ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕЗЕРВА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
Институт проблем информатики Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 20.05.2020, после переработки 30.05.2020.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение резерва страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы случайно. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов. Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, а во втором рассматривается трёхточечное симметричное распределение.

Ключевые слова: резерв страховой компании, необходимое число клиентов (асимптотический дефект), функция распределения, выборка случайного объёма, асимптотическое разложение, трёхточечное симметричное распределение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48.
https://doi.org/10.26456/vtpmk594

1. Введение

Рассмотрим простейшую модель страхования, в которой в течение разных отчётных периодов одинаковой длины (скажем, месяцев или лет) происходит разное число страховых событий (страховых выплат или заключений страховых контрактов). Подобного рода ситуации возникают, например, в медицине, когда число пациентов с тем или иным заболеванием варьируется от года к году, в технике, когда при испытании на надежность (скажем, при определении наработки на отказ) разных партий приборов, число отказавших приборов в разных партиях будет разным и заранее неопределённым. В таких ситуациях число клиентов, доступных страховой компании, которое заранее не известно, разумно считать случайной величиной. В силу указанных обстоятельств вполне естественным становится изучение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-07-02652), исследования проводились в рамках программы Математического Центра Фундаментальной и Прикладной Математики (МГУ).

асимптотического поведения деятельности страховой компании в случае, когда число клиентов случайно.

На естественность такого подхода, в частности, обратили внимание авторы работ [1–5].

В работе изучается асимптотическое поведение необходимого резерва страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы случайно. Получены асимптотические разложения (а.р.) необходимого резерва страховой компании. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект). Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, а во втором рассматривается трёхточечное симметричное распределение.

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ – соответственно ф.р. и плотность стандартного нормального закона.

В разделе 2 приведены результаты в случае неслучайного числа клиентов, в разделе 3 проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в этом случае, в разделе 4 рассмотрена ситуация, когда число клиентов страховой фирмы случайно, в разделе 5 рассмотрен пример.

2. Асимптотическое поведение необходимого резерва при неслучайном числе клиентов

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием однотипных n клиентов, риски которых описываются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$. Обозначим через

$$S_n \;=\; S_n(X_1, \ldots, X_n)$$

потери страховой компании при страховании этих n клиентов. В частном случае эти потери имеют вид суммы отдельных исков клиентов

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.1}$$

Назовём α-резервом (асимптотической α-квантилью статистики S_n, $\alpha \in (0,1)$ – малое число), соответствующим потерям S_n, величину $c^*_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(S_n \;\geqslant\; c^*_\alpha(n)\big) \;=\; \alpha \;+\; o(n^{-1}), \quad n \;\to\; \infty. \tag{2.2}$$

Если интерпретировать статистику S_n как суммарные страховые требования страховой компании, то α - резерв $c^*_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей при большом числе клиентов n (асимптотически) с большой вероятностью $1-\alpha$ желательно не превышать.

Применяя формулу Тейлора, несложно получить следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть для функции распределения статистики S_n равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(S_n < x\big) = G^*(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, g_1^*(x) + \frac{1}{n}\, g_2^*(x) + o(n^{-1}),$$

где $G^*(x)$, $g_1^*(x)$, $g_2^*(x)$ – достаточно гладкие функции, тогда для α-резерва $c_\alpha^*(n)$ справедливо а.р.

$$c_\alpha^*(n) = c_\alpha^* - \frac{g_1^*(c_\alpha^*)}{\sqrt{n}\, G^{*\prime}(c_\alpha^*)} -$$

$$- \frac{1}{n}\left(\frac{G^{*\prime\prime}(c_\alpha^*) g_1^{*2}(c_\alpha^*)}{2(G^{*\prime}(c_\alpha^*))^3} + \frac{G^{*\prime}(c_\alpha^*) g_2^*(c_\alpha^*) - g_1^*(c_\alpha^*) g_1^{*\prime}(c_\alpha^*)}{(G^{*\prime}(c_\alpha^*))^2}\right) + o(n^{-1}),$$

где c_α^* удовлетворяет уравнению $G^*(c_\alpha^*) = 1 - \alpha$.

Рассмотрим применение этой леммы в случае, когда потери страховой фирмы представлены нормированной суммой (2.1).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ независимые одинаково распределённые с.в. такие, что

$$\mathsf{E}\, X_1 = 0,\ \ \mathsf{E}\, X_1^2 = 1,\ \mathsf{E}\, |X_1|^{k+\delta} < \infty,\ \ k \geqslant 3,\ k \in \mathbb{N},\ \delta > 0. \tag{2.3}$$

Для каждого n пусть

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(X_1 + \ldots + X_n). \tag{2.4}$$

Предположим, что с.в. X_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\mathsf{E}\ \exp\{itX_1\}| < 1. \tag{2.5}$$

При выполнении условий (2.3) и (2.5) из Теоремы 6.3.2 книги [6] следует выполнение неравенства

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\big(T_n < x\big) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} n^{-i/2}\, Q_i(x)\right| \le \frac{C_{k,\delta}}{n^{(k-2+\delta)/2}},\ C_{k,\delta} > 0,\quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

где функции $Q_1(x), \ldots, Q_{k-2}(x)$ определены в книге [6], например,

$$Q_1(x) = -(x^2 - 1)\ \phi(x)\ \frac{\mathsf{E}\ X_1^3}{6},$$

$$Q_2(x) = -(x^3 - 3x)\ \phi(x)\ \frac{\mathsf{E}\ X_1^4 - 3}{24} - (x^5 - 10x^3 + 15x)\ \phi(x)\ \frac{(\mathsf{E}\ X_1^3)^2}{72}. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.6), (2.7) и Леммы 2.1 непосредственно следует а.р. для α-резерва.

Лемма 2.2. *Пусть для $k = 4$, $\delta > 0$ выполнены условия (2.3) - (2.5), тогда для α-резерва $c_\alpha^*(n)$ справедливо а.р.*

$$c_\alpha^*(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\ X_1^3}{6\sqrt{n}}\ (u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

3. Сравнение необходимых резервов двух страховых компаний

В этом разделе будет проведено асимптотическое сравнение необходимых резервов двух страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа наблюдений (асимптотический дефект).

Рассмотрим страховую компанию, суммарный ущерб которой имеет вид $T_n = T_n(X_1 \ldots, X_n)$, и зависит от n «потерь» $X_1, \ldots, X_n$, представляющих собой независимые одинаково распределенные с.в., описывающие страховые требования n клиентов страховой фирмы. Назовём α-резервом ($\alpha \in (0,1)$), соответствующим нормированному ущербу T_n, величину $c_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\,T_n \geqslant c_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

Если интерпретировать величину $\sqrt{n}\,T_n$ как суммарные страховые требования, предъявляемые страховой компании n клиентами, то α-резерв $c_\alpha(n)$ может рассматриваться как резервный капитал страховой компании, который ей с большой вероятностью $1-\alpha$ желательно не превышать.

Из Леммы 2.1 непосредственно следует

Лемма 3.1. *Пусть для функции распределения нормированных потерь $\sqrt{n}\,T_n$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо а.р. вида*

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\,T_n < x\big) = G(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,g_1(x) + \frac{1}{n}\,g_2(x) + o(n^{-1}),$$

где $G(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ – достаточно гладкие функции, тогда для асимптотической α-резерва $c_\alpha^*(n)$ справедливо а.р.

$$c_\alpha(n) = c_\alpha - \frac{g_1(c_\alpha)}{\sqrt{n}\,G^{(1)}(c_\alpha)} -$$

$$- \frac{1}{n}\Big(\frac{G^{(2)}(c_\alpha)g_1^2(c_\alpha)}{2(G^{(1)}(c_\alpha))^3} + \frac{G^{(1)}(c_\alpha)g_2(c_\alpha) - g_1(c_\alpha)g_1^{(1)}(c_\alpha)}{(G^{(1)}(c_\alpha))^2}\Big) + o(n^{-1}),$$

где c_α удовлетворяет уравнению $G(c_\alpha) = 1 - \alpha$.

Следствие 3.1. *Пусть $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, тогда в условиях Леммы 3.1 равномерно по $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\,T_n < x + \delta_n\big) =$$

$$= \mathsf{P}\big(\sqrt{n}\,T_n < x\big) + \delta_n\,G^{(1)}(x) + \frac{\delta_n^2}{2}\,G^{(2)}(x) + \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}\,g_1^{(1)}(x) + o\Big(\max\big(\delta_n^2, \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}, n^{-1}\big)\Big).$$

Рассмотрим теперь другую функцию потерь страховой компании $U_n = U_n(X_1, \ldots, X_n)$, основанную на n страховых требований клиентов

$X_1, \ldots, X_n$, имеющую α-резерв $\bar{c}_\alpha(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_n \;\geqslant\; \bar{c}_\alpha(n)\big) \;=\; \alpha \;+\; o(n^{-1}), \quad n \;\to\; \infty. \tag{3.2}$$

Предположим, что а.р. для ф.р. потерь $\sqrt{n}\, S_n$ имеет вид

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_n \;<\; x\big) \;=\; G(x) \;+\; \frac{1}{\sqrt{n}}\, g_1(x) \;+\; \frac{1}{n}\, \bar{g}_2(x) \;+\; o(n^{-1}), \tag{3.3}$$

где $G(x)$, $g_1(x)$, $\bar{g}_2(x)$ – достаточно гладкие функции, то есть это а.р. отличается от а.р. для ф.р. нормированных потерь $\sqrt{n}\; T_n$ только членом порядка $1/n$ (см. Лемму 3.1). Определим последовательность натуральных чисел $\{m(n) \;=\; n \;+\; d \;+\; o(1), \;\; d \;\geqslant\; 0, \quad n = 1, 2, \ldots\}$ равенством (d – асимптотический дефект)

$$\mathsf{P}\big(\sqrt{n}\, U_{m(n)} \;\geqslant\; c_\alpha(m(n))\big) \;=\; \alpha \;+\; o(n^{-1}), \quad n \;\to\; \infty, \tag{3.4}$$

то есть это необходимое (добавочное) число клиентов для того, чтобы потери $\sqrt{n}\; U_n$ превзошли α – резерв $c_\alpha(n)$ потерь $\sqrt{n}\; T_n$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия Леммы 3.1 и условие (3.3). Тогда добавочное число клиентов d имеет вид*

$$d \;=\; \frac{2\big(g_2(c_\alpha) \;-\; \bar{g}_2(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)\; c_\alpha} \;+\; o(1).$$

Доказательство. Из Леммы 3.1 и условия (3.3) непосредственно следует, что

$$c_\alpha(n) \;=\; c_\alpha \;-\; \frac{g_1(c_\alpha)}{\sqrt{n}\; G^{(1)}(c_\alpha)} \;-$$

$$-\;\frac{1}{n}\,\Big(\frac{G^{(2)}(c_\alpha) g_1^2(c_\alpha)}{2(G^{(1)}(c_\alpha))^3} \;+\; \frac{G^{(1)}(c_\alpha)\bar{g}_2(c_\alpha) \;-\; g_1(c_\alpha) g_1^{(1)}(c_\alpha)}{(G^{(1)}(c_\alpha))^2}\Big) \;+\; o(n^{-1}) \tag{3.5}$$

и поэтому

$$\delta_n \;\equiv\; \sqrt{\frac{m(n)}{n}}\; \bar{c}_\alpha(m(n)) \;-\; c_\alpha(m(n)) \;=\; \frac{d}{2n}\; c_\alpha \;-\; \frac{1}{n}\; \frac{\big(g_2(c_\alpha) \;-\; \bar{g}_2(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)} \;+\; o(n^{-1}). \tag{3.6}$$

Далее, с учётом определений $m(n)$ (см. (3.4)) и δ_n, имеем

$$\alpha \;+\; o(n^{-1}) \;=\; \mathsf{P}\big(\sqrt{n}\; U_{m(n)} \;\geqslant\; \bar{c}_\alpha(m(n))\big) \;=$$

$$=\; \mathsf{P}\big(\sqrt{m(n)}\; U_{m(n)} \;\geqslant\; c_\alpha(m(n)) \;+\; \delta_n\big). \tag{3.7}$$

Применяя к правой части равенства (3.7) Следствие 3.1, получим

$$\alpha \;+\; o(n^{-1}) \;=\; \mathsf{P}\big(\sqrt{m(n)}\; U_{m(n)} \;\geqslant\; c_\alpha(m(n))\big) \;-\; \delta_n\; G^{(1)}(c_\alpha) \;+\; o(n^{-1}).$$

Теперь из (3.2) и (3.6) следует, что

$$d \;=\; \frac{2\big(g_2(c_\alpha) \;-\; \bar{g}_2(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)\; c_\alpha} \;+\; o(1).$$

Теорема доказана. □

Приведём пример применения Теоремы 3.2.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – случайные страховые требования независимых однотипных клиентов (независимые одинаково распределённые с.в.) такие, что

$$\mathsf{E}\, X_1 \;=\; 0,\;\; \mathsf{E}\, X_1^2 \;=\; 1,\; \mathsf{E}\, |X_1|^{4+\delta} \;<\; \infty, \quad \delta \;>\; 0. \tag{3.8}$$

Для каждого n пусть

$$T_n \;=\; \frac{1}{n}\,(X_1 \;+\; \ldots \;+\; X_n). \tag{3.9}$$

Предположим, что с.в. X_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty}\; |\mathsf{E}\;\exp\{itX_1\}| \;<\; 1. \tag{3.10}$$

Пусть теперь $Y_1,\; Y_2,\; \ldots$ случайные требования другой страховой компании (независимые одинаково распределённые с.в.) такие, что

$$\mathsf{E}\, Y_1 \;=\; 0,\;\; \mathsf{E}\, Y_1^2 \;=\; 1,\; \mathsf{E}\, |Y_1|^{4+\delta} \;<\; \infty,\;\; \delta \;>\; 0. \tag{3.11}$$

Для каждого n пусть потери этой страховой компании описываются функцией вида

$$U_n \;=\; \frac{1}{n}\,(Y_1 \;+\; \ldots \;+\; Y_n). \tag{3.12}$$

Предположим, что

$$\mathsf{E}\, Y_1^3 \;=\; \mathsf{E}\, X_1^3, \tag{3.13}$$

(например, условие (3.13) выполнено, если распределения с.в. X_1 и Y_1 симметричны) и с.в. Y_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty}\; |\mathsf{E}\;\exp\{itY_1\}| \;<\; 1. \tag{3.14}$$

Теперь из Леммы 2.2 и Теоремы 3.2 непосредственно получается следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия (3.8) - (3.14). Тогда добавочное число клиентов d имеет вид*

$$d \;=\; \frac{\left(\mathsf{E}\; X_1^4 \;-\; \mathsf{E}\; Y_1^4\right)\,\left(3 \;-u_\alpha^2\right)}{12} \;+\; o(1).$$

4. Случайное число клиентов

Рассмотрим случайные величины (с.в.) $N_1,\; N_2,\; \ldots$ и $X_1,\; X_2,\; \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. В страховании с.в. $X_1,\; X_2,\; \ldots\; X_n$ интерпретируются как страховые требования клиентов, n – неслучайное число клиентов страховой фирмы, а с.в. N_n – случайное число клиентов страховой компании, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$\mathsf{P}(N_n \;=\; k) \;=\; \frac{1}{n}\,\left(1 \;-\; \frac{1}{n}\right)^{k-1},\; k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathsf{E}\, N_n \;=\; n \tag{4.1}$$

и значит среднее число клиентов, обратившихся в страховую компанию, равно n.

Предположим, что для каждого $n \geq 1$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть, $N_n \in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1,\ X_2,\ \ldots$. Всюду далее предполагается, что случайные величины $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы одинаково распределены, то есть рассматриваются независимые однотипные клиенты.

Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $G_n \;=\; G_n(X_1, \ldots, X_n)$ обобщенные потери (статистику) страховой компании, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от страховых требований $X_1,\ \ldots,\ X_n$. Для каждого $n \geq 1$ определим потери страховой компании, обслуживающей случайное число клиентов N_n, через G_{N_n}

$$G_{N_n}(\omega) \;\equiv\; G_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)),\;\; \omega \;\in\; \Omega.$$

Следующее условие описывает асимптотическое разложение (а.р.) для функции распределения (ф.р.) потерь G_n в случае неслучайного числа клиентов.

Условие А. *Существуют числа $k \;\in\; \mathbb{N}$, $k \;\geqslant\; 2$, $\alpha_{in} \;\in\; \mathbb{R}$, $i \;=\; 1, \ldots, k$, $\beta_n \;>\; 0$, $C_k \;>\; 0$, дифференцируемая ф.р. $G(x)$ и измеримые функции $g_j(x)$, $j \;=\; 1, \ldots, k$ такие, что*

$$\beta_n \;\to\; 0, \;\; \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \;|\alpha_{in}| \;\to\; 0, \quad n \;\to\; \infty,$$

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\big(G_n \;<\; x\big) \;-\; G(x) - \sum_{i=1}^{k} \;\alpha_{in}\; g_i(x) \;\right| \;\leq\; C_k\; \beta_n \quad n \;\in\; \mathbb{N}.$$

Лемма 4.1. *Пусть потери $G_n \;=\; G_n(X_1,\; \ldots,\; X_n)$ удовлетворяет Условию А. Тогда*

$$\sup_x \big|\; \mathsf{P}\big(G_{N_n} \;<\; x\big) \;-\; G(x) \;-\; \sum_{i=1}^{k} \;\mathsf{E}\; \alpha_{iN_n}\; g_i(x)\big| \;\leq\; C_k \;\mathsf{E}\; \beta_{N_n}.$$

Доказательство непосредственно следует из формулы полной вероятности.

Приведем пример применения этой леммы.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – страховые требования однотипных независимых клиентов (независимые одинаково распределённые с.в.) такие, что (см. условия (2.3) – (2.7))

$$\mathsf{E}\, X_1 \;=\; 0, \;\; \mathsf{E}\, X_1^2 \;=\; 1, \;\mathsf{E}\, |X_1|^{k+\delta} \;<\; \infty, \;\; k \;\geqslant\; 3, \; k \;\in\; \mathbb{N}, \; \delta \;>\; 0. \tag{4.2}$$

Для каждого n пусть потери имеют вид нормированной суммы

$$G_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\; (X_1 \;+\; \ldots \;+\; X_n). \tag{4.3}$$

Предположим, что с.в. X_1 удовлетворяет условию Крамера (C)

$$\limsup_{|t|\to\infty} \;|\mathsf{E}\; \exp\{itX_1\}| \;<\; 1. \tag{4.4}$$

При выполнении условий (4.2) и (4.4) из Теоремы 6.3.2 книги [6] следует выполнение неравенства

$$\sup_x \Big| \mathsf{P}\big(G_n < x\big) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} n^{-i/2}\, Q_i(x) \Big| \le \frac{C_{k,\delta}}{n^{(k-2+\delta)/2}}, \; C_{k,\delta} > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

где функции $Q_1(x), \ldots, Q_{k-2}(x)$ определены в книге [6], например,

$$Q_1(x) = -(x^2 - 1)\, \phi(x)\, \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6},$$

$$Q_2(x) = -(x^3 - 3x)\, \phi(x)\, \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{24} - (x^5 - 10x^3 + 15x)\, \phi(x)\, \frac{(\mathsf{E}\, X_1^3)^2}{72}. \tag{4.6}$$

Учитывая неравенство (4.5) и Лемму 4.1, получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия (4.2) – (4.4), тогда*

$$\sup_x \big| \mathsf{P}\big(G_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} \mathsf{E}\, N_n^{-i/2}\, Q_i(x) \big| \le C_{k,\delta}\, \mathsf{E}\, N_n^{-(k-2+\delta)/2}.$$

Из соотношения (4.5) и Леммы 4.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть для* $k = 4$, $\delta > 0$ *выполнены условия (4.2) – (4.4) и*

$$\mathsf{E}\, N_n = n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} + o(n^{-1}), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{b}{n} + o(n^{-1}), \quad \mathsf{E}\, N_n^{-(2+\delta)/2} = o(n^{-1}), \quad b \in \mathbb{R},$$

тогда

$$\sup_x \Big| \mathsf{P}\big(G_n < x\big) - \Phi(x) - \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{Q_2(x)}{n} \Big| = o(n^{-1})$$

и

$$\sup_x \Big| \mathsf{P}\big(G_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{bQ_2(x) + aQ_1(x)}{n} \Big| = o(n^{-1}).$$

Ниже эти результаты будут применены для аппроксимации α-резерва и нахождения асимптотического дефекта.

Назовём асимптотическим α - резервом ($\alpha \in (0,1)$) потерь G_n величину $g_\alpha^*(n)$, удовлетворяющую асимптотическому равенству

$$\mathsf{P}\big(G_n \geqslant g_\alpha^*(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{4.7}$$

соответственно α - резервом случайных потерь G_{N_n} назовём величину $g_\alpha(n)$ такую, что

$$\mathsf{P}\big(G_{N_n} \geqslant g_\alpha(n)\big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.5), (4.6) и Леммы 3.1 непосредственно следует а.р. для асимптотических α - резервов.

Лемма 4.4. *Пусть для $k = 4$, $\delta > 0$ выполнены условия (4.2) – (4.4) и условия Леммы 4.3, тогда для асимптотических α - резервов $g^*_\alpha(n)$ и $g_\alpha(n)$ справедливы а.р.*

$$g^*_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\, X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$

$$g_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\, X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+ \frac{1}{12n}\Big(\frac{\mathsf{E}^2\, X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{b(\mathsf{E}\, X_1^4 - 3)}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha) + 2a\,\mathsf{E}\, X_1^3\,(u_\alpha^2 - 1)\Big) + o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Определим теперь последовательность натуральных чисел $\{m(n) = n + d^* + o(1),\ d^* \geqslant 0,\quad n = 1, 2, \ldots\}$ равенством (d^* – добавочное число клиентов или асимптотический дефект)

$$\mathsf{P}\Big(G_{N_{m(n)}} \geqslant \sqrt{m(n)/n}\; g^*_\alpha(m(n))\Big) = \alpha + o(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{4.9}$$

то есть это необходимое (добавочное) число клиентов для того, чтобы случайные потери G_{N_n} превзошли нормированный α – резерв $g^*_\alpha(n)$ потерь G_n.

Аналогично Теореме 3.1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\mathsf{E}\, N_n = n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} + o(n^{-1}), \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-3/2} = \frac{b}{n} + o(n^{-1}), \quad \mathsf{E}\, N_n^{-(2+\delta)/2} = o(n^{-1}), \quad b \in \mathbb{R}$$

и

$$\sup_x \Big|\, \mathsf{P}\big(H_n < x\big) - G(x) - \frac{g_1(x)}{\sqrt{n}} - \frac{g_2(x)}{n} \Big| \leqslant \frac{C}{n^{(2+\delta)/2}}, \quad \delta > 0,$$

тогда добавочное число клиентов d^* (см. (4.9)), соответствующее случайным потерям G_{N_n} относительно потерь G_n имеет вид

$$d^* = \frac{2\big(g_2(c_\alpha)\,(1 - b) - a\, g_1(c_\alpha)\big)}{G^{(1)}(c_\alpha)\; c_\alpha} + o(1),$$

где c_α удовлетворяет уравнению $G(c_\alpha) = 1 - \alpha$.

Из этой Теоремы непосредственно получается следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть выполнены условия Леммы 3.4. Тогда добавочное число клиентов d^* имеет вид (см. (3.12))*

$$d^* = \frac{2\big((1 - b)\; Q_2(u_\alpha) - a\; Q_1(u_\alpha)\big)}{\phi(u_\alpha)\; u_\alpha} + o(1),$$

если

$$\mathsf{E}\,X_1^3 \;=\; 0,$$

то

$$d^* \;=\; \frac{(1\;-\;b)\,(3\;-\;u_\alpha^2)\,(\mathsf{E}\,X_1^4\;-\;3)}{12} \;+\; o(1).$$

5. Случай трёхточечного симметричного распределения

Применим Лемму 2.2 для получения а.р. асимптотического α-резерва в случае, если число клиентов N_n имеет трёхточечное симметричное распределение.

Пусть случайное число клиентов N_n имеет симметричное распределение вида

$$N_n \;:\; \begin{matrix} n\;-\;h_n, & n, & n\;+\;h_n \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, \end{matrix} \tag{5.1}$$

где последовательность натуральных чисел $h_n \;<\; n$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{n} \;=\; 0. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. *Пусть случайное число клиентов N_n имеет распределение (5.1) и выполнено условие (5.2), тогда справедливы равенства*

$$\mathsf{E}\,N_n \;=\; n,$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-1/2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \;-\frac{1}{4\sqrt{n}}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \;+\; O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^3\Big),$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\frac{2}{3n}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \;+\; O\Big(\frac{1}{n}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^4\Big),$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-3/2} \;=\; \frac{1}{n^{3/2}} \;+\; O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2\Big), \quad n\;\to\;\infty.$$

Доказательство. Доказательство Леммы следует из равенств

$$\mathsf{E}\,N_n^{-1} \;=\; \frac{3n^2\;-\;h_n^2}{3n(n^2\;-\;h_n^2)} \;=$$

$$=\;\frac{1}{n}\,\Big(1\;-\;\frac{h_n^2}{3n}\Big)\,\Big(1\;+\;\frac{h_n^2}{n^2}\;+\;O\Big(\frac{h_n^4}{n^4}\Big)\Big) \;=$$

$$=\;\frac{1}{n} \;+\frac{2}{3n}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 \;+\; O\Big(\frac{1}{n}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^4\Big),$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-3/2} \;=\; \frac{1}{3n^{3/2}}\,\Big(\frac{1}{(1\;-\;h_n/n)^{3/2}}\;+\;1+\;\frac{1}{(1\;+\;h_n/n)^{3/2}}\Big) \;=$$

$$=\;\frac{1}{n^{3/2}} \;+\; O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2\Big).$$

Аналогично доказываются оставшиеся соотношения. Лемма доказана. □

Теперь из этих лемм непосредственно вытекает следующая Теорема.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия (2.2) – (2.4), (3.1) и с.в. N_n имеет распределение (5.1), тогда для асимптотического α-резерва $c_\alpha(n)$, соответствующего случайным потерям G_{N_n}, справедливо а.р. вида*

$$g_\alpha(n) = g^*_\alpha(n) - \frac{\mathsf{E}\,X_1^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\sqrt{n}}\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^2 + o(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Замечание 5.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.1 и*

$$h_n = \gamma\, n^\beta + o(n^\beta), \quad \gamma \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \beta < 1,$$

тогда

$$n^{5/2-2\beta}\big(g^*_\alpha(n) - g_\alpha(n)\big) \to \frac{\gamma^2}{24}\,\mathsf{E}\,X_1^3\,(\,u_\alpha^2 - 1), \quad n \to \infty.$$

Применим Лемму 4.2 и Теорему 4.5 для получения добавочного числа клиентов и а.р. асимптотического α-резерва в случае, если число клиентов N_n имеет трёхточечное симметричное распределение (5.1).

Применяя Лемму 4.1, непосредственно получаем следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия (4.2) – (4.4) с $k = 4$ и $0 < \delta \leqslant 1$ и условия (5.1) и (5.2). Тогда*

$$\sup_x \Big|\, \mathsf{P}\big(G_{N_n} < x\big) - \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{h_n^2}{4n^2}\Big)\,Q_1(x) - $$
$$- \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{2h_n^2}{3n^2}\Big)\,Q_2(x)\Big| = O\Big(\frac{1}{n^{(2+\delta)/2}}\,\Big(\frac{h_n}{n}\Big)^{(4+2\delta)/3}\Big).$$

Следствие 5.3. *Пусть выполнены условия Леммы 5.3 и $h_n = n^{3/4}$. Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathsf{P}\big(G_{N_n} < x\big) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,Q_1(x) + \frac{1}{n}\Big(Q_2(x) - \frac{1}{4}Q_1(x)\Big) = o(n^{-1}).$$

Теперь из этих лемм непосредственно вытекает следующая Теорема.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия Следствия 5.3, тогда для асимптотических α - резервов $g^*_\alpha(n)$ и $g_\alpha(n)$ потерь G_n и G_{N_n} справедливы а.р.*

$$g^*_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\,X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$
$$+ \frac{1}{12n}\,\Big(\frac{\mathsf{E}^2\,X_1^3}{3}\,(5u_\alpha - 2u_\alpha^3) + \frac{\mathsf{E}\,X_1^4 - 3}{2}\,(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)\Big) + o(n^{-1}),$$
$$g_\alpha(n) = u_\alpha + \frac{\mathsf{E}\,X_1^3}{6\sqrt{n}}\,(u_\alpha^2 - 1) +$$

$$+\frac{1}{12n}\left(\frac{\mathsf{E}^2\,X_1^3}{3}\,(5u_\alpha-2u_\alpha^3)+\frac{\mathsf{E}\,X_1^4\,-\,3}{2}\,(u_\alpha^3-3u_\alpha)-\frac{1}{2}\,\mathsf{E}\,X_1^3\,(u_\alpha^2-1)\right)+o(n^{-1}),$$

где u_α удовлетворяет уравнению $\Phi(u_\alpha)\;=\;1\,-\,\alpha$. Соответствующее добавочное число клиентов d^* равно

$$d^*\;=\;\frac{Q_1(u_\alpha)}{2\phi(u_\alpha)\;u_\alpha}\;+\;o(1)\;=\;\frac{(1\;-\;u_\alpha^2)\;\mathsf{E}\;X_1^3}{12\;u_\alpha}\;+\;o(1).$$

Заключение

В работе изучается асимптотическое поведение необходимого резерва страховой компании в случае, когда число клиентов страховой фирмы случайно. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого добавочного числа клиентов (асимптотический дефект). Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается сумм независимых случайных величин, а во втором рассматривается трёхточечное симметричное распределение. Полученные результаты могут применяться в теории риска, например, для изучения оптимального поведения страховых компаний, актуарной и финансовой математике.

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[2] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[3] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[6] Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 414 с.

Образец цитирования

Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. №2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
E-mail: *bening@yandex.ru*

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF INSURANCE COMPANY RESERVE

Bening Vladimir Evgenyevich
Professor at Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Senior Researcher, Institute of Informatics Problems
of the Russian Academy of Sciences
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: bening@yandex.ru

Received 20.05.2020, revised 30.05.2020.

In the paper general results concerning the asymptotic behavior of isurance company reserve in the case of random number of clients are proved. Two examples (sums of independent random variables and three-point symmetric distribution) are presented.

Keywords: reserve of insurance company, sample of random size, asymptotic expansions, three-point symmetric distributionl, asymptotic deficiency.

Citation

Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk594

References

[1] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[2] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[3] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[5] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[6] Petrov V.V., *Summy nezavisimykh sluchajnykh velichin [Sums of independent random variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (in Russian), 414 pp.