УДК 517.95, 532.5

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТАНОВКИ ЛИНЯ

Григорьева В.В.*, **Шеретов Ю.В.****
*Тверской государственный технический университет, г. Тверь
**Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 09.07.2024, после переработки 24.09.2024.

Построено новое решение задачи Коши для нестационарной квазигидродинамической системы. Оно не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. С помощью подстановки Линя указанная квазигидродинамическая система свелась к трем дифференциальным уравнениям в частных производных. Были поставлены и решены три задачи Коши для указанных уравнений. Эти три решения порождают новое решение задачи Коши для квазигидродинамической системы. При $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, оно переходит в решение задачи Коши для соответствующей системы Навье–Стокса.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, система Навье–Стокса, задача Коши, подстановка Линя.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 4. С. 5–16.
https://doi.org/10.26456/vtpmk723

Введение

Построению точных решений классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература [1] – [9]. Квазигидродинамическая (КГД) система отличается от системы Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами, содержащими малый положительный параметр τ. Физические принципы, лежащие в основе ее построения, описаны в монографиях [10] – [13]. Там же найдены семейства точных решений КГД уравнений. Проблема поиска новых точных решений, специфических для квазигидродинамической системы и не удовлетворяющих уравнениям Навье–Стокса, является актуальной.

В настоящей работе построено новое решение задачи Коши для нестационарной квазигидродинамической системы. Оно не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. С помощью подстановки Линя указанная КГД система свелась к трем дифференциальным уравнениям в частных производных. Были поставлены и решены три задачи Коши для указанных уравнений. Эти три решения порождают новое решение задачи Коши для квазигидродинамической системы. При $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, оно переходит в решение задачи Коши для соответствующей системы Навье–Стокса.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса. Задача Коши

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости может быть записана в виде

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u} + \nu\nabla\big(\text{div } \vec{u}\big) + \text{div } (\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{1.2}$$

Влияние внешних массовых сил не учитывается. Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости, являющийся заданной положительной константой. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Оператор Лапласа Δ действует в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.4}$$

где c_s – скорость звука в жидкости.

Если в (1.1) – (1.2) опустить члены, содержащие τ, то получим систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\text{div } \vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u}. \tag{1.6}$$

КГД система (1.1) – (1.2) в декартовых координатах для нестационарных течений имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_x}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ + \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z},\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_y}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial (u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z w_y)}{\partial z}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_z}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_z}{\partial y} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial (u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z w_z)}{\partial z}. \tag{1.10}$$

Здесь

$$w_x = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.11}$$

$$w_y = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big), \tag{1.12}$$

$$w_z = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\Big). \tag{1.13}$$

Система (1.7) – (1.13) замкнута относительно неизвестных функций – составляющих вектора скорости $u_x = u_x(x, y, z, t)$, $u_y = u_y(x, y, z, t)$, $u_z = u_z(x, y, z, t)$ и давления $p = p(x, y, z, t)$.

Нестационарная система Навье–Стокса (1.4) – (1.5) в декартовых координатах выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{1.17}$$

Чтобы поставить задачу Коши, квазигидродинамическую систему (1.7) – (1.13) дополним начальными условиями

$$u_x\Big|_{t=0} = u_{x0}(x, y, z), \quad u_y\Big|_{t=0} = u_{y0}(x, y, z), \quad u_z\Big|_{t=0} = u_{z0}(x, y, z),$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1.18}$$

Здесь $u_{x0} = u_{x0}(x, y, z)$, $u_{y0} = u_{y0}(x, y, z)$ и $u_{z0} = u_{z0}(x, y, z)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для исключения неоднозначности в определении давления, потребуем, чтобы

$$p(x_0, y_0, z_0, t) = p_0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка в пространстве $\mathbb{R}^3$, p_0 – заданное положительное число.

Аналогичная задача Коши может быть поставлена для системы Навье–Стокса (1.14) – (1.17). Однако на поле скорости в начальный момент времени необходимо наложить дополнительное условие

$$\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial z} = 0. \tag{1.20}$$

2. Подстановка Линя

Для отыскания точных решений квазигидродинамической системы (1.7) – (1.13) применим подстановку Линя

$$u_x = u(z,t), \quad u_y = v(z,t) + \frac{x}{L} v_1(z,t),$$
$$u_z = W = const > 0, \quad p = p_0 = const > 0. \tag{2.1}$$

Здесь L – заданная положительная константа, имеющая размерность длины. Подставив функции (2.1) в выражения (1.11) – (1.13), находим

$$w_x = \tau W \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}, \tag{2.2}$$

$$w_y = \tau \left(\frac{u(z,t) v_1(z,t)}{L} + W \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + \frac{x}{L} \frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z} \right) \right), \tag{2.3}$$

$$w_z = 0. \tag{2.4}$$

Для зависимостей (2.1) – (2.4) имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, уравнение (1.7) удовлетворяется тождественно. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что равенство (1.10) также справедливо. Уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \tau W^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (1.4), запишем (2.7) следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial z} = \nu_* \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{2.8}$$

где

$$\nu_* = \nu \left(1 + \frac{W^2}{c_s^2} \right). \tag{2.9}$$

Подстановка (2.1) в (1.9) дает

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}+\frac{x}{L}\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial t}+\frac{u(z,t)v_1(z,t)}{L}-$$
$$-\frac{\tau W}{L}\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}v_1(z,t)+W\Big(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}+\frac{x}{L}\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}\Big)=$$
$$=\nu\Big(\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}+\frac{x}{L}\frac{\partial^2 v_1(z,t)}{\partial z^2}\Big)+\frac{\tau W}{L}u(z,t)\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}+$$
$$+\tau W^2\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}+\frac{\tau W}{L}\frac{\partial}{\partial z}\big(u(z,t)v_1(z,t)\big)+\frac{x}{L}\tau W^2\frac{\partial^2 v_1(z,t)}{\partial z^2}. \tag{2.10}$$

Приравнивая в (2.10) коэффициенты при x и свободные члены, получим

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+W\frac{\partial v_1}{\partial z}=\nu_*\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+W\frac{\partial v}{\partial z}=\nu_*\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\varphi(z,t), \tag{2.12}$$

где

$$\varphi(z,t)=2\frac{\tau W}{L}\frac{\partial}{\partial z}\big(u(z,t)v_1(z,t)\big)-\frac{u(z,t)v_1(z,t)}{L}. \tag{2.13}$$

3. Решение задачи Коши

Полученное в предыдущем пункте дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial z}=\nu_*\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{3.1}$$

дополним начальным условием

$$u\Big|_{t=0}=u_0(z), \qquad z\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Здесь $u_0(z)$ – непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функция. Решение задачи Коши (3.1) – (3.2) будем искать в виде

$$u=\Phi(\xi,t), \tag{3.3}$$

где

$$\xi=z-Wt. \tag{3.4}$$

Подставив (3.3) в (3.1), получим линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\nu_*\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}. \tag{3.5}$$

Из (3.2) – (3.4) следует, что

$$\Phi\Big|_{t=0}=u_0(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Решение задачи Коши (3.5) – (3.6) дается [14] формулой Пуассона

$$\Phi(\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_* t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(z_*)\exp\Bigl(-\frac{(\xi-z_*)^2}{4\nu_* t}\Bigr)dz_*,\quad t>0. \tag{3.7}$$

Используя (3.3), (3.4) и (3.7) находим решение

$$u=u(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_* t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(z_*)\exp\Bigl(-\frac{(z-Wt-z_*)^2}{4\nu_* t}\Bigr)dz_*,\quad t>0, \tag{3.8}$$

задачи Коши (3.1) – (3.2).

Аналогично, уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+W\frac{\partial v_1}{\partial z}=\nu_*\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}, \tag{3.9}$$

из предыдущего пункта дополним начальным условием

$$v_1\Big|_{t=0}=v_{10}(z),\qquad z\in\mathbb{R}, \tag{3.10}$$

где $v_{10}(z)$ – заданная функция класса $C^1(\mathbb{R})$. Решение задачи Коши (3.9) – (3.10) имеет вид

$$v_1=v_1(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_* t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v_{10}(z_*)\exp\Bigl(-\frac{(z-Wt-z_*)^2}{4\nu_* t}\Bigr)dz_*,\quad t>0, \tag{3.11}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t}+W\frac{\partial v}{\partial z}=\nu_*\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\varphi(z,t), \tag{3.12}$$

$$v\Big|_{t=0}=v_0(z),\qquad z\in\mathbb{R}, \tag{3.13}$$

где $v_0(z)$ – известная функция класса $C^1(\mathbb{R})$. Зная $u=u(z,t)$ и $v_1=v_1(z,t)$, найдем $\varphi=\varphi(z,t)$ по формуле (2.13). Решение задачи Коши (3.12) – (3.13) выглядит следующим образом:

$$v=v(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_* t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v_0(z_*)\exp\Bigl(-\frac{(z-Wt-z_*)^2}{4\nu_* t}\Bigr)dz_*+$$

$$+\int\limits_0^t dt_*\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(z_*+Wt_*,t_*)}{2\sqrt{\pi\nu_*(t-t_*)}}\exp\Bigl(-\frac{(z-Wt-z_*)^2}{4\nu_*(t-t_*)}\Bigr)dz_*,\quad t>0, \tag{3.14}$$

Оно строится по схеме, описанной выше, если принять во внимание решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности (см. [14], с. 264).

Положим

$$u_{x0} = u_0(z), \quad u_{y0} = v_0(z) + \frac{x}{L} v_{10}(z), \quad u_{z0} = W. \tag{3.15}$$

С помощью формул (2.1), (3.8), (3.11) и (3.14) строим решение задачи Коши (1.7) – (1.13), (1.18), (1.19) для квазигидродинамической системы. Соответствующее решение задачи Коши (1.14) – (1.17), (1.18), (1.19) для системы Навье–Стокса получается из (u_x, u_y, u_z, p) предельным переходом при $c_s \to +\infty$.

Заключение

Таким образом, подстановка Линя позволяет свести нелинейную квазигидродинамическую систему к совокупности дифференциальных уравнений в частных производных. Задачи Коши для этих уравнений могут быть решены аналитически. Это позволяет найти решение специально поставленной задачи Коши для квазигидродинамической системы. Построенное решение в пределе при $c_s \to +\infty$ стремится к соответствующему решению задачи Коши для системы Навье–Стокса.

Различные варианты квазигидродинамической системы использовались для построения разностных схем [15] – [20]. В недавно опубликованной статье [21] исследована проблема разрешимости основной начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы. Доказана теорема о существовании и единственности регулярного решения этой задачи на малом промежутке времени. Математический анализ различных вариантов квазигидродинамических систем проведен также в [22].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.

[8] Bogoyavlenskij O.I. New exact axisymmetric solutions to the Navier–Stokes equations // Zeitschrift Naturforschung A. 2020. Vol. 75, № 1. Pp. 29–42.

[9] Galkin V.A. On the structure of axisymmetric helical solutions to the incompressible Navier–Stokes system // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, № 5. Pp. 1004–1014.

[10] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[11] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[12] Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь: Тверской государственный университет, 2022. 196 с.

[13] Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.

[14] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[15] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. ID 066. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[16] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[17] Balashov V.A. Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow // Computers and Mathematics with Applications. 2021. Vol. 90. Pp. 112–124. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013

[18] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело» с учетом химических реакций. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. 20 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82

[19] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271, № 1. ID 108216. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216

[20] Кирюшина М.А. Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. 21 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-48

[21] Evseev F.A., Pyatkov S.G. Regular solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 281, № 6. Pp. 909–924. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07159-0

[22] Федченко А.С. Регуляризованные системы уравнений движения многокомпонентных сжимаемых газовых смесей и их разностные аппроксимации: дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва: Высшая школа экономики, 2024. 111 с.

Образец цитирования

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Построение решений задачи Коши для квазигидродинамической системы с помощью подстановки Линя // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. №4. С. 5–16. https://doi.org/10.26456/vtpmk723

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22, ТвГТУ.
E-mail: pontida@list.ru

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
профессор кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM USING LIN'S SUBSTITUTION

Grigoryeva V.V.*, Sheretov Yu.V.**
*Tver State Technical University, Tver
**Tver State University, Tver

Received 09.07.2024, revised 24.09.2024.

A new solution to the Cauchy problem for a nonstationary quasi-hydrodynamic system is constructed. It does not satisfy either the Navier–Stokes equations or the Euler equations. Using Lin's substitution, the quasi-hydrodynamic system was reduced to three partial differential equations. Three Cauchy problems were posed and solved for the indicated equations. These three solutions generate a new solution to the Cauchy problem for a quasi-hydrodynamic system. At $c_s \to +\infty$, where c_s is the sound velocity in the fluid, it turns into the solution of the Cauchy problem for the corresponding Navier–Stokes system.

Keywords: quasi-hydrodynamic system, Navier–Stokes system, Cauchy problem, Lin's substitution.

Citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V., "Construction of solutions to the Cauchy problem for Quasi-hydrodynamic system using Lin's substitution", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 4, 5–16 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk723

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, №1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D., "Exact solutions of the Navier-Stokes equations with linear dependence of the velocity components on two spatial variables", *Teoreticheskie osnovy khimicheskoj tekhnologii [Theoretical foundations of chemical technology]*, **43**:5 (2009), 547–566 (in Russian).

[8] Bogoyavlenskij O.I., "New exact axisymmetric solutions to the Navier–Stokes equations", *Zeitschrift Naturforschung A*, **75**:1 (2020), 29–42.

[9] Galkin V.A., "On the structure of axisymmetric helical solutions to the incompressible Navier–Stokes system", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **64**:5 (2024), 1004–1014.

[10] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[11] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[12] Sheretov Yu.V., *Dvukhskorostnaya negalileeva gidrodinamika [Two-speed non-Galilean hydrodynamics]*, Tverskoj gosudarstvennyj universitet, Tver, 2022 (in Russian), 196 pp.

[13] Sheretov Yu.V., *Kineticheski soglasovannye uravneniya gazovoj dinamiki [Kinetically consistent equations of gas dynamics]*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 129 pp.

[14] Vladimirov V.S., *Uravneniya Matematicheskoi Fiziki [Equations of Mathematical Physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (in Russian), 512 pp.

[15] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., "Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation", *Keldysh Institute preprints*, 2020, 066 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[16] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations", *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[17] Balashov V.A., "Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow", *Computers and Mathematics with Applications*, **90** (2021), 112–124, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013.

[18] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system taking into account chemical reactions*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82.

[19] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G., "Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM", *Computer Physics Communications*, **271**:1 (2022), 108216, https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216.

[20] Kiryushina M.A., *Numerical experiment in the problem of propagation of small perturbations in a round tube*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2024 (in Russian), 21 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2024-48.

[21] Evseev F.A., Pyatkov S.G., "Regular solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid", *Journal of Mathematical Sciences*, **281**:6 (2024), 909–924, https://doi.org/10.1007/s10958-024-07159-0.

[22] Fedchenko A.S., *Regulyarizovannye sistemy uravnenij dvizheniya mnogokomponentnykh szhimaemykh gazovykh smesej i ikh raznostnye approksimatsii*, dissertation of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Higher School of Economics, Moscow, 2024 (in Russian), 111 pp.

Author Info

1. **Grigoryeva Vera Vladimirovna**
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Tver State Technical University.

Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU.
E-mail: pontida@list.ru

2. **Sheretov Yurii Vladimirovich**
Professor of the Fundamental Mathematics and Digital Technologies Department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru