УДК 004.8

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НГУЕНА НА СЛУЧАЙ ВОЗМОЖНОСТНЫХ ВЕЛИЧИН С НЕОГРАНИЧЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ

Солдатенко И.С.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 19.08.2024, после переработки 12.12.2024.

В статье приведено обобщение теоремы Нгуена для идентификации α-уровневого множества функции от нечётких аргументов через функцию от их α-уровней на случай нечётких величин с неограниченными носителями. Результаты специфицированы для простейших арифметических операций, а также для взвешенных сумм нечётких величин. Для слабейшей треугольной нормы выписаны формулы для вычисления границ указанных уровневых множеств.

Ключевые слова: нечёткая величина, возможностная величина, α-уровневое множество, теорема Нгуена, теория возможностей, исчисление возможностей.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 4. С. 17–29.
https://doi.org/10.26456/vtpmk724

Введение

Нечёткие (возможностные) величины используются в различных областях искусственного интеллекта для моделирования неопределённости субъективного типа. В частности, они позволяют работать с человеческими суждениями (например, оценками экспертов), неопределённость которых носит не случайный, а нечёткий характер, т.е. они не имеют *«чётких границ»*. Используя вместо чётких констант нечёткие величины, мы погружаем ту или иную задачу в контекст возможностной неопределённости, что с одной стороны повышает выразительную силу наших моделей, но с другой стороны усложняет числовые расчёты.

Одним из основных методов для работы с неопределённостью возможностного типа является переход к так называемым α-уровневым множествам нечётких величин или функций от них. При этом если для отдельных нечётких величин это не составляет сложностей, то для функций от возможностных аргументов это может вызвать затруднения, так как сначала требуется идентифицировать функцию распределения результата вычисления нечёткой функции, а затем переходить к его уровневому множеству. Часто это получается сделать в явном виде, но иногда удобней вычислять границы без использования функции распределения возможностей результата, а лишь используя границы α-уровневых множеств операндов. В [1,2] сформулированы и доказаны условия, позволяющие вычислять α-уровневое множество функции от нечётких параметров с помощью функции от α-уровней самих параметров. В [3] данные результаты погружены в контекст теории возможностей. В вышеуказанных работах требовалось, чтобы нечёткие параметры имели ограниченные носители. В настоящей работе мы снимаем данное требование, обобщая тем самым указанные результаты на более широкий класс нечётких величин.

1. Необходимые понятия и обозначения

На основе работ [3–7] введём основные определения и понятия из математического аппарата теории возможностей, которые потребуются далее.

Пусть Γ – множество, называемое модельным пространством, $\gamma \in \Gamma$ – его элементы, а $\mathbb{P}(\Gamma)$ – множество всех подмножеств множества Γ.

Определение 1. *Возможностная мера* π *есть функция множества* $\pi : \mathbb{P}(\Gamma) \to [0,1]$*, которая обладает свойствами:*

1. $\pi\{\varnothing\} = 0$, $\pi\{\Gamma\} = 1$,
2. $\pi\left\{\bigcup_{i\in I} A_i\right\} = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},\ \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma),\ \forall I.$

Определение 2. *Тройка* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *называется возможностным пространством.*

Определение 3. *Возможностной (нечёткой) величиной* $X(\gamma)$ *называется вещественная функция*

$$X(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{R},$$

характеризующаяся функцией распределения возможностей

$$\mu_X(x) = \pi\big\{\gamma \in \Gamma : X(\gamma) = x\big\},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

где $\mu_X(x)$ *— возможность того, что* $X(\gamma)$ *принимает значение* x*.*

Определение 4. *Носителем нечёткой величины* $X(\gamma)$ *называется чёткое подмножество:*

$$supp(X) = \big\{x \mid \mu_X(x) > 0\big\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Определение 5. *Модальным значением нечёткой величины* $X(\gamma)$ *называется следующее чёткое подмножество:*

$$\big\{x \mid \mu_X(x) = 1\big\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Определение 6. *Для нечёткой величины* $X(\gamma)$ *и любого* $\alpha \in [0,1]$ α*-уровневым множеством величины* $X(\gamma)$ *называется чёткое множество, определяемое следующим образом:*

– $X_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) \geqslant \alpha\}$, *для* $\alpha \in (0,1]$,

– $X_\alpha = cl(supp(X))$, *для* $\alpha = 0$,

где $cl(supp(X))$ *— замыкание носителя нечёткой величины* $X(\gamma)$.

Из данного определения имеем следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть* $X(\gamma)$ *– нечёткая величина. Тогда для* $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ *выполняется*

$$X_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_2}.$$

Мы будем называть нечёткую величину, у которой модальное значение представлено интервалом, *унимодальной*, а если этот интервал вырождается в единственную точку, то *строго унимодальной*.

Определение 7. *Функция* μ_X *является полунепрерывной сверху, если* $\forall \alpha \in (0,1]$ *множество* X_α *является замкнутым.*

Определение 8. *Функция распределения* μ_X *нечёткой величины* $X(\gamma)$ *называется квазивогнутой, если*

$$\mu_X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\{\mu_X(x_1), \mu_X(x_2)\},\ \lambda \in [0,1],\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Определение 9. *Нечёткая величина* $X(\gamma)$ *с функцией распределения* μ_X *называется нечётким числом (отрезком), если выполняются следующие условия:*

1. μ_X *полунепрерывна сверху и квазивогнута,*

2. $X(\gamma)$ *является строго (нестрого) унимодальной,*

3. $\forall \alpha \in (0,1]$ *множество* X_α *ограничено, т.е. с учетом свойства 1 – отрезок.*

Для моделирования нечётких чисел часто используются параметризованные семейства распределений. Приведём два наиболее популярных из них: триангулярное и нормальное. Первое определяет класс величин с ограниченными носителями, а второе, соответственно, с неограниченным.

Определение 10. *Нечёткая величина* $X(\gamma)$ *называется триангулярной, если её функция распределения имеет вид:*

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leqslant x \leqslant c, \\ 0, & \text{если } x > c, \end{cases}$$

для некоторых $a, b, c \in \mathbb{R}$, *таких что* $a < b < c$. *Здесь* b *– модальное значение,* (a, c) *– носитель нечёткой величины* $X(\gamma)$.

Определение 11. *Нечёткая величина $X(\gamma)$ называется нормальной, если её функция распределения имеет вид:*

$$\mu_X(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{d^2}},$$

для некоторых $m, d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Здесь m – модальное значение, d – коэффициент нечёткости.

Следует отметить, что, несмотря на неограниченность носителя, нормальное распределение часто используется в практических задачах.

В дальнейшем нам также понадобится понятие треугольной нормы, использующейся для агрегирования возможностной информации в операциях над нечёткими величинами.

Определение 12. *Отображение $\top : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ именуется треугольной нормой (или t-нормой), если для любого $x \in [0,1]$ выполняются следующие свойства:*

1) *ограниченность: $\top(1,x) = x$,*
2) *симметричность: $\top(x,y) = \top(y,x)$,*
3) *ассоциативность: $\top(x,\top(y,z)) = \top(\top(x,y),z)$,*
4) *монотонность: $\top(w,y) \leqslant \top(x,z)$, если $w \leqslant x, y \leqslant z$.*

Пример 1. Примерами хорошо известных t-норм являются:

1. слабейшая t-норма $\top_W(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \text{если } \max\{x,y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$
2. сильнейшая t-норма $\top_M(x,y) = \min\{x,y\}$.

Треугольные нормы $\top_W$ и $\top_M$ являются экстремальными, так как $\forall \top$ и $\forall x, y \in [0,1]$:

$$\top_W(x,y) \leqslant \top(x,y) \leqslant \top_M(x,y). \tag{1}$$

Теперь мы можем, следуя [6], ввести понятия взаимной $\top$-связанности возможностных величин.

Определение 13. *Пусть даны возможностное пространство $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ и t-норма $\top$. Множества $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}(\Gamma)$ называются взаимно $\top$-связанными, если для $\forall\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:*

$$\pi\big\{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big\} = \top\Big(\pi\{A_{i_1}\}, \ldots, \pi\{A_{i_k}\}\Big).$$

Пусть теперь $X_1(\gamma), \ldots, X_n(\gamma)$ — возможностные величины, заданные на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$.

Определение 14. *Возможностные величины $X_1(\gamma), \ldots, X_n(\gamma)$ называются взаимно $\top$-связанными, если $\forall\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$*

$$\mu_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi\big\{\gamma \in \Gamma \mid X_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\big\} =$$
$$\pi\big\{X_{i_1}^{-1}(x_{i_1}) \cap \ldots \cap X_{i_k}^{-1}(x_{i_k})\big\} = \top\big(\pi\{X_{i_1}^{-1}(x_{i_1})\}, \ldots, \pi\{X_{i_k}^{-1}(x_{i_k})\}\big) =$$
$$\top\big(\mu_{X_{i_1}}(x_{i_1}), \ldots, \mu_{X_{i_k}}(x_{i_k})\big), x_{i_j} \in \mathbb{R}.$$

Определение 14 важно тем, что позволяет при помощи треугольных норм конструировать функции совместного распределения возможностных величин, использующиеся при идентификации распределения возможностей функций от данных нечётких аргументов.

2. Обобщение теоремы Нгуена

В работах [1, 2] были доказаны условия, позволяющие переходить от α-уровневого множества функции от нечётких параметров к функции от α-уровневых множеств самих параметров. В [3] указанные результаты были изложены с помощью математического аппарата теории возможностей. Напомним их, а затем обобщим на класс нечётких чисел, определённых в предыдущем разделе.

Предложение 1 (см. [1–3]). *Пусть $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ – возможностные величины с функциями распределения возможностей μ_A и μ_B, соответственно; $\top$ – произвольная треугольная норма; а $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция от двух аргументов. Тогда необходимым и достаточным условием выполнения равенства*

$$[f(A,B)]_\alpha = \bigcup_{\xi,\eta\colon \top(\xi,\eta)\geqslant\alpha} f(A_\xi, B_\eta),\ \alpha \in (0,1] \tag{2}$$

является то, что $\forall z \in \mathbb{R} \sup\limits_{(x,y)\colon f(x,y)=z} \top(\mu_A(x), \mu_B(y))$ *достигается.*

Следующее утверждение специфицирует класс возможностных величин, для которых выполняется Предложение 1.

Предложение 2 (см. [1–3]). *Если функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывна, треугольная норма $\top$ – полунепрерывна сверху, то равенство* (2) *выполняется для любых возможностных величин $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$, обладающих полунепрерывными сверху функциями распределения возможностей и компактными носителями.*

Компактность носителей исключает из рассмотрения класс нормальных нечётких величин, которые часто используются на практике. Докажем теорему, обобщающую Предложение 2 на класс нечётких чисел (отрезков), заданных в соответствии с Определением 9. Для начала докажем вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $\top$ – произвольная t-норма, $\alpha \in (0,1]$. Тогда $\forall \xi, \eta \in (0,1]$ выполняется*

$$\top(\xi,\eta) \geqslant \alpha \Rightarrow \begin{cases} \xi \geqslant \alpha, \\ \eta \geqslant \alpha. \end{cases}$$

Доказательство. В соответствии с формулой (1) имеем:

$$\alpha \leqslant \top(\xi,\eta) \leqslant \top_M(\xi,\eta) = \min\{\xi,\eta\}.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ – возможностные величины, $\top$ – произвольная t-норма, $\alpha \in (0,1]$. Тогда*

$$\bigcup_{\xi,\eta\colon \top(\xi,\eta)\geqslant\alpha} A_\xi \times B_\eta \subseteq A_\alpha \times B_\alpha. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно Лемме 1 все значения ξ и η, удовлетворяющие условию $\top(\xi, \eta) \geqslant \alpha$, будут не меньше α. Но по Следствию 1 имеем, что $A_{\xi'} \subseteq A_\alpha$, $B_{\eta'} \subseteq B_\alpha$, $\forall \xi', \eta' \geqslant \alpha$. В результате получаем, что каждый элемент объединения содержится в $A_\alpha \times B_\alpha$, а значит и их объединение тоже. Что и требовалось доказать. □

Следствие 2. *Если в Лемме 2 взять сильнейшую t-норму $\top_M$, то* (3) *преобразуется в равенство.*

Доказательство. Для $\top_M$ можно взять в качестве ξ и η значение α. Все прочие значения ξ' и η', удовлетворяющие условию $\top(\xi', \eta') \geqslant \alpha$, будут не меньше α. Но по Следствию 1 все соответствующие α-уровневые множества будут подмножествами A_α и B_α. В результате имеем, что построенный элемент объединения $A_\alpha \times B_\alpha$ с одной стороны уже равен правой части (3), а с другой – содержит в себе все остальные элементы объединения в левой части (3). □

Теперь докажем основной результат, отличием которого от Предложения 1 будет то, что мы не будем требовать компактности носителей возможностных операндов функции.

Теорема 1. *Если функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывна, треугольная норма $\top$ – полунепрерывна сверху, то равенство* (2) *выполняется для любых нечётких чисел (отрезков) $X(\gamma)$ и $Y(\gamma)$.*

Доказательство. Благодаря Утверждению 1 нам нужно лишь доказать, что при сделанных предположениях

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \sup_{(x,y)\colon f(x,y)=z} \top(\mu_X(x), \mu_Y(y))$$

достигается.

Пусть величина $z \in \mathbb{R}$. Найдем её возможность по определению:

$$\mu_{f(X,Y)}(z) = \sup_{(x,y)\colon f(x,y)=z} \top(\mu_X(x), \mu_Y(y)) = t.$$

Если $t = 0$, то $\mu_X(x)$ и/или $\mu_Y(y)$ равны нулю $\forall (x, y) \in f^{-1}(z)$. В этом случае точная верхняя грань достигается тривиальным образом.

Пусть теперь $t \neq 0$. Обозначим $\varphi(x, y) = \top(\mu_X(x), \mu_Y(y))$ и рассмотрим

$$\sup_{\substack{(x,y) \in f^{-1}(z),\\ (x,y) \in X_t \times Y_t}} \varphi(x, y) = t'. \tag{4}$$

Так как функция f непрерывна, то $f^{-1}(z)$ замкнуто, а X_t и Y_t согласно Определению 9 – компакты. Следовательно $f^{-1}(z) \cap (X_t \times Y_t)$ есть компакт. С другой стороны, функции $\top$, μ_X и μ_Y – полунепрерывные сверху, $\top$ – монотонно не возрастает, а значит и φ тоже полунепрерывна сверху. В результате по теореме Вейерштрасса получаем, что супремум t' в (4) достигается.

Теперь осталось показать, что $t = t'$. Предположим, что это не так.

Случай 1. Пусть $t' > t$. Но этого не может быть, так как t – это супремум по $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset X_t \times Y_t$.

Случай 2. Предположим теперь, что $t' < t$. Так как по Лемме 2

$$X_t \times Y_t \supseteq \bigcup_{\xi,\eta:\, T(\xi,\eta)\geqslant t} X_\xi \times Y_\eta,$$

то это означает, что $\forall \xi,\eta$: $\top(\xi,\eta) \geqslant t$ и $(X_\xi \times Y_\eta) \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$ для всех $(x', y') \in (X_\xi \times Y_\eta) \cap f^{-1}(z)$ выполняется $\varphi(x', y') < t$. Получаем, что $\varphi(x', y') = \top(\xi', \eta') < \top(\xi, \eta)$ при $\xi' \geqslant \xi$ и $\eta' \geqslant \eta$, что противоречит свойству монотонности треугольной нормы.

В результате имеем, что $t = t'$ и, соответственно, супремум t достигается. Что и требовалось доказать. $\square$

Приведем примеры отношения (2) для экстремальных треугольных норм.

Пример 2. Если $\top = \top_M$, то (2) сводится к хорошо известному результату Нгуена [1] для $f(x, y) = x + y$:

$$[f(X, Y)]_\alpha = f(X_\alpha, Y_\alpha), \forall \alpha \in (0, 1].$$

В нашем случае данное отношение автоматически получается из Следствия 2.

Пример 3. Если $\top = \top_W$, то (2) преобразуется в:

$$[f(X, Y)]_\alpha = f(X_1, Y_\alpha) \cup f(X_\alpha, Y_1), \forall \alpha \in (0, 1]. \tag{5}$$

Этот результат можно легко получить из (2), заметив, что $\top_W$ будет отлична от нуля, только если хотя бы один из её аргументов равен единице, то есть x или y должны быть равны модальным значениям соответствующих нечётких аргументов.

3. Спецификация результатов для экстремальных треугольных норм

Специфицируем полученные в предыдущем разделе результаты для основных арифметических операций, для взвешенных сумм и монотонно неубывающих по своим аргументам функций при использовании экстремальных треугольных норм.

Для сильнейшей треугольной нормы они хорошо известны [2, 3, 7, 8] и сводятся к стандартной интервальной арифметике.

Предложение 3. *Если $X(\gamma)$ и $Y(\gamma)$ – нечёткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется сильнейшая треугольная норма $\top_M$, то α-уровневые множества для основных арифметических операций вычисляются следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&[X + Y]_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha = [X_\alpha^-, X_\alpha^+] + [Y_\alpha^-, Y_\alpha^+] = [X_\alpha^- + Y_\alpha^-, X_\alpha^+ + Y_\alpha^+],\\
&[X - Y]_\alpha = X_\alpha + (-1) \cdot Y_\alpha = [X_\alpha^- - Y_\alpha^+, X_\alpha^+ - Y_\alpha^-],\\
&[X \times Y]_\alpha = X_\alpha \cdot Y_\alpha = [\min\{X_\alpha^\pm \cdot Y_\alpha^\pm\}, \max\{X_\alpha^\pm \cdot Y_\alpha^\pm\}],
\end{aligned}$$

где $X_\alpha^\pm \cdot Y_\alpha^\pm = \{X_\alpha^- \cdot Y_\alpha^-, X_\alpha^- \cdot Y_\alpha^+, X_\alpha^+ \cdot Y_\alpha^-, X_\alpha^+ \cdot Y_\alpha^+\}$.

Тривиальным образом доказывается следующий результат.

Лемма 3. *Пусть $X_1(\gamma), X_2(\gamma), \ldots, X_n(\gamma)$ – нечёткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется сильнейшая треугольная норма $\top_M$. Тогда*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(\gamma)\right]_\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n}[X_i(\gamma)]_\alpha^-, \sum_{i=1}^{n}[X_i(\gamma)]_\alpha^+\right]. \tag{6}$$

Имеем следствие из Теоремы 1.

Следствие 3. *Если в условиях Теоремы 1 функция f будет монотонно неубывающей по нечётким аргументам, то для сильнейшей t-нормы $\top_M$ левую и правую границы α-уровневого множества f_α можно найти по следующим правилам [9, 10]:*

$$f_\alpha^- = f(X_\alpha^-, Y_\alpha^-), \quad f_\alpha^+ = f(X_\alpha^+, Y_\alpha^+).$$

Теперь перейдём к рассмотрению слабейшей треугольной нормы. Докажем две полезные в дальнейшем леммы.

Лемма 4. *Множество, задаваемое отношением* (5), *есть отрезок*

$$\big[\min\{f(X_1, Y_\alpha)^-, f(X_\alpha, Y_1)^-\}, \max\{f(X_1, Y_\alpha)^+, f(X_\alpha, Y_1)^+\}\big],$$

где $f(\cdot,\cdot)^-$, $f(\cdot,\cdot)^+$ – это левая и правая границы отрезков значений, задаваемых соответствующими функциями.

Доказательство. Так как X_1, Y_1, X_α, Y_α – связные компакты, а функция f является непрерывной, то $f(X_1, Y_\alpha)$ и $f(X_\alpha, Y_1)$ тоже являются связными компактами, то есть в нашем случае – отрезками.

С другой стороны, очевидно, что модальные значения принадлежат α-уровневым множествам $\forall\alpha$, поэтому:

$$X_1 \subseteq X_\alpha \Rightarrow f(X_1, Y_1) \subseteq f(X_\alpha, Y_1), \quad Y_1 \subseteq Y_\alpha \Rightarrow f(X_1, Y_1) \subseteq f(X_1, Y_\alpha).$$

Таким образом, отрезки $f(X_1, Y_\alpha)$ и $f(X_\alpha, Y_1)$ имеют область пересечения $f(X_1, Y_1)$. А так как объединение пересекающихся отрезков есть отрезок, то следовательно $f(X_1, Y_\alpha) \cup f(X_\alpha, Y_1)$, $\forall\alpha \in (0, 1]$ – тоже отрезок.

Утверждение о том, что левая и правая границы объединения будут, соответственно, минимумом левых и максимумом правых границ исходных отрезков, является тривиальным. Что и требовалось доказать. □

Следующая лемма является хорошо известным в теории нечётких множеств результатом. Здесь её доказательство излагается в контексте теории возможностей.

Лемма 5. *Пусть $\top$ – произвольная t-норма, $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ – взаимно $\top$-связанные возможностные величины с полунепрерывными сверху функциями распределения $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ и непустыми модальными значениями. Тогда:*

$$(A + B)_1 = A_1 + B_1.$$

Доказательство.

$$(A+B)_1 = \{x : \mu_{A+B}(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x : \sup_{a,b:\, a+b=x} \top\big(\mu_A(a), \mu_B(b)\big) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Из свойства ограниченности треугольной нормы следует, что $\forall \top$:

$$\top(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Следовательно, получаем:

$$(A+B)_1 = \left\{ \bigcup_{\forall a,b \in \mathbb{R}:\, a+b=x} x : \mu_A(a) = 1 \wedge \mu_B(b) = 1 \right\} = \left\{ \bigcup_{\forall a,b \in \mathbb{R}:\, a+b=x} x : a \in A_1 \wedge b \in B_1 \right\} = A_1 + B_1.$$

□

Специфицируем теперь результаты Леммы 4 для некоторых арифметических операций.

Следствие 4. *Если $X(\gamma)$ и $Y(\gamma)$ – нечёткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется слабейшая треугольная норма $\top_W$, то α-уровневые множества для арифметических операций вычисляются следующим образом:*

$$\begin{aligned}
[X+Y]_\alpha &= (X_1 + Y_\alpha) \cup (X_\alpha + Y_1) \\
&= [\min\{X_1^- + Y_\alpha^-, X_\alpha^- + Y_1^-\}, \max\{X_1^+ + Y_\alpha^+, X_\alpha^+ + Y_1^+\}], \\
[X-Y]_\alpha &= (X_1 + (-1)\cdot Y_\alpha) \cup (X_\alpha + (-1)\cdot Y_1) \\
&= [\min\{X_1^- - Y_\alpha^+, X_\alpha^- - Y_1^+\}, \max\{X_1^+ - Y_\alpha^-, X_\alpha^+ - Y_1^-\}], \\
[X\times Y]_\alpha &= (X_1 \cdot Y_\alpha) \cup (X_\alpha \cdot Y_1) \\
&= [\min\{X_1^\pm \cdot Y_\alpha^\pm, X_\alpha^\pm \cdot Y_1^\pm\}, \max\{X_1^\pm \cdot Y_\alpha^\pm, X_\alpha^\pm \cdot Y_1^\pm\}],
\end{aligned}$$

где $X_*^\pm \cdot Y_*^\pm = \{X_*^- \cdot Y_*^-, X_*^- \cdot Y_*^+, X_*^+ \cdot Y_*^-, X_*^+ \cdot Y_*^+\}$.

Легко индукцией доказывается следующий результат.

Следствие 5. *Пусть $X_1(\gamma), X_2(\gamma), \ldots, X_n(\gamma)$ – нечёткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется сильнейшая треугольная норма $\top_W$. Тогда*

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^n X_i(\gamma)\right]_\alpha^- &= \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ [X_i(\gamma)]_\alpha^- + \sum_{\substack{j=\overline{1,n},\\ j\neq i}} [X_j(\gamma)]_1^- \right\}, \\
\left[\sum_{i=1}^n X_i(\gamma)\right]_\alpha^+ &= \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ [X_i(\gamma)]_\alpha^+ + \sum_{\substack{j=\overline{1,n},\\ j\neq i}} [X_j(\gamma)]_1^+ \right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Докажем индукцией по n для левой границы. Для правой доказательство будет аналогичным.

Базис. Для $n = 2$ формулы (7) сводятся к формулам границ α-уровня сложения из Следствия 4.

Индукционный шаг. Пусть для $n-1$ утверждение доказано. С помощью Леммы 5 и Следствия 4 получаем:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(\gamma)\right]_\alpha^- = \left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i(\gamma) + X_n(\gamma)\right]_\alpha^- =$$

$$\min\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i(\gamma)\right]_1^- + [X_n(\gamma)]_\alpha^-, \left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i(\gamma)\right]_\alpha^- + [X_n(\gamma)]_1^-\right\} =$$

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n-1}[X_i(\gamma)]_1^- + [X_n(\gamma)]_\alpha^-, \min_{i=\overline{1,n-1}}\left\{[X_i(\gamma)]_\alpha^- + \sum_{\substack{j=\overline{1,n},\\ j\neq i}}[X_j(\gamma)]_1^-\right\}\right\} =$$

$$\min_{i=\overline{1,n}}\left\{[X_i(\gamma)]_\alpha^- + \sum_{\substack{j=\overline{1,n},\\ j\neq i}}[X_j(\gamma)]_1^-\right\}.$$

□

Для слабейшей треугольной нормы также имеем следствие из Теоремы 1.

Следствие 6. *Если в условиях Теоремы 1 функция f будет монотонно неубывающей по нечётким аргументам, то для слабейшей t-нормы $\top_W$ левую и правую границы α-уровневого множества f_α можно найти по следующим правилам:*

$$f_\alpha^- = \min\left\{f(X_1^-, Y_\alpha^-), f(X_\alpha^-, Y_1^-)\right\}, \quad f_\alpha^+ = \max\left\{f(X_1^+, Y_\alpha^+), f(X_\alpha^+, Y_1^+)\right\}.$$

Заключение

В статье приводится обобщение теоремы Нгуена для идентификации α-уровневого множества функции от нечётких аргументов с помощью функции от α-уровней самих аргументов на случай нечётких величин с неограниченным носителем. Данные результаты позволяют расширить класс допустимых распределений возможности и использовать, в частности, нормальные нечёткие параметры. Результаты специфицированы для простейших арифметических операций, для взвешенных сумм, а также для монотонно неубывающих по своим аргументам функций от нечётких величин. Для слабейшей треугольной нормы выписаны формулы для вычисления границ соответствующих уровневых множеств.

Список литературы

[1] Nguen H.T. A note on the extension principle for fuzzy sets // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1978. Vol. 64. Pp. 369–380.

[2] Fullér R., Keresztfalvi T. On generalization of Nguyen's theorem // Fuzzy Sets and Systems. 1991. Vol. 41. Pp. 371–374.

[3] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. Математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. М.: Физматлит, 2016. 144 с.

[4] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110. https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8

[5] Nguyen H.T., Walker C.L., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. 4th ed.. Boca Raton: CRC Press, 2018. https://doi.org/10.1201/9780429505546

[6] Hong D.H. Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5

[7] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.

[8] Fullér R., Keresztfalvi T. t-Norm-based addition of fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. 1992. Vol. 51. Pp. 155–159.

[9] Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computation. Academic Press, 2012.

[10] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach. Cotbus, Germany: Brandenburgische Technische Universitat, 1996. 133 p.

Образец цитирования

Солдатенко И.С. Обобщение теоремы Нгуена на случай возможностных величин с неограниченным носителем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 4. С. 17–29. https://doi.org/10.26456/vtpmk724

Сведения об авторах

1. **Солдатенко Илья Сергеевич**
доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

ON GENERALIZATION OF NGUYEN'S THEOREM FOR FUZZY NUMBERS WITH UNBOUNDED SUPPORT

Soldatenko I.S.
Tver State University, Tver

Received 19.08.2024, revised 12.12.2024.

The article provides a generalization of Nguyen's theorem for identification of α-level set of a function from fuzzy arguments through a function from their α-levels in the case when fuzzy quantities have unbounded support. The results are specified for the simplest arithmetic operations, as well as for weighted sums of fuzzy quantities. For the weakest triangular norm, formulas are written for calculating the boundaries of these level sets.

Keywords: fuzzy values, possibilistic values, α-level set, Nguyen's theorem, theory of possibilities, calculus of possibilities.

Citation

Soldatenko I.S., "On generalization of Nguyen's theorem for fuzzy numbers with unbounded support", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 4, 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk724

References

[1] Nguen H.T., "A note on the extension principle for fuzzy sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **64** (1978), 369–380.

[2] Fullér R., Keresztfalvi T., "On generalization of Nguyen's theorem", *Fuzzy Sets and Systems*, **41** (1991), 371–374.

[3] Yazenin A.V., *Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostej. Matematicheskij apparat dlya prinyatiya reshenij v usloviyakh gibridnoj neopredelennosti [Basic concepts of the theory of possibilities. Mathematical decision-making apparatus in a hybrid uncertainty]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2016 (in Russian), 144 pp.

[4] Nahmias S., "Fuzzy variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **1**:2 (1978), 97–110, https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8.

[5] Nguyen H.T., Walker C.L., Walker E.A., *A First Course in Fuzzy Logic*, 4th ed., CRC Press, Boca Raton, 2018, https://doi.org/10.1201/9780429505546.

[6] Hong D.H., "Parameter estimations of mutually t-related fuzzy variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **123**:1 (2001), 63–71, https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00113-5.

[7] Dubois D., Prade H., *Theorie des Possibilites, Application a la Representation des Connaissances en Informatique*, Masson, Paris, 1988.

[8] Fullér R., Keresztfalvi T., "t-Norm-based addition of fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, **51** (1992), 155–159.

[9] Alefeld G., Herzberger J., *Introduction to Interval Computation*, Academic Press, 2012.

[10] Yazenin A., Wagenknecht M., *Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach*, Brandenburgische Technische Universitat, Cotbus, Germany, 1996, 133 pp.

Author Info

1. **Soldatenko Ilia Sergeyevich**
Associate Professor at Information Technologies Department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU. E-mail: soldis@tversu.ru