2]). В отличии от многих работ в данной статье основной упор делается не на отыскание «точных» решений, а на использовании асимптотических методов анализа дифференциальных уравнений, теории ветвления нелинейных КЗ, а также на использовании принципа самоподобия [12-13], который позволяет получать из одного «эталонного» решения многопараметрические семейства решений. В частности, из однофазовых решений получать двухфазовые. Напомним, что согласно терминологии и определению из [2] решение называется многофазовым, если $w = f(\Theta_1, \ldots, \Theta_n), \Theta_j = k_j y - \omega_j t, j = 1, \ldots, n$, где $f(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ является 2π периодической по каждому из аргументов. В нашем случае n будет равно 2, а $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ (это обеспечивает периодичность по пространственной переменной y). По переменной t, как правило, получаются квазипериодические функции. Такие решения в фазовом пространстве (пространстве начальных условий) формируют двумерный тор ($n = 2$) или n – мерный тор в общем случае.

В данной работе для сравнения будут рассмотрены некоторые общие вопросы для периодической КЗ

$$w_t = -i w_{yy} + i w|w|^2, \tag{0.6}$$

$$w(t, y + 2\pi) = w(t, y). \tag{0.7}$$

Такой вариант НУШ называют дефокусирующим [1].

Наконец, если дополнить КЗ (0.4), (0.5) и (0.6), (0.7) начальным условием

$$w(0, y) = f(y) = f_1(y) + i f_2(y) \tag{0.8}$$

и считать, что

1. $f_1(y), f_2(y) \in W_2^2[-\pi,\pi]$ (через $W_2^2[-\pi,\pi]$ обозначено пространство Соболева);

2. $f_1(y+2\pi) = f_1(y),\ f_2(y+2\pi) = f_2(y),$

то смешанные задачи (0.4), (0.5), (0.8) и (0.6), (0.7), (0.8) локально корректно разрешимы [11].

В данной работе, как уже отмечалось, рассматривается задача, которая близка к тем вопросам, что были затронуты в работах [3-5] и, следовательно, основное внимание следует уделить варианту НУШ (0.4). В результате использования методов теории возмущений (ветвления решений нелинейных КЗ), а также принципа самоподобия удается дополнить результаты, изложенные в работах [3-5].

1. Постановка задачи. Общие замечания

Итак, в работе будем изучать нелинейное дифференциальное уравнение

$$w_t = i\alpha w_{yy} + iw|w|^2, \tag{1.1}$$

дополненное периодическими краевыми условиями, которые после нормировок можно записать в следующем виде

$$w(t, y + 2\pi) = w(t, y). \tag{1.2}$$

Здесь $w = w(t,y) = w_1(t,y) + iw_2(t,y)$ – комплекснозначная функция действительных переменных $t, y, \alpha = \pm 1$. При $\alpha = 1$ получаем тот вариант уравнения, который принято называть фокусирующим (самофокусирующим) нелинейным уравнением Шредингера (ФНУШ), а при $\alpha = -1$ – дефокусирующим нелинейным уравнением Шредингера (ДНУШ). В работе будет рассматриваться случай, когда $\alpha = 1$, т.е. самофокусирующее НУШ, но некоторые фрагменты содержат замечания, относящиеся к случаю $\alpha = -1$.

Сразу отметим, что замена

$$w(t,y) = \exp(i\omega_m t)\exp(imy)u(t, y + \beta_m t), \tag{1.3}$$

где $\omega_m = -\alpha m^2, \beta_m = -2\alpha m, m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ переводит КЗ (1.1), (1.2) в КЗ того же вида, если $x = y + \beta_m t$, т.е. для $u(t,x)$ получаем КЗ

$$u_t = i\alpha u_{xx} + i|u|^2 u, \tag{1.4}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{1.5}$$

Последняя особенность периодической КЗ для НУШ носит название принципа самоподобия [12,13]. Подчеркнем, что с практической точки зрения это означает, что любое решение $u(t,x)$ может быть размножено до счетного набора решений КЗ (1.1), (1.2) (т.е. той же задачи с точностью до обозначений)

$$w_m(t,y) = \exp(-i\alpha m^2 t)\exp(imy)u(t, y - 2\alpha m t), \tag{1.6}$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Поэтому далее можно сосредоточиться на изучении какого-либо одного решения (или решений одного типа КЗ (1.4), (1.5)).

Например, на решениях вида

$$u_0(t) = \eta \exp(i\sigma t),\ \sigma = |\eta|^2, \tag{1.7}$$

которые являются пространственно однородными периодическими решениями по переменной t. Им можно поставить в соответствие счетный набор решений вида

$$w_m(t, y, \eta) = \eta \exp(i\Theta_m(t, y)), \tag{1.8}$$

где $\Theta_m(t, y) = (\sigma - \alpha m^2)t + my$, т.е. решений типа бегущих волн или, в иной терминологии, решений, которые называют в нелинейной оптике однофазовыми решениями.

Семейство решений (1.8) и, в том числе, (1.7) КЗ (1.4), (1.5) формирует двумерное инвариантное многообразие $V_2(\eta), \eta = \eta_1 + i\eta_2$. Далее речь пойдет о решениях, отличных от решений, входящих в $V_2(\eta)$.

Положим в КЗ (1.4), (1.5)

$$u(t, x) = \eta[1 + v(t, x)] \exp(i\sigma t), \tag{1.9}$$

где $\eta \in \mathbb{C}, \sigma \in \mathbb{R}$. Тогда для вспомогательной комплекснозначной функции $v(t, x)$ получим КЗ

$$v_t = i[\alpha v_{xx} + \sigma(v + \overline{v})] + i\sigma[2v\overline{v} + v^2 + v^2\overline{v}], \tag{1.10}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \tag{1.11}$$

которая зависит от одного действительного параметра $\sigma = |\eta|^2 > 0$. Подчеркнем, что здесь рассматриваются возмущения решения $u_0(t) = \eta \exp(i\sigma t)$ в более удобной для дальнейшего анализа форме. Если положим $u(t, x) = u_0(t) + z(t, x)$, то можно представить $z(t, x) = \eta \exp(i\sigma t)v(t, x)$. Вариант замены (1.9) позволяет получать уравнение для $v(t, x)$, коэффициенты которого не зависят от независимых переменных. Добавим, что последнюю КЗ не удается рассматривать в подпространстве функций с нулевым средним, так как КЗ (1.10),(1.11) не является инвариантной для функции $v(t, x)$, у которых $\int\limits_{-\pi}^{\pi} v dx = 0$.

2. Об устойчивости однофазовых решений

Вопрос об устойчивости решения $u_0(t) = \eta \exp(i\sigma t)$, а значит и всех решений счетного семейства решений (1.3). КЗ (1.1), (1.2) в предыдущем разделе был сведен к анализу устойчивости нулевого решения вспомогательной КЗ (1.10),(1.11). Для этого, как это принято, сначала следует рассматривать вопрос об устойчивости нулевого решения в линейном приближении и, следовательно, рассмотреть линеаризованный вариант КЗ (1.10), (1.11)

$$v_t = i[\alpha v_{xx} + \sigma(v + \overline{v})], \tag{2.1}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x). \tag{2.2}$$

Положим $v(t,x) = v_1(t,x) + iv_2(t,x)$ $(v_1(t,x) = Re\, v(t,x),\ v_2(t,x) = Im\, v(t,x))$, а также $Y(t,x) = colon(v_1(t,x), v_2(t,x))$. В действительной форме записи линейная КЗ (2.1), (2.2) перепишется следующим образом

$$\dot{Y} = AY, \tag{2.3}$$

$$Y(t, x + 2\pi) = Y(t,x). \tag{2.4}$$

Здесь через A обозначен линейный дифференциальный оператор (ЛДО), определенный на достаточно гладких вектор-функциях $a(x) = colon(a_1(x), a_2(x))$ следующим образом

$$Aa(x) = \begin{pmatrix} -\alpha a_2'' \\ \alpha a_1'' + 2\sigma a_1 \end{pmatrix}.$$

Собственные функции ЛДО A в нашем случае можно и целесообразно искать в виде

$$a(x) = h_n \exp(inx),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где $h_n = colon(h_{n1}, h_{n_2})$ – постоянный вектор, координаты которого действительные или комплексные числа. В свою очередь, h_n и собственные числа λ_n, соответствующие h_n следует искать как собственные элементы и собственные числа счетного семейства матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha n^2 \\ -\alpha n^2 + 2\sigma & 0 \end{pmatrix},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Следовательно, собственные числа λ_n являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda_n^2 + \alpha n^2(\alpha n^2 - 2\sigma) = 0, \tag{2.5}$$

и, естественно, весь спектр ЛДО A это совокупность всех λ_n.

При анализе семейства уравнений (2.5) следует различать 2 случая $\alpha = 1$ (самофокусирующее НУШ) и $\alpha = -1$ (дефокусирующее НУШ).

Пусть сначала $\alpha = 1$. Тогда справедлива серия элементарно проверяемых утверждений.

1) При $n = 0$ характеристическое уравнение (2.5) имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечает собственный и присоединенный элементы. В частности, решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = A_0 Y,\ A_0 = A_0(\sigma)$$

неустойчивы при любом $\sigma \neq 0$.

2) Если параметр $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$, то все остальные собственные значения ЛДО A (семейства матриц A_n) будут чисто мнимыми

$$\lambda_n = i\sigma_n, \text{ где } n = \pm 1, \pm 2, \ldots,\ \sigma_n = \sqrt{n^2(n^2 - 2\sigma)}.$$

3) При $\sigma = \sigma_k = \dfrac{k^2}{2}$ в спектре ЛДО A появляется нулевое собственное число кратности 4, которому соответствует три собственных элемента и один присоединенный.

4) При $\sigma > 1/2$ среди собственных чисел есть действительные собственные значения разных знаков (например, $\lambda_{\pm 1} = \pm\sqrt{2\sigma - 1}$).

5) При любом σ среди собственных значений λ_k спектра устойчивости есть счетный набор чисто мнимых собственных значений ($k^2(k^2 - 2\sigma) > 0$, если k достаточно велико).

Возвратимся теперь к анализу нелинейной КЗ (1.4) и (1.5), а также вспомогательной нелинейной КЗ (1.10), (1.11).

Лемма 1. *Пусть $\alpha = 1$ и $\sigma > 1/2$, тогда нулевое решение вспомогательной КЗ (1.4),(1.2) неустойчиво.*

Справедливость этой леммы вытекает из теоремы об устойчивости (неустойчивости) по линейному приближению.

Из последнего утверждения вытекает, что при $\alpha = 1$ справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\sigma > 1/2$. Тогда все одномодовые решения*

$$u = \eta \exp(i\sigma t) \ (\sigma = |\eta|^2 > 1/2)$$

будут неустойчивыми в смысле определения А.М. Ляпунова.

Более того будет неустойчивым и инвариантное многообразие $V_1(\sigma)$ порождаемое решениями вида $\eta \exp(i\sigma t)$, где $|\eta|^2 = \sigma$ фиксированная величина, т.е. цикл порождаемый такими одномодовыми периодическими решениями не будет орбитально устойчивым).

Пусть $\alpha = -1$, т.е. рассматривается вариант дефокусирующего НУШ. При таком выборе α характеристическое уравнение (2.5) имеет при $k \neq 0$ счетный набор чисто мнимых корней. При анализе вопроса об устойчивости периодических решений $u_0(t) = \eta \exp(i\sigma t)$ в нелинейном случае при $\alpha = -1$ реализуется критический случай, когда спектр устойчивости находится на мнимой оси комплексной плоскости и, следовательно, применение теоремы об устойчивости по линейному приближению невозможно.

3. Однофазовые решения

В предыдущих разделах у КЗ (1.1),(1.2) были найдены однофазовые, одномодовые решения КЗ вида

$$u_n(t, y) = \eta \exp(i\sigma_n t + iny), \ \sigma_n = |\eta|^2 - \alpha n^2. \tag{3.1}$$

В этом разделе будем искать однофазовые решения КЗ более сложной структуры по сравнению с решениями (3.1). Для этого сначала обратимся к вспомогательной КЗ (1.4), (1.5). У нее основной интерес представляют решения вида $u_0(t) = \exp(i\sigma_0 t), \sigma_0 = |\eta|^2$, которые в силу «принципа самоподобия» позволяют получать решения вида (3.1).

Будем искать решения, которые можно интерпретировать как «модуляцию» решений $u_0(t)$ и получать уже решения, зависящие и от x (от y впоследствии).

Пусть $\alpha = 1$. Положим в КЗ (1.4), (1.5)

$$u(t, x) = \eta \exp(i\sigma(1 + \mu)t)[1 + v(t, x)], \ \sigma = |\eta|^2.$$

В результате такой замены получим КЗ для комплекснозначной функции $v(t,x)$ следующего вида

$$v_t + i\sigma\mu(1+v) = iv_{xx} + i\sigma(v+\overline{v}) + i\sigma[2v\overline{v} + v^2 + v^2\overline{v}], \tag{3.2}$$

$$v(t, x+2\pi) = v(t,x), \tag{3.3}$$

которая похожа, но не совпадает с КЗ (1.10), (1.11).

В силу специфики КЗ (3.2), (3.3) подпространство ее решений, для которых

$$v(t,-x) = v(t,x), \tag{3.4}$$

т.е. четных по x решений, инвариантно. Следовательно, допустимо рассмотреть КЗ (3.2), (3.3), (3.4). При этом отметим, что любое решение $v(t,x)$ КЗ (3.2), (3.3), (3.4), естественно, удовлетворяет КЗ (3.2), (3.3). Более того функция $v(t,x+h)$, где $h \in \mathbb{R}$, также будет решением КЗ (3.2), (3.3), если $v(t,x)$ было решением КЗ (3.2), (3.3), (3.4).

В свою очередь, КЗ (3.2), (3.3), (3.4) может быть заменена на КЗ

$$v_t + i\sigma\mu[1+v] = iv_{xx} + i\sigma(v+\overline{v}) + i\sigma[2v\overline{v} + v^2 + v^2\overline{v}], \tag{3.5}$$

$$v_x(t,0) = v_x(t,\pi) = 0. \tag{3.6}$$

Действительно, любое решение КЗ (3.5), (3.6) может быть представлено в виде

$$v(t,x) = \frac{v_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos nx$$

и, следовательно, будет 2π периодической четной функцией x.

Далее будем искать пространственно неоднородные состояния равновесия КЗ (3.5), (3.6). Для этого положим $v(t,x) = b(x)$, где $b(x)$ – действительная функция x. В результате для функции одной переменной $w(x)$ получаем КЗ

$$b'' + \sigma[2b + 3b^2 + b^3 - \mu(1+b)] = 0, \tag{3.7}$$

$$b'(0) = b'(\pi) = 0. \tag{3.8}$$

КЗ (3.7), (3.8) имеет пространственно однородные решения $b(x) = a$, где подходящие постоянные a находим как корни уравнения

$$a^3 + 3a^2 + 2a - \mu(1+a) = 0. \tag{3.9}$$

Данное кубическое уравнение имеет три действительных корня, если $\mu > -1$. При $\mu \leqslant -1$ у него есть только один действительный корень $a = -1$.

Пусть $\mu > -1$. Тогда уравнение (3.9) имеет корни

$$a_1 = -1 + \sqrt{1+\mu},\ a_2 = -1 - \sqrt{1+\mu},\ a_3 = -1.$$

В КЗ (3.7), (3.8) положим

$$b(x) = q(x) + a_1 \text{ или } b(x) = q(x) + a_2.$$

При первом варианте замены для $q = q(x)$ получаем КЗ

$$q'' + 2\sigma(1+\mu)q + 3\sigma\sqrt{1+\mu}q^2 + \sigma q^3 = 0, \tag{3.10}$$

$$q'(0) = q'(\pi) = 0. \tag{3.11}$$

При втором варианте замены получаем КЗ

$$q'' + 2\sigma(1+\mu)q - 3\sigma\sqrt{1+\mu}q^2 + \sigma q^3 = 0, \tag{3.12}$$

$$q'(0) = q'(\pi) = 0. \tag{3.13}$$

Элементарно проверяется, что замена q на $-q$ ($q \to -q$) переводит КЗ (3.12), (3.13) в КЗ (3.10), (3.11) или наоборот КЗ (3.10), (3.11) в КЗ (3.12), (3.13). Следовательно, достаточно найти нетривиальные решения, зависящие от x для одной из них. Например, для КЗ (3.12), (3.13).

В КЗ (3.12), (3.13) положим

$$2\sigma(1+\mu) = k^2(1+\xi),\ q(x) = p(x)\sqrt{1+\mu}, \tag{3.14}$$

где действительный параметр ξ выберем позднее, в процессе анализа новой КЗ для $p(x)$

$$p'' + k^2 p = k^2\left[\frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p^3 - \xi p + \frac{3}{2}\xi p^2 - \frac{\xi}{2}p^3\right], \tag{3.15}$$

$$p'(0) = p'(\pi) = 0. \tag{3.16}$$

Будем искать нетривиальные решения КЗ (3.15), (3.16) в следующем виде

$$p(x) = p(x,\varepsilon) = \varepsilon p_1(x) + \varepsilon^2 p_2(x) + \varepsilon^3 p_3(x) + o(\varepsilon^3), \tag{3.17}$$

где $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$, т.е. ε – малый параметр. При этом будем считать, что $p_2(x), p_3(x), \ldots$ – достаточно гладкие функции, для которых выполнены два следующих условия

$$1)\, p_j'(0) = p_j'(\pi) = 0;\ 2) M_k(p_j) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi p_j(x)\cos kx dx = 0, j = 2,3,\ldots, k = 1,2,\ldots$$

Нормированное отклонение ξ будем искать как достаточно гладкую функцию параметра ε

$$\xi(\varepsilon) = \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Наконец, положим $p_1(x) = \cos kx$ и подставим суммы (3.17), (3.18) в нелинейную КЗ (3.15), (3.16). Выделяя слагаемые при $\varepsilon^2, \varepsilon^3$, получаем, что для $p_2(x), p_3(x)$ формируются неоднородные КЗ

$$p_2'' + k^2 p_2 = -\xi_1 k^2\cos kx + \frac{3}{2}k^2\cos^2 kx, \tag{3.19}$$

$$p_2'(0) = p_2'(\pi) = 0,\ M_k(p_2) = 0, \tag{3.20}$$

$$p_3'' + k^2 p_3 = -\xi_1 k^2 p_2 - \xi_2 k^2 p_1 + 3k^2 p_1 p_2 - \frac{k^2}{2}p_1^3 + \frac{3}{2}\xi_1 k^2 p_1^2, \tag{3.21}$$

$$p_3'(0) = p_3'(\pi) = 0,\ M_k(p_3) = 0. \tag{3.22}$$

Замечание (условие разрешимости). Напомним хорошо известный факт. Если рассмотреть неоднородную КЗ

$$p'' + k^2 p = \varphi(x), \tag{3.23}$$

$$p'(0) = p'(\pi) = 0,\ M_k(p) = 0, \tag{3.24}$$

где $\varphi(x)$ – достаточно гладкая функция, для которой $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$, то для разрешимости КЗ (3.23), (3.24) должно быть выполнено равенство

$$M_k(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(x)\cos kx dx = 0,$$

т.е. коэффициент Фурье φ_k в разложении функции $\varphi(x)$ в ряд по системе функций $1, \cos x, \cos 2x$ должен быть нулевым. Добавим, что равенство $M_k(p) = 0$ обеспечивает единственность решения КЗ (3.23), (3.24).

Из данного замечания вытекает, что требовать выполнение равенств

$$M_k(p_2) = M_k(p_3) = 0$$

естественно и целесообразно. Поэтому данные равенства включены в постановку задач для нахождения $p_2(x), p_3(x)$.

Из условий разрешимости КЗ (3.19), (3.20) вытекает, что с необходимостью $\xi_1 = 0$, а подходящее ее решение

$$p_2(x) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x\right).$$

Анализ неоднородной КЗ (3.21), (3.22) с учетом равенства $\xi_1 = 0$ позволяет найти $\xi_2 = \dfrac{3}{2}$, а также $p_3(x) = \dfrac{1}{16}\cos 3kx$.

Из данных построений и теории возмущений [13-15] (см., например, гл. 7 из [14]) вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, что при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ КЗ (3.12), (3.13) при $2\sigma(1+\mu) = k^2(1+\xi)$ имеет нетривиальное решение вида*

$$q = q_{k,2}(x,\varepsilon) = \sqrt{\frac{k^2(1+\xi_k(\varepsilon))}{2\sigma}}p_{k,2}(x,\varepsilon), \tag{3.25}$$

где для $\xi_k(\varepsilon)$ и $p_{k,2}(x,\varepsilon)$ справедливы асимптотические формулы

$$\begin{gathered} \xi = \xi_{k,2}(\varepsilon) = (\frac{3}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))k^2, \\ p(x) = p_{k,2}(x) = \varepsilon\cos kx + \varepsilon^2\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2kx\right] + \varepsilon^3\frac{1}{16}\cos 3kx + o(\varepsilon^3). \end{gathered} \tag{3.26}$$

В теореме 2 для соответствующих решений использован индекс «2», так как здесь получены решения для КЗ (3.12), (3.13). Для решений первой из таких КЗ (т.е. КЗ (3.10), (3.11)) будем использовать индекс «1».

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, что при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ КЗ (3.10), (3.11) при $2\sigma(1+\mu) = k^2(1+\xi)$ имеет нетривиальное решение вида*

$$q = q_{k,1}(x, \varepsilon) = \sqrt{\frac{k^2(1+\xi_{k,1}(\varepsilon))}{2\sigma}} p_{k,1}(x, \varepsilon), \tag{3.27}$$

где для $\xi_{k,1}(\varepsilon), p_{k,1}(x, \varepsilon)$ справедливы асимптотические формулы

$$\begin{gathered} \xi = \xi_{k,1}(\varepsilon) = \left(\frac{3}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right) k^2, \\ p(x) = p_{k,1} = \varepsilon \cos kx - \varepsilon^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2kx\right) + \varepsilon^3 \frac{1}{16} \cos 3kx + o(\varepsilon^3). \end{gathered} \tag{3.28}$$

Как следует из замечания о связи КЗ (3.10), (3.11) и (3.12), (3.13) формулы (3.27), (3.28) получаем из формул (3.25), (3.26) после замены $q \to -q$, а также $\varepsilon \to -\varepsilon$.

Возвратимся к анализу нелинейной КЗ для $b(x)$, т.е. КЗ (3.7), (3.8). Мы уже использовали две замены

$$b(x) = q(x) + a_j, j = 1, 2,$$

где a_1, a_2 корни кубического уравнения (3.9). Замена $b(x) = q(x) + a_3$, где $a_3 = -1$, т.е. третий корень уравнения (3.9), приведет обратно к задаче о состояниях равновесия КЗ (1.4), (1.5) и поэтому такой вариант замены рассматривать не имеет смысла.

Возвратимся к КЗ (1.4), (1.5) и найдем ее однофазовые решения, которые могут быть представлены в виде

$$u(t, x) = \exp(-i\omega^2 t) Q(x), \tag{3.29}$$

где действительную функцию $Q(x)$ можно искать как решение КЗ

$$Q'' + \omega^2 Q + Q^3 = 0, \tag{3.30}$$

$$Q'(0) = Q'(\pi) = 0. \tag{3.31}$$

Если теперь положить

$$\omega^2 = k^2 + \xi,$$

а решение искать в виде

$$Q = Q_k(x) = \varepsilon \cos kx + \varepsilon^3 Q_{k,3}(x),\ \xi = \xi_1 \varepsilon + \xi_2 \varepsilon^2 + \xi_3 \varepsilon^3 + \ldots,$$

то повторяя построения при анализе предыдущих КЗ, для определения $q(x)$, нетрудно получить, что

$$1)\ \xi_1 = 0, \xi_2 = -\frac{3}{4};\ 2)\ Q_{k,3}(x) = \frac{1}{32k^2},$$

т.е. при достаточно малых ε и при соответствующем выборе ω^2 получаем следующую последовательность возможных вариантов для выбора

$$Q(x) = Q_k(x, \varepsilon) = \varepsilon \cos kx + \varepsilon^3 \frac{1}{32k^2} \cos 3kx + o(\varepsilon^3), \tag{3.32}$$

если $\omega^2 = \omega_k^2 = k^2 + \xi_k(\varepsilon)$, $\xi_k(\varepsilon) = -\dfrac{3}{4}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), k = 1, 2, 3, \ldots$ Отметим, что $\xi_k(\varepsilon)$ имеет «главную часть», которая не зависит от k.

4. Двухфазовые решения

Из построений предыдущего раздела следует, что КЗ (1.4), (1.5) при $\alpha = 1$ имеет три класса одночастотных решений, соответствующих пространственно неоднородным решениям КЗ для определения $w(x)$.

Первые два класса периодических решений восстанавливаются с помощью следующих формул

$$u_{k,j}(t, x) = \eta \exp(i(1 + \mu)\sigma t)[1 + b_{k,j}(x, \varepsilon)],\ b_{k,j} = a_j + p_{k,j}\sqrt{1 + \mu}, \tag{4.1}$$

где $\sigma = |\eta|^2, j = 1, 2$. Наконец,

$$a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \mu},\ \mu = \mu(k, j),\ \mu(k, j) = k^2 \frac{1 + \xi_{k,j}(\varepsilon)}{2\sigma} - 1, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Функции $p_{k,j}(x, \varepsilon)$ были найдены в предыдущем разделе, где для них были предложены асимптотические формулы (см. теоремы 2,3).

Решения из первых двух семейств можно записать в другой форме. Так, решения из первого семейства ($j = 1$) могут быть записаны следующим образом

$$u_{k,1}(t, x, \varepsilon) = \exp(i\sigma_{k,1}(\varepsilon)t)Q_{k,1}(x, \varepsilon), \tag{4.2}$$

где $\sigma_{k,1}(\varepsilon) = \dfrac{k^2(1 + \xi_{k,1}(\varepsilon))}{2}$, а $Q_{k,1} = k\sqrt{\dfrac{1 + \xi_{k,1}(\varepsilon)}{2}}(1 + p_{k,1}(x, \varepsilon))$.

Асимптотические формулы для $p_{k,1}(x, \varepsilon)$ указаны в формулировке теоремы 3.

Для второго класса периодических по t решений получаем формулу

$$u_{k,2}(t, x, \varepsilon) = \exp(i\sigma_{k,2}(\varepsilon)t)Q_{k,2}, \tag{4.3}$$

где $\sigma_{k,2}(\varepsilon) = \dfrac{k^2}{2}(1 + \xi_{k,2}(\varepsilon)), Q_{k,2}(x, \varepsilon) = k\sqrt{\dfrac{1 + \xi_{k,2}(\varepsilon)}{2}}(-1 + p_{k,2}(x, \varepsilon))$.

При формировании равенств (4.2), (4.3) было учтено, что $\eta = \sqrt{\sigma}\exp(i\varphi), \varphi \in \mathbb{R}$. Замена $t \to t + \kappa$ позволяет убрать множитель $\exp(i\varphi)$ за счет выбора соответствующей величины κ.

Добавим, что КЗ (1.4), (1.5) имеет однофазовые решения третьего типа

$$u_{k,3}(t, x) = \exp(i\omega_k t)Q_{k,3}(x, \varepsilon), \tag{4.4}$$

где $\omega_k^2 = -(k^2 + \xi_{k,3}(\varepsilon)), \xi_{k,3}(\varepsilon) = -\dfrac{3}{4}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, а

$$Q_{k,3}(x, \varepsilon) = Q_k(x, \varepsilon) = \varepsilon \cos kx + \frac{1}{32k^2}\varepsilon^3 \cos 3kx + o(\varepsilon^3).$$

Подчеркнем также, что КЗ (1.4), (1.5) при $\alpha = 1$ наряду с тремя семействами (4.2), (4.3), (4.4) $u_{k,l}(t, x, \varepsilon)$ имеет решения вида $u_{k,l}(t, x + h_{k,l}(\varepsilon), \varepsilon)$, где $h_{k,l}(\varepsilon)$ постоянные, которые можно выбирать независимо при каждом $l = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$ и ε. Окончательный результат относится к КЗ (1.1), (1.2).

Теорема 4. *КЗ (1.1), (1.2) имеет двухфазные решения следующих трех видов.*

В первый входят те решения, для которых справедливы равенства

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \exp(i\Theta_1(t,y))Q_{k,1}(\Theta_2(t,y),\varepsilon), \tag{4.5}$$

где $\Theta_1(t,y) = (\sigma_{k,1}(\varepsilon) - m^2)t + my$, $\Theta_2(t,y) = y - 2mt, k = 1,2,\ldots, m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Во второй класс двухфазовых решений входят те решения КЗ (1.1), (1.2), для которых справедливы представления

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \exp(i\Theta_1(t,y))Q_{k,2}(\Theta_2(t,y),\varepsilon), \tag{4.6}$$

где в этом случае

$$\Theta_1(t,y) = (\sigma_{k,2}(\varepsilon) - m^2)t + my,\ \Theta_2(t,y) = y - 2mt, k = 1,2,\ldots, m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Наконец,

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \exp(i\Theta_1(t,y))Q_{k,3}(\Theta_2(t,y),\varepsilon), \tag{4.7}$$

где $\Theta_1(t,y) = (\omega_k^2 - m^2)t + my, Q_2(t,y) = y - 2mt$.

Напомним, что решения $(Q_{k,j}(x),\varepsilon)$ были найдены ранее и в них следует заменить x на $\Theta_2(t,y) = y - 2mt$. Наконец, $\sigma_{k,j}(\varepsilon)$ были найдены в предыдущем разделе.

Формулы (4.5), (4.6), (4.7) можно «упростить» если ограничиться в правой их части членами, которые содержат существенные члены в разложении по степеням ε. При таком приближении во всех формулах $\sigma_{k,j}(\varepsilon) = k^2/2$, если $j = 1,2$, а $\sigma_{k,3}(\varepsilon) = -k^2$.

Наконец,

$$Q_{k,1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}k(1 + \varepsilon\cos kx), Q_{k,2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}k(-1 + \varepsilon\cos kx), Q_{k,3}(x) = \varepsilon\cos kx.$$

Поэтому формулы (4.5), (4.6), (4.7) приобретают следующий вид

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \frac{\sqrt{2}}{2}k\exp(i(k^2/2 - m^2)t + imy)[1 + \varepsilon\cos k(y - mt)], \tag{4.8}$$

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \frac{\sqrt{2}}{2}k\exp(i(k^2/2 - m^2)t + imy)[-1 + \varepsilon\cos k(y - mt)], \tag{4.9}$$

$$w(t,y,k,m) = \varepsilon\exp(i(-m^2 - k^2)t + imy)\cos k(y - mt). \tag{4.10}$$

Формула (4.8) соответствует формуле (4.5). Формула (4.9) – (4.6). Наконец, формула (4.10) упрощенный и приближенный вариант формулы (4.7).

Все три вида двухфазовых решений зависят от трех параметров m, k и ε. Во всех случаях пропущено $m = 0$, так как в этом случае получаем не двухфазное решение, а однофазовое решение, у которого «амплитуда» зависит от пространственной переменной y (или x).

Термин двухфазовое решение заимствован из работ по физике. С математической точки зрения можно говорить о квазипериодическом решение по t. В пространстве начальных условий каждое из трех типов решений при фиксированном ε, m, k формирует инвариантный тор.

Заключение

Для ДНУШ ($\alpha = -1$) предыдущие построения удается повторить лишь частично. КЗ (1.4), (1.5) при $\alpha = -1$, конечно, имеет решения вида

$$u(t,x) = \exp(i\omega^2 t)R(x),$$

где $R(x)$ действительная функция. Для нее получаем нелинейную КЗ

$$\begin{aligned} R'' + \omega^2 R = R^3, \\ R'(0) = R'(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

если повторим соответствующие построения третьего раздела. Если положить $\omega^2 = k^2 + \xi(\varepsilon)$, где $\xi(\varepsilon)$, как и ранее, гладко зависят от ε, то при каждом таком ω^2, если $\xi(\varepsilon) = \dfrac{3\varepsilon^2}{4} + o(\varepsilon^2)$ существует нетривиальное решение

$$R(x) = \varepsilon \cos kx - \frac{\varepsilon^3}{32k^2}\cos 3kx + \ldots$$

В результате получаем решения КЗ (5.1), которые аналогичны решениям третьего типа для фокусирующего уравнения. Следовательно, КЗ (1.1), (1.2) при $\alpha = -1$ имеет счетный набор двухфазовых решений

$$w(t,y,\varepsilon,k,m) = \exp(i\Theta_1(t,y))R(\Theta_2(t,y)),$$

где в данном случае $k = 1,2,\ldots, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$$\Theta_1(t,y) = (k^2 + \xi(\varepsilon) + m^2)t + my,\ \Theta_2 = y + 2mt.$$

Итак, для НУШ и, в первую очередь, для ФНУШ получены счетные наборы решений, которые называют двухфазовые. Одним из основных моментов их построения связан с принципом самоподобия, который позволяет «тиражировать» достаточно «простые» по структуре решения в двухфазовые. Отметим, что термин двухфазовые решения в основном используется в физике. Иной термин для их названия – обобщенные бегущие волны.

Список литературы

[1] Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007.

[2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[3] Гриневич П.Г., Сантини П.М. Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для аномальных волн в нелинейном уравнении Шрёдингера при наличии нескольких неустойчивых мод // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 2 (446). С. 27–80. https://doi.org/10.4213/rm9863

[4] Grinevich P.G., Santini P.M. Numerical Instability of the Akhmediev Breather and Finite-Gap Model of It // Springer Proceeding in Mathematics and Statistics. 2016. Vol. 273. Pp. 3–23.

[5] Coppini F., Grinevich P.G., Santini P.M. Effect of a Small Loss Or Gain in the Periodic Nonlinear Schrodinger Anomalous Wave Dynamics // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2020. Vol. 101, № 3. ID 032204.

[6] Smirnov A.O. Periodic two-phase "rogue waves"// Mathematical Notes. 2013. Vol. 94, № 5-6. Pp. 897–907.

[7] Akhmediev N.N., Korneev V.I. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation // Theoretical and Mathematical Physics. 1986. Vol. 69, № 2. Pp. 1089–1093.

[8] Kuznetsov E.A. Solutions in parametrically unstable plasma // Soviet Physics. Doklady. 1977. Vol. 22. Pp. 507–508.

[9] Zakharov V., Ostrovsky L. Modulation instability: the beginning // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2009. Vol. 238, № 5. Pp. 540–548.

[10] Sulem C., Sulem P.-L. The Nonlinear Schrodinger Equation (Self Focusing and Wave Collapse). Berlin: Springer, 1999.

[11] Segal I. Nonlinear semigroups // Annals of Mathematics. 1963. Vol. 78, № 2. Pp. 339–364.

[12] Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации плоских волн обобщенного кубического Шредингера // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 16, № 9. С. 1290–1299.

[13] Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Доклады Академии наук. 2006. Т. 406, № 1. С. 21–29.

[14] Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

[15] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1989.

[16] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.

Образец цитирования

Куликов А.Н., Куликов Д.А. Однофазовые и двухфазовые решения фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 18–34. https://doi.org/10.26456/vtpmk593

Сведения об авторах

1. **Куликов Анатолий Николаевич**
профессор кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, ЯрГУ им. П.Г. Демидова. E-mail: anat_kulikov@mail.ru

2. **Куликов Дмитрий Анатольевич**
доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, ЯрГУ им. П.Г. Демидова.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

ONE-PHASE AND TWO-PHASE SOLUTIONS OF THE FOCUSING NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

Kulikov Anatolii Nikolaevich
Professor of Differential Equation department, Demidov Yaroslavl State University
Russia, 150003, Yaroslavl, 14 Sovetskaya str.
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Kulikov Dmitrii Anatolievich
Docent of Differential Equation department, Demidov Yaroslavl State University
Russia, 150003, Yaroslavl, 14 Sovetskaya str.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Received 02.05.2020, revised 30.05.2020.

A periodic boundary value problem for the focusing nonlinear Schrodinger equation is considered. This version of the equation has applications in nonlinear optics. The existence of single-phase solutions with the structure of traveling waves is shown. For such solutions, the question of their stability is considered. Three other types of single-phase solutions are found. Asymptotic formulas are obtained for these solutions. It is also shown that these solutions generate three types of already two-phase solutions of the main boundary value problem for the focusing Schrodinger equation. For this, the principle of self-similarity is used. Some results can be applied to the defocusing version of the nonlinear Schrodinger equation.

Keywords: focusing nonlinear Schrodinger equation, periodic value boundary problem, principle of self-similarity, one-phase, two-phase solutions.

Citation

Kulikov A.N., Kulikov D.A., "One-phase and two-phase solutions of the focusing nonlinear Schrodinger equation", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 18–34 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk593

References

[1] Skott E., *Nelinejnaya nauka: rozhdenie i razvitie kogerentnykh struktur [Nonlinear science: birth and development of coherent structures]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (in Russian).

[2] Whitham G.B., *Linear and nonlinear waves*, A Willey-Interscience Publication, New-York, London, Sydney, Toronto, 1974, 636 pp.

[3] Grinevicha P.G., Santinibc P.M., "The finite-gap method and the periodic NLS Cauchy problem of anomalous waves for a finite number of unstable modes", *Russian Mathematical Surveys*, **72**:2 (2019), 211–263, https://doi.org/10.4213/rm9863.

[4] Grinevich P.G., Santini P.M., "Numerical Instability of the Akhmediev Breather and Finite-Gap Model of It", *Springer Proceeding in Mathematics and Statistics*, **273** (2016), 3–23.

[5] Coppini F., Grinevich P.G., Santini P.M., "Effect of a Small Loss Or Gain in the Periodic Nonlinear Schrodinger Anomalous Wave Dynamics", *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **101**:3 (2020), 032204.

[6] Smirnov A.O., "Periodic two-phase "rogue waves"", *Mathematical Notes*, **94**:5-6 (2013), 897–907.

[7] Akhmediev N.N., Korneev V.I., "Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation", *Theoretical and Mathematical Physics*, **69**:2 (1986), 1089–1093.

[8] Kuznetsov E.A., "Solutions in parametrically unstable plasma", *Soviet Physics. Doklady*, **22** (1977), 507–508.

[9] Zakharov V., Ostrovsky L., "Modulation instability: the beginning", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **238**:5 (2009), 540–548.

[10] Sulem C., Sulem P.-L., *The Nonlinear Schrodinger Equation (Self Focusing and Wave Collapse)*, Springer, Berlin, 1999.

[11] Segal I., "Nonlinear semigroups", *Annals of Mathematics*, **78**:2 (1963), 339–364.

[12] Kulikov A.N., Kulikov D.A., "Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger equation", *Differential Equations*, **46**:9 (2010), 1299–1308.

[13] Kolesov A.Yu., Kulikov A.N., Rozov N.Kh., "Cylindrical traveling waves for the generalized cubical Schrodinger equation", *Doklady Mathematics*, **73**:1 (2006), 125–128.

[14] Najfe A., *Metody vozmushchenij [Perturbation methods]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (in Russian).

[15] Najfe A., *Vvedenie v metody vozmushchenij [Introduction to perturbation methods]*, Mir Publ., Moscow, 1989 (in Russian).

[16] Malkin I.G., *Nekotorye zadachi teorii nelinejnykh kolebanij [Some problems of the theory of nonlinear oscillations]*, GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).