УДК 510.676, 519.217

О ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ В ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Мистрюков А.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 30.04.2020, после переработки 20.06.2020.

В работе исследованы свойства периода занятости системы массового обслуживания с одним потоком требований и одним прибором, уходящим в спящий режим после окончания периода занятости. Когда в систему, свободную от требований, приходит новое требование, прибор сначала некоторое время выходит из спящего режима и только потом начинает обслуживать требования. Время обслуживания требований и время выхода из спящего режима имеют произвольные абсолютно непрерывные распределения. Рассматриваются случаи, когда время между приходами требований имеет распределение Эрланга и гиперэкспоненциальное распределение.

Ключевые слова: СМО с одним прибором, период занятости, гиперэкспоненциальный входящий поток, эрланговский входящий поток.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 49–57.
https://doi.org/10.26456/vtpmk562

1. Введение

Свойства периода занятости играют важную роль для предсказания поведения систем массового обслуживания. Наиболее полное описание свойств имеется лишь для систем вида M/M/1, реже M/G/1 (см., например, [2]). На практике, тем не менее, предположения об экспоненциальности времени между приходами требований и времени обслуживания зачастую не выполняется. В случаях, например, когда входящий поток имеет гиперэкспоненциальное распределение или распределение Эрланга, можно найти выражение для преобразования Лапласа-Стилтьеса длительности периода занятости [1,3]. В этих работах его свойства исследовались при помощи прямых уравнений Колмогорова путем введения специальной дискретной компоненты, связанной со входящим потоком, обеспечивающей марковость процесса изменения очереди во времени. В данной работе, используя тот же метод, мы получим выражения для периода занятости СМО с одним прибором, который после окончания периода занятости уходит в спящий режим, во время которого он не обслуживает требования, и некоторое время выходит из него после поступления нового требования. Для этого мы обобщим результаты, полученные в [3] для систем с Эрланговским входящим потоком. Для систем с гиперэкспоненциальным входящим потоком на основе [1],[4] сформулируем аналогичные результаты.

2. Описание системы и обозначения

Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания и одним потоком требований. После окончания каждого периода занятости прибор уходит в спящий режим, и при приходе нового требования сначала выходит из спящего режима и лишь потом начинает обслуживать требования. Время выхода из спящего режима имеет абсолютно непрерывное распределению с плотностью $\nu(t)$. Время обслуживания требований имеет произвольное абсолютно непрерывное распределение. Рассматриваются случаи, когда входящий поток требований является гиперэкспоненциальным или Эрланговским.

При гиперэкспоненциальном входящем потоке время между поступлениями требований описывается гиперэкспоненциальным распределением с параметрами $(c_j, a_j),\ \ j = 1, \ldots, N$, а именно

$$a(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\, a_j\, \exp(-a_j t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$c_i > 0,\ i = 1, \ldots, k,\ \ \sum_{j=1}^{k} c_j = 1.$$

Рекуррентный входящий поток, задаваемый плотностью распределения (1), эквивалентен следующему: интервалы между поступлениями требований независимы в совокупности и показательно распределены со случайным параметром a, принимающим значения a_j с вероятностью $c_j,\ j = 1, \ldots, k$.

При Эрланговском входящем потоке времена между поступлениями требований независимы в совокупности и распределены согласно распределению Эрланга

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i,$$

где ξ_i – экспоненциально распределенные величины с параметрами a_i.

Для удобства введем следующий вспомогательный марковский процесс с множеством состояний $i = 1, .., k$: пусть в момент времени t этот процесс принимает некоторое значение $i = 1, .., k$, тогда спустя случайное время, распределенное как ξ_i, процесс переходит в состояния $i + 1$, если $i < k$, или 1, если $i = k$. В случае перехода из состояния $i = k$ в состояние $i = 1$ будем считать, что в систему пришло требование.

Состояние вспомогательного процесса в обоих случаях будем называть фазой входящего потока, и фазу в момент времени t будем обозначать за $j(t)$. Функцию распределения времени между приходами требований и плотность обозначим за $A(t)$ и $a(t)$, соответственно. Функцию распределения времени обслуживания и плотность обозначим за $B(t)$ и $b(t)$. Также обозначим моменты этих величин следующим образом:

$$a^{(k)} = \int\limits_0^\infty a^k dA(t), \quad b^{(k)} = \int\limits_0^\infty b^k dB(t).$$

3. Результаты

Рассмотрим сначала систему без спящего режима. Обозначим за $\Pi(n^0)$ длительность периода занятости, начавшегося со случайного количества требований n^0. Длину очереди в момент времени t обозначим за $L(t)$. Введем следующие обозначения, связанные с периодом занятости:

$$\Pi_{j\nu}(n^0,t)\cdot dt = P(\Pi(n^0)\in(t+dt)\,,j(t)=j \mid L(0)=n^o,\ j(0)=\nu),$$

$$\pi_{j\nu}(n^0,s)=\int e^{-st}\Pi_{j\nu}(t)dt.$$

Примем $\varphi(z)=Mz^{n^0}$. За $z(t)$ обозначим время, прошедшее с начала обслуживания требования, которое обслуживается в момент времени t.

Лемма 1. $\pi_{j\nu}(n^0,s)$ *определяется из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k}\pi_{jv}(n^0,s))\prod_{\mu=j}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{j-1}(\lambda_m(z_m(s))+a_l)=\varphi(z)\prod_{\mu=\nu}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{\nu-1}(\lambda_m(z_m(s))+a_l),$$

где λ_m *являются корнями уравнения*

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda+a_i}{a_i}=z,$$

а $z_m(s)$ *определяются из уравнения*

$$z=\beta(s-\lambda_m(z)),$$

β *– преобразование Лапласа-Стилтьеса времени обслуживания требования.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}P(L(t)=n,\ z(t)<x,\ j(t)=j,\ L(\tau)\neq 0,\ \tau\in(0,\ t)\mid j(0)=\nu,\ L(0)=n^0),$$

$$P_j^{(\nu)}(z,x,t,n^0)=\sum_{n=1}^{\infty}P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)\cdot z^n,$$

$$P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^0)=\int_0^\infty(\sum_{n=1}^{\infty}P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)\cdot z^n)\cdot e^{-st}dt,$$

$$\eta(x)=\frac{b(x)}{1-B(x)}.$$

Рассмотрим возможные переходы системы за время Δ:

$$P_j^{(\nu)}(n,x+\Delta,t+\Delta,n^o)=P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)(1-(a_j+\eta(x))\Delta))$$
$$+(1-\delta_{j,1})P_{j-1}^{(\nu)}(n,x,t,n^0)\cdot a_{j-1}+\delta_{j,1}P_k^{(\nu)}(n-1,x,t,n^0)\cdot a_k+O(\Delta),$$

где а δ_{jk} – символ Кронекера. Устремляя Δ к нулю, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)}{\partial x}+\frac{\partial P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)}{\partial t}=P_j^{(\nu)}(n,x,t,n^0)(-(a_j+\eta(x))\Delta))$$
$$+(1-\delta_{j,1})P_{j-1}^{(\nu)}(n,x,t,n^0)\cdot a_{j-1}+\delta_{j,1}P_k^{(\nu)}(n-1,x,t,n^0)\cdot a_k.$$

Переходя к производящим функциям и преобразованию Лапласа-Стилтьеса, получаем:

$$\frac{\partial P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)}{\partial x}=-[s+a_j+\eta(x)]\partial P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)$$
$$+(1-\delta_{j,1})P_{j-1}^{(\nu)}(z,x,s,n^o)\cdot a_{j-1}+\delta_{j,1}P_k^{(\nu)}(z,x,s,n^0)\cdot a_k\cdot z. \quad (2)$$

Делая замену $P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)=[1-B(x)]e^{-sx}p_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)$, получаем уравнение:

$$\frac{\partial p_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)}{\partial x}=$$
$$=-a_jp_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)+(1-\delta_{j,1})p_{j-1}^{(\nu)}(z,x,s,n^o)\cdot a_{j-1}+\delta_{j,1}p_k^{(\nu)}(z,x,s,n^0)\cdot a_k\cdot z.$$

Его характеристическое уравнение следующее:

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda+a_i}{a_i}=z$$

и, как показано в [3], имеет k различных корней $\lambda_m(z)$. Записывая уравнения для собственных векторов, находим, что для любого m i-я компонента собственного вектора отличается от $i+1$-й множителем $(a_{i+1}+\lambda_m(z))/a_i$. Таким образом, решение уравнения (2) записывается в следующем виде:

$$P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^o)=[1-B(x)]\sum_{m=1}^{k}\prod_{l=j}^{k-1}\frac{a_{l+1}+\lambda_m(z)}{a_l}\gamma^{(m)}(z,s)e^{-(s-\lambda_m(z))x}, \quad (3)$$

где $\gamma^{(m)}(z,s)$ – произвольные функции. Далее, следуя рассуждениям в [1], запишем уравнения для завершения и начала обслуживания следующего требования:

$$P_j^{(\nu)}(z,0,t,n^0)=\frac{1}{z}\int_0^t P_j^{(\nu)}(z,x,t,n^0)\eta(x)dx-\int_0^t P_j^{(\nu)}(1,x,t,n^0)\eta(x)dx+\delta(t)\varphi(z)\delta_{j,v},$$

где $\delta(t)=1$ при $t=0$ и 0 в противном случае. Заметим, что

$$\int_0^t P_j^{(\nu)}(1,x,t,n^0)\eta(x)dx=\pi_{jv}(n^0,t).$$

Таким образом, переходя к преобразованием Лапласа-Стилтьеса, получаем:

$$P_j^{(\nu)}(z,0,s,n^0) = \frac{1}{z}\int_0^t P_j^{(\nu)}(z,x,s,n^0)\eta(x)dx - \pi_{jv}(n^0,s) + \varphi(z)\delta_{j,v}. \tag{4}$$

Подставляя 3 в 4, получаем уравнение

$$\sum_{m=1}^{k}\prod_{l=j}^{k-1}\frac{a_{l+1}+\lambda_m(z)}{a_l}\delta_m(z,s) = -\pi_{jv}(n^0,s) + \varphi(z)\delta_{j,v}, \tag{5}$$

где $\delta_m(z,s) = [1 - z^{-1}\beta(s-\lambda_m(z))]\gamma^{(m)}(z,s)$. Система линейных уравнений (5) имеет матрицу Вандермонда, ее решение записывается в виде:

$$\delta_m(z,s) = \{\sum_{y=1}^{k}\prod_{l\neq y}^{k}(\lambda_m(z)+a_l)\}^{-1}\sum_{j=1}^{k}(-\pi_{jv}(n^0,s)+\varphi(z)\delta_{j,v})\prod_{\mu=j}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{j-1}(\lambda_m(z)+a_l).$$

В силу Леммы 2.2 из [3] $\delta_m(z,s)$ обращаются в ноль при $z = z_m(s)$, где $z_m(s)$ являются корнями уравнения $z = \beta(s-\lambda_m(z))$. Таким образом, $\pi_{jv}(n^0,s)$ находятся из системы линейных уравнений:

$$\left(\sum_{y=1}^{k}\prod_{l\neq y}^{k}(\lambda_m(z_m(s))+a_l)\right)^{-1}\sum_{j=1}^{k}(-\pi_{jv}(n^0,s)+\varphi(z)\delta_{j,v})\prod_{\mu=j}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{j-1}(\lambda_m(z_m(s))+a_l) = 0.$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^{k}\pi_{jv}(n^0,s))\prod_{\mu=j}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{j-1}(\lambda_m(z_m(s))+a_l) = \varphi(z)\prod_{\mu=\nu}^{k-1}a_\mu\prod_{l=1}^{\nu-1}(\lambda_m(z_m(s))+a_l).$$

□

Далее, для того, чтобы рассмотреть систему со спящим режимом, нужно найти совместное распределение количества требований и фазы на момент выхода прибора из спящего режима. Оно определяется следующей Леммой.

Лемма 2. *Пусть T — момент окончания спящего режима, тогда*

$$P(L(T)=n, j(T)=i \mid T=\tau) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\pi_i(z,\tau)}{\partial z^n}|_{z=0} \tag{6}$$

и

$$P(L(T)=n, j(T)=i) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty\frac{\partial^n\pi_i(z,\tau)}{\partial z^n}|_{z=0}\cdot\nu(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где

$$\pi_i(z,t) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\prod_{l=i}^{k-1}\frac{a_{l+1}+\lambda_j(z)}{a_l}e^{\mu_j(z)\cdot t},\ i=1,\ldots,k,\ \alpha_j = C^{-1}\nu_0,$$

ν_0 – вектор начальных условий для фазы входящего потока $(\nu_0)_i = \delta_{i,1}$, C – матрица Вандремонда вида

$$C_{ij} = \prod_{l=1}^{i-1}\frac{a_{l+1}+\lambda_j(z)}{a_l}.$$

Доказательство. Примем $P_j(n,t) = P(L(t) = n, j(t) = j \mid j(0) = 1)$. Тогда, аналогично доказательству Леммы 1, запишем прямые уравнения:

$$P_j(n,t+dt) = P_j(n,t)(1-a_j dt) + (1-\delta_{n,0})\delta_{j,1}P_k(n-1,t)a_k dt \\ + (1-\delta_{j,1})P_{j-1}(n,t)a_{j-1}dt + o(dt).$$

Переходя к пределу $dt \to 0$ и к производящим функциям, получаем систему уравнений с начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_j(z,t)}{\partial t} = -a_j\pi_j(z,t) + z\delta_{j,1}\pi_k(z,t)a_k + (1-\delta_{j,1})\pi_{j-1}(z,t)a_{j-1}, \\ \pi_j(z,0) = \delta_{j,1}. \end{cases}$$

Отсюда аналогично доказательству Леммы 1, получаем, что

$$\pi_i(z,t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \prod_{l=i}^{k-1} \frac{a_{l+1} + \lambda_j(z)}{a_l}\, e^{\mu_j(z)\cdot t},\ i = 1,\dots,k,$$

где константы α_j определяются из начальных условий

$$\alpha_j = C^{-1}\nu_0,$$

$$(\nu_0)_i = \delta_{i,1},$$

C – матрица Вандремонда вида

$$C_{ij} = \prod_{l=1}^{i-1} \frac{a_{l+1} + \lambda_j(z)}{a_l}.$$

Утверждения леммы вытекают из свойств производящих функций. □

Пользуясь результатами из [1,4], сформулируем аналогичные утверждения для системы с гиперэкспоненциальным входящим потоком.

Лемма 3. *Пусть входящий поток гиперэкспоненциальный с плотностью 1, тогда $\pi_{j\nu}$ определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\mu_k^*(s) + a_j}\pi_{j\nu}(n^0,s) = \frac{a_j}{\mu_k^*(s) + a_j}\varphi(\beta(s-\mu_k^*(s))),$$

где φ, как и раньше, производящая функция начального количества требований, а $\mu_k^*(s)$ могут быть численно найдены из уравнения

$$\frac{\prod_{j=i}^{N} \mu_k^*(s) + a_i}{\sum_{j=1}^{N} c_j a_j \prod_{i\neq j} \mu_k^*(s) + a_i} = \beta(s-\mu_k^*(s)).$$

Совместное распределение количества требований и фазы на момент выхода прибора из спящего режима определяются следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть T — момент окончания спящего режима, тогда*

$$P(L(T)=n, j(T)=i \mid T=\tau)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \pi_i(z,\tau)}{\partial z^n}|_{z=0}$$

и

$$P(L(T)=n, j(T)=i)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^n \pi_i(z,\tau)}{\partial z^n}|_{z=0}\cdot \nu(\tau)d\tau,$$

где

$$\pi_i(z,t)=\sum_{j=1}^N \frac{c_i\cdot (C^{-1}\cdot b)_j}{c_1(\mu_j(z)+a_i)}\, e^{\mu_j(z)\cdot t},\ i=1,\ldots,N,$$

$$C_{ij}^{-1}=(a_j-\mu_i(z))\cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^N(\mu_i(z)-a_k)}{\sum\limits_{k=1}^N\prod\limits_{l\neq k}(a_j-a_l)(\mu_i(z)-a_j)}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^N(a_j-\mu_k(z))}{\sum\limits_{k=1}^N\prod\limits_{l\neq k}(\mu_i(z)-\mu_l(z))(a_j-\mu_i(z))},$$

$$b_i=\frac{c_1}{c_i},$$

а $\mu_j(z)$ находятся из уравнения

$$\prod_{i=1}^N(\mu+a_i)=z\cdot\sum_{i=1}^N c_j a_j\prod_{i\neq j}(\mu+a_i).$$

Обозначим за $\tilde{\Pi}$ длительность периода занятости, начиная с момента прихода первого требования, при условии, что до его прихода прибор находился в спящем режиме, за $\tilde{\pi}$ длительность оставшегося времени периода занятости, начавшегося после выхода прибора из спящего режима.

$\tilde{\pi}_i(t)=P(\tilde{\pi}\in(t+dt)\,, j(t)=i)$,

$\tilde{\pi}_i(s)$ - преобразование Лапласа-Стилтьеса $\tilde{\pi}_i(t)$,

$\tilde{\pi}_i(t,\tau)=P(\tilde{\pi}\in(t+dt)\,, j(t)=i, T\in(\tau,\tau+d\tau))$,

$\tilde{\pi}_i(s,\tau)$ – преобразование Лапласа-Стилтьеса по t от $\tilde{\pi}_i(t,\tau))$.

Используя обозначения, введенные выше, и объединяя результаты лемм, получим результаты для системы со спящим режимом.

Теорема 1. *Суммарное время периода занятости определяется как*

$$\tilde{\Pi}=T+\tilde{\pi},$$

где случайная величина T имеет плотность распределения $\nu(t)$

$$\tilde{\pi}_i(s\mid T=\tau)=\pi_{iv}(n,s)\cdot P(L(T)=n, j(T)=v\mid T=\tau),$$

$$\tilde{\pi}_i(s,\tau)=\pi_{iv}(n,s)\cdot P(L(\tau)=n, j(\tau)=v\mid T=\tau)\nu(\tau)d\tau,$$

где, $P(L(T)=n, j(T)=v\mid T=t)$ и $\pi_{iv}(n,s)$ определены в Леммах 1, 2 для Эрланговского потока и в Леммах 3,4 для гиперэкспоненциального.

Список литературы

[1] Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 1984. 240 с.

[2] Kleinrock L. Queueing Systems. Theory. Vol. 1. New York: John Wiley and Sons, 1975.

[3] Ushakov V.G. A queueing system with Erlang incoming flow with relative priority // Theory of Probability and its Applications. 1978. Vol. 22, № 4. Pp. 841–846.

[4] Мистрюков А.В., Ушаков В.Г. Условия эргодичности СМО с относительным приоритетом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 5–14.

Образец цитирования

Мистрюков А.В. О периоде занятости в одноканальных системах обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 49–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk562

Сведения об авторах

1. **Мистрюков Андрей Вадимович**
аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, ВМК МГУ.
E-mail: unf08@rambler.ru

ON A BUSY PERIOD IN ONE-CHANNEL QUEUES

Mistryukov Andrei Vadimovich
Post-graduate student at Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University
Russian Federation, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, CMC MSU.
E-mail: unf08@rambler.ru

Received 30.04.2020, revised 20.06.2020.

In this paper we study properties of a busy period of a single server queue, where server enters sleep mode once busy period is finished. When a new job arrives in empty queue, server initializes itself for some time and only then starts to serve jobs. Service time and initialization time have arbitrary continuous distribution, and interarrival times have either Erlang or hyperexponential distribution.

Keywords: single server queues, busy period, hyperexponential interarrival times, Erlang interarrival times.

Citation

Mistryukov A.V., “On a busy period in one-channel queues”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 49–57 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk562

References

[1] Matveev V.F., Ushakov V.G., *Sistemy Massovogo Obsluzhivaniya [Queuing systems]*, MSU Publ., Moscow, 1984 (in Russian), 240 pp.

[2] Kleinrock L., *Queueing Systems*, Theory. V. 1, John Wiley and Sons, New York, 1975.

[3] Ushakov V.G., “A queueing system with Erlang incoming flow with relative priority”, *Theory of Probability and its Applications*, **22**:4 (1978), 841–846.

[4] Mistryukov A.V., Ushakov V.G., “Sufficient ergodicity conditions for queueing systems with non-preemptive priority”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 5–14 (in Russian).