

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.65 + 512.567.7 + 512.573

О ТЕОРИЯХ АЛГЕБР ПОДМНОЖЕСТВ И РЕШЁТОК ПОДПРОСТРАНСТВ В КОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дудаков С.М.

Тверской государственный университет, г. Тверь
Университет HSE, г. Москва

Поступила в редакцию 02.02.2025, после переработки 25.02.2025.

В наших предыдущих работах мы видели, что теории фигур и подпространств для бесконечных линейных пространств имеют высокую степень неразрешимости: они допускают интерпретацию элементарной арифметики, а в случае бесконечных фигур — даже арифметики второго порядка. В случае конечных линейных пространств эти утверждения конечно же неверны, так как мы можем построить алгоритм, перебирающий все конечные линейные пространства и выдающий все формулы, модель которых нашлась. Следовательно, для конечных линейных пространств теории фигур и подпространств принадлежат классу Π_1 — дополнений рекурсивно перечислимых множеств. В настоящей работе мы показываем, что эти теории являются полными задачами для класса Π_1 , то есть по-прежнему неразрешимы и не рекурсивно аксиоматизируемы.

Ключевые слова: конечная алгебра, линейное пространство, алгебра подмножеств, подпространство, решётка подалгебр, алгоритмическая неразрешимость, полнота.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 5–13.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk728>

Введение

Изучение алгоритмических свойств различных теорий является одной из классических задач математической логики. На этом пути проделана большая работа: изучены теории разных классов алгебр и, более общо, алгебраических систем. Например, разрешимыми являются теории классов булевых алгебр или абелевых групп, а алгоритмически неразрешимыми — произвольных групп или графов (см. [8]).

© Дудаков С.М., 2025

Отдельной задачей является исследование разрешимости для конечных структур. Особенно актуальной такая задача стала в связи с развитием вычислительной техники, где эти структуры используются как типы данных в языках описания данных и программирования (см., например, [12]). Часто оказывается, что для конечных структур оценки оказываются иными, чем для произвольных. Общеизвестный пример — теоремы А. Чёрча и Б. А. Трахтенброта: множество формул истинных на всех системах является Σ_1 -полным, в то время как множество формул истинных на всех конечных системах — Π_1 -полно. Эти результаты верны уже для теорий одного бинарного предиката, то есть графов (см. [8]).

По каждой алгебре можно построить алгебру её всех (или некоторых) подмножеств (см. [11]), а также — решётку подалгебр (см. [4]). Ранее мы в своих работах исследовали алгоритмические свойства алгебр всех или некоторых подмножеств, классов таких алгебр и соответствующих решёток подалгебр. В ряде случаев оказывалось, что все эти теории позволяют интерпретировать арифметику первого (см. [6], [2]), а иногда — и второго (см. [5], [1]) порядка. Но такие оценки могут быть справедливы для классов, содержащих бесконечные алгебры. Если же ограничиться рассмотрением только конечных систем, то обычно сразу возникает возможность алгоритмически перебирать такие алгебры и выполнять проверку формул для каждой из них, что приводит к рекурсивной перечислимости выполнимых формул. Таким образом, для «естественных» классов конечных систем их теории не позволяют «подняться» до уровня элементарной арифметики [3].

В настоящей работе мы исследуем один из простых, но тем не менее один из самых важных классов алгебр — конечные линейные пространства над полями конечной характеристики — и изучаем алгебры их подмножеств и решётки их подпространств (см. [4]). Частный и очень широко встречающийся на практике пример — это битовые строки с операцией побитового сложения по модулю два. Для класса L таких пространств мы показываем, что класс их (необходимо конечных) подмножеств $\text{exr } L$ имеет неразрешимую, точнее Π_1 -полную, теорию, равно как и теория решёток их подпространств $\text{lat } L$.

1. Определения

Мы рассматриваем классы, которые состоят только из конечных алгебр. Далее это подразумевается везде, где явно не указано иное. Как обычно, с помощью $\text{Th}(\mathfrak{A})$ мы обозначаем теорию алгебры $\mathfrak{A}$, то есть множество всех истинных в $\mathfrak{A}$ замкнутых формул. Если K — класс алгебр, то с помощью $\text{Th}(K)$ обозначается теория этого класса, то есть пересечение всех $\text{Th}(\mathfrak{A})$ для $\mathfrak{A} \in K$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная конечная алгебра. Тогда с помощью $\text{exr } \mathfrak{A}$ мы обозначаем алгебру всех её непустых подмножеств, с естественными операциями:

$$f(X_1, \dots, X_N) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

для всех сигнатурных функций f и всевозможных непустых $X_1, \dots, X_n \subseteq \mathfrak{A}$, необходимо конечных.

С помощью $\text{lat } \mathfrak{A}$ обозначаем решётку всех её подалгебр (дополненную при необходимости пустой алгеброй) с отношением «быть подалгеброй» в качестве

порядка. Тогда операциями являются $\inf\{X, Y\} = X \cap Y$ и $\sup\{X, Y\} = \langle X, Y \rangle$ — подалгебра, совместно порождённая всеми элементами X и Y .

Если K — произвольный класс алгебр, то с помощью $\exp K$ и $\text{lat } K$ мы будем обозначать класс всех алгебр вида $\exp \mathfrak{A}$ и всех решёток вида $\text{lat } \mathfrak{A}$ соответственно при $\mathfrak{A} \in K$.

Сразу отметим, что алгебры $\exp \mathfrak{A}$ и $\text{lat } \mathfrak{A}$ совершенно различны и даже имеют разную сигнатуру в общем случае. Если сигнатура алгебры $\mathfrak{A}$ состоит из одной бинарной операции, например, $*$, алгебры $\text{lat } \mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ могут быть связаны монотонным вложением:

$$h : \text{lat } \mathfrak{A} \rightarrow \exp \mathfrak{A}, \text{ для которого } h(X) = X. \quad (1)$$

В этом случае $X * Y \subseteq \langle X, Y \rangle$.

В остальном сами эти алгебры могут иметь различные свойства. Например, для аддитивной группы целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$ теория её алгебры подмножеств $\exp(\mathbb{Z}, +)$ алгоритмически эквивалентна арифметике первого (если ограничиться только конечными множествами) или второго (в общем случае) порядка (см. [5]). Решётка же подалгебр $\text{lat}(\mathbb{Z}, +)$ изоморфна решётке делимости натуральных чисел, так как подалгебрами являются $(n\mathbb{Z}, +)$ для натуральных n , а операции $\inf$ и $\sup$ сводятся к нахождению наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя соответственно. Последняя структура имеет разрешимую теорию, так как её можно интерпретировать в мультипликативной арифметике натуральных чисел $(\omega, \cdot)$ — арифметике Скулема, — которая разрешима (см. [8]).

В некоторых случаях вложение (1) оказывается изоморфным, например, для абелевых групп, для которых выполнено $\langle X, Y \rangle = X + Y$ (для аддитивной записи), в частности, это верно для линейных пространств. Тогда связь между $\text{lat } \mathfrak{A}$ и $\exp \mathfrak{A}$ может оказаться более тесной. Например, для бесконечных линейных пространств над полями конечной характеристики теории обеих этих алгебр позволяют интерпретировать элементарную арифметику (см. [2]).

Мы будем рассматривать алгебры $\mathfrak{L}$, которые являются конечными линейными пространствами, и класс, состоящий из всех них — L . Сразу укажем, что в этом случае теории классов $\exp L$ и $\text{lat } L$ принадлежат классу Π_1 множеств, дополнения которых являются рекурсивно перечислимыми. В самом деле, формулы, которые не принадлежат этим теориям, можно алгоритмически перечислить следующим образом. Перебираем все конечные линейные пространства $\mathfrak{L}$, для каждого из них строим (тоже конечную) алгебру подмножеств $\exp \mathfrak{L}$ или, соответственно, решётку подпространств $\text{lat } \mathfrak{L}$. Если в $\exp \mathfrak{L}$ или, соответственно, в $\text{lat } \mathfrak{L}$ какая-то формула ϕ оказалась ложной, то выдаём её.

Нашей основной целью будет доказательство того, что обе теории $\exp L$ и $\text{lat } L$ являются Π_1 -полными множествами. В частности, они алгоритмически неразрешимы и рекурсивно неаксиоматизируемы.

2. Основной результат

Прежде всего отметим несложную вещь.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольное линейное пространство над простым конечным полем. Тогда в теории $\exp \mathfrak{L}$ интерпретируется теория $\text{lat } \mathfrak{L}$.

Доказательство. В самом деле, класс подпространств выделяется в $\text{exr } \mathfrak{L}$ с помощью равенства $X + X = X$. Отношение $X \subseteq Y$ интерпретируется формулой $X + Y = Y$, а с помощью него определяются точная нижняя и точная верхняя грани (см. [7]). $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathbf{L}$ — класс, состоящий из линейных пространств над простыми конечными полями. Тогда в теории $\text{exr } \mathbf{L}$ интерпретируется теория $\text{lat } \mathbf{L}$.

Таким образом, чтобы доказать Π_1 -полноту теории $\text{Th}(\text{exr } \mathbf{L})$, нам будет достаточно доказать Π_1 -полноту теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$. Для этого мы сведём проблему разрешимости алгебраического диофантова уравнения в натуральных числах к дополнению теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$. Напомним, что проблема решения в натуральных числах алгебраического диофантова уравнения полна в классе рекурсивно перечислимых множеств, как было доказано Ю.В. Матиясевичем (см. [9]).

Для того, чтобы построить сведение, мы напомним некоторые конструкции, введённые в [2].

Теорема (см. [2]). Пусть $\mathbf{L}$ — класс, состоящий из линейных пространств над простыми конечными полями. Тогда в теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$:

1. существует формула $\text{iso}(X, Y)$, означающая, что ненулевые подпространства X и Y не пересекаются и между ними существует изоморфизм;
2. существует формула $\text{eqdim}(X, Y)$, означающая, что размерности ненулевых подпространств X и Y равны;
3. существует формула $\text{sum}(X, Y, Z)$, означающая, что размерность подпространства X равна сумме размерностей ненулевых подпространств Y и Z ;
4. существует формула $\text{square}(X, Y)$, означающая, что размерность подпространства X равна квадрату размерности ненулевого подпространства Y .

Доказательство приведено в работе [2] — леммы 8, 10, 15 и теорема 1 — для случая, когда рассматриваются бесконечные линейные пространства над простыми конечными полями. Следует напомнить, что возможность выразить сложение и возведение в квадрат позволяет выразить умножение с помощью некоторой формулы $\text{mult}(x, y, z): x = yz$ тогда и только тогда, когда $(y + z)^2 = y^2 + x + x + z^2$ (см. [3]).

Однако заметим, что в работе [2] в доказательстве перечисленных утверждений нигде не используется факт бесконечности пространства. Единственное ограничение, которое требуется, — это чтобы размерность всего пространства была бы как минимум в два раза больше, чем размерность рассматриваемых подпространств. Это требуется для того, чтобы любой морфизм можно было представить как композицию двух морфизмов между непересекающимися подпространствами.

Теорема 1. Теория класса $\text{lat } \mathbf{L}$ решёток конечных линейных подпространств является Π_1 -полным множеством.

Доказательство. Принадлежность задачи классу Π_1 мы уже обосновали в параграфе 1. Поэтому нашей задачей будет доказать Π_1 -трудность.

Для этого мы сведём задачу о разрешимости диофантовых уравнений к дополнению теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$. Прежде всего следует отметить, что для диофантовых уравнений можно ограничиться только поиском целых положительных решений. Для этого достаточно в исходном уравнении сделать замену $x = y_x - z_x$ для каждой переменной x .

Далее, очевидно, любое диофантово уравнение можно привести к виду

$$\sum_i \prod_k x_k^{p_{k,i}} = \sum_j \prod_k x_k^{q_{k,j}}, \quad (2)$$

для этого нужно слагаемые с отрицательными коэффициентами перенести в другую часть, а вместо неединичных коэффициентов продублировать слагаемое требуемое количество раз.

Следующим шагом укажем, что термы $t(\bar{x})$, стоящие в левой и правой частях уравнения (2), можно представить некоторыми приведёнными экзистенциальными формулами $\phi_t(\bar{x}, y)$ в алгебре $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ — арифметике целых положительных чисел со сложением и умножением. Напомним, что приведённой называется формула, в которой каждая атомная подформула имеет вид $x = y$ или $x = f(y_1, \dots, y_n)$, где x, y, y_i — переменные или константы. Для этого нужно начать с равенства $y = t(\bar{x})$, а затем на каждом шаге заменять формулу вида $(\exists \bar{u})\theta(\bar{x}, y, \bar{u}, v_1 + v_2)$ на формулу $(\exists \bar{u}, v)(v = v_1 + v_2 \wedge \theta(\bar{x}, y, \bar{u}, v))$, а формулу вида $(\exists \bar{u})\theta(\bar{x}, y, \bar{u}, v_1 v_2)$ — на $(\exists \bar{u}, v)(v = v_1 v_2 \wedge \theta(\bar{x}, y, \bar{u}, v))$. Здесь v_1 и v_2 — это какие-то уже используемые, а v — новая переменная. В конце концов мы получим формулу $\phi_t(\bar{x}, y)$, имеющую вид $(\exists \bar{u})\phi'_t(\bar{x}, y, \bar{u})$, где ϕ'_t — это конъюнкция формул видов $v_1 = v_2$, $v_1 = v_2 + v_3$ и $v_1 = v_2 v_3$.

Таким образом, разрешимость диофантова уравнения вида (2) эквивалентна истинности в алгебре $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ экзистенциальной формулы

$$(\exists \bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, y) \underbrace{(\phi'_{t_1}(\bar{x}, y, \bar{u}_1) \wedge \phi'_{t_2}(\bar{x}, y, \bar{u}_2))}_{\psi}, \quad (3)$$

где t_1 и t_2 — левая и правая части уравнения (2).

Как и в работе [2] мы будем интерпретировать целое положительное число n подпространством размерности n в теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$. Тогда мы хотели бы интерпретировать формулу (3) в теории $\text{Th}(\text{lat } \mathbf{L})$, просто заменив в ней бескванторную часть ψ на формулу ψ' , в которой вместо всех подформул видов $v_1 = v_2$, $v_1 = v_2 + v_3$ и $v_1 = v_2 v_3$ подставлены подформулы $\text{eqdim}(v_1, v_2)$, $\text{sum}(v_1, v_2, v_3)$ и $\text{mult}(v_1, v_2, v_3)$ соответственно.

Такой замены, к сожалению, ещё недостаточно. Как мы уже упомянули, формулы $\text{eqdim}(v_1, v_2)$, $\text{sum}(v_1, v_2, v_3)$ и $\text{mult}(v_1, v_2, v_3)$ корректно представляют равенство, сложение и умножение соответственно, в случае, когда входящие в них переменные означают подпространства размерности не более чем половина от размерности всего пространства. Чтобы убедиться в том, что наше пространство имеет достаточно много измерений, можно использовать формулу $\text{iso}(A, B)$, которая говорит, что размерность подпространства A как минимум в два раза меньше чем размерность всего пространства, а в самой интерпретирующей формуле ограничиться только рассмотрением подпространств A .

Таким образом, для интерпретации формулы (3) нужно построить формулу

$$(\exists A, B)(\text{iso}(A, B) \wedge (\exists \bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, y \subseteq A)\psi'), \quad (4)$$

где формула ψ' получена ранее указанной заменой.

Если истинна формула (3) в алгебре $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, то зафиксируем некоторый набор σ значений переменных $\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, y$, на котором ψ истинна. Пусть n — наибольшее из этих значений. Выберем произвольное конечное пространство $\mathfrak{L}$ размерности $2n$ над каким-либо конечным полем и разложим его в прямую сумму двух подпространств $\mathfrak{L} = A + B$ размерности n . Далее из σ построим новый набор τ значений переменных, заменив каждое положительное целое число m на m -мерное подпространство $X_m \subseteq A$. Такой набор, очевидно, делает истинной формулу ψ' , иными словами формула (4) истинна в $\mathfrak{L}$, а её отрицание не принадлежит $\text{Th}(\text{lat } \mathbb{L})$.

Наоборот, если отрицание формулы (4) не принадлежит $\text{Th}(\text{lat } \mathbb{L})$, то (4) истинна в каком-то конечном пространстве $\mathfrak{L}$, зафиксируем соответствующий набор τ значений переменных. В этом случае подпространства A и B не пересекаются по построению формулы iso. Поскольку значения остальных переменных являются подпространствами A , то размерность этих подпространств меньше размерности $\mathfrak{L}$ как минимум в два раза. Следовательно, формулы eqdim, sum и mult соответствуют равенству, сложению и умножению положительных размерностей. Значит, истинность формулы ψ' на наборе τ влечёт истинность формулы ψ на наборе σ , который получен из τ заменой каждого подпространства на его размерность. Поэтому истинной будет и формула 3 в алгебре $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. $\square$

Следствие 2. Теория класса $\text{exp } \mathbb{L}$ подмножеств конечных линейных подпространств является Π_1 -полным множеством.

Следствие 3. Теории классов $\text{exp } \mathbb{L}$ и $\text{lat } \mathbb{L}$ алгоритмически неразрешимы и не допускают рекурсивной аксиоматизации.

Заключение

Мы показали, что общая теория решёток конечных подпространств неразрешима. Возникает вопрос, можно ли определить более точно границу этой неразрешимости. Например, для многих естественных классов конечных предикатных систем неразрешимым является Σ_2 -фрагмент соответствующей теории, то есть неразрешимо уже множество $\exists\forall$ -формул такой теории (см., например, [10]). Верно ли это для нашего случая?

Другой естественный вопрос — это поиск классов $\mathbb{K}$ конечных алгебр, для которых теория класса $\text{lat } \mathbb{K}$ была бы разрешимой. Одним из примеров такого класса является класс примарных групп, то есть циклических групп порядка p^n для простого p . Для каждой примарной группы $\mathfrak{A}$ решётка $\text{lat } \mathfrak{A}$ — это конечное линейно упорядоченное множество, теория которых разрешима. Поэтому интересно было бы найти другие такие классы.

Список литературы

- [1] Дудаков С.М. О степени неразрешимости теории фигур в линейных пространствах // Математика и теоретические компьютерные науки. 2024. Т. 2, № 4. С. 51–65. <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2024.4.51-65>

- [2] Дудаков С.М. Проблемы алгоритмической разрешимости и аксиоматизации алгебры конечных подмножеств для бинарных операций // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2025. Т. 89, № 2. С. 3–24. <https://doi.org/10.4213/im9579>
- [3] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C. Computability and Logic. 5th edition. New York: Cambridge University Press, 2007. 364 p.
- [4] Chajda I., Langer H. The lattice of subspaces of a vector space over a finite field // Soft Computing. 2019. Vol. 23. Pp. 3261–3267. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-03866-y>
- [5] Dudakov S.M. On undecidability of concatenation theory for one-symbol languages // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 40, № 2. Pp. 168–175.
- [6] Dudakov S., Karlov B. On decidability of theories of regular languages // Theory of Computing Systems. 2021. Vol. 65. Pp. 462–478. <http://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4>
- [7] Gratzer G. Lattice Theory: Foundation. Basel: Birkhauser Verlag, 2011. 614 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1>
- [8] Handbook of Mathematical Logic / ed. by J. Barwise. New York: North-Holland, 1978. 1165 p. <https://doi.org/10.2307/2274155>
- [9] Matiyasevich Ju.V. Enumerable sets are diophantine // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1970. Vol. 191, № 2. Pp. 279–282.
- [10] Nies A. Undecidable fragments of elementary theories // Algebra Universalis. 1996. Vol. 35, № 1. Pp. 8–33. <https://doi.org/10.1007/BF01190967>
- [11] Tamura T., Shafer J. Power semigroups // Mathematicae Japonicae. 1967. Vol. 12. Pp. 25–32.
- [12] Vanstone S.A., van Oorschot P.C. An Introduction to Error Correcting Codes with Applications. Springer, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2032-7>

Образец цитирования

Дудаков С.М. О теориях алгебр подмножеств и решёток подпространств в конечных линейных пространствах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 5–13. <https://doi.org/10.26456/vtpmk728>

Сведения об авторах

1. Дудаков Сергей Михайлович

декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета; профессор математического факультета НИУ «Университет HSE».

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

ON THEORIES OF THE SUBSETS ALGEBRA AND THE SUBSPACES LATTICE FOR FINITE LINEAR SPACES

Dudakov S.M.

Tver State University, Tver
HSE University, Moscow

Received 02.02.2025, revised 25.02.2025.

For infinite linear spaces, in our previous works, we have shown that theories of figures and subspaces are of high undecidability degree. They allow interpreting elementary arithmetic or second-order arithmetic (for infinite figures). For finite linear spaces, such a claim doesn't hold. It is because we can algorithmically enumerate all finite linear spaces and find all formulas with finite models. So, for finite linear spaces, theories of figures and subspaces are in the class Π_1 . It is the class of problems whose complements are recursively enumerable. In the present paper, we prove that these theories are Π_1 -complete, therefore, they are algorithmically undecidable and not recursively axiomatizable.

Keywords: finite algebra, linear space, subset algebra, subspace, subalgebras lattice, algorithmic undecidability, completeness.

Citation

Dudakov S.M., "On theories of the subsets algebra and the subspaces lattice for finite linear spaces", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 1, 5–13 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk728>

References

- [1] Dudakov S.M., "On undecidability degree of theory of figures in linear spaces", *Matematika i teoreticheskie komp'yuternye nauki [Mathematics and Theoretical Computer Science]*, **2**:4 (2024), 51–65 (in Russian), <https://doi.org/10.26907/2949-3919.2024.4.51-65>.
- [2] Dudakov S.M., "Problems of algorithmic solvability and axiomatization of the algebra of finite subsets for binary operations", *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya [Izvestiya: Mathematics]*, **89**:2 (2025), 3–24 (in Russian), <https://doi.org/10.4213/im9579>.
- [3] Boolos G.S., Burgess J.P., Jeffrey R.C., *Computability and Logic*, 5th edition, Cambridge University Press, New York, 2007, 364 pp.
- [4] Chajda I., Langer H., "The lattice of subspaces of a vector space over a finite field", *Soft Computing*, **23** (2019), 3261–3267, <https://doi.org/10.1007/s00500-019-03866-y>.

- [5] Dudakov S.M., “On undecidability of concatenation theory for one-symbol languages”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **40**:2 (2020), 168–175.
- [6] Dudakov S., Karlov B., “On decidability of theories of regular languages”, *Theory of Computing Systems*, **65** (2021), 462–478, <http://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4>.
- [7] Gratzer G., *Lattice Theory: Foundation*, Birkhauser Verlag, Basel, 2011, 614 pp., <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1>.
- [8] *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, New York, 1978, 1165 pp., <https://doi.org/10.2307/2274155>.
- [9] Matiyasevich Ju.V., “Enumerable sets are diophantine”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **191**:2 (1970), 279–282.
- [10] Nies A., “Undecidable fragments of elementary theories”, *Algebra Universalis*, **35**:1 (1996), 8–33, <https://doi.org/10.1007/BF01190967>.
- [11] Tamura T., Shafer J., “Power semigroups”, *Mathematicae Japonicae*, **12** (1967), 25–32.
- [12] Vanstone S.A., van Oorschot P.C., *An Introduction to Error Correcting Codes with Applications*, Springer, 1989, <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2032-7>.

Author Info

1. Dudakov Sergey Mikhailovich

Head of Applied Mathematics and Cybernetics Faculty, Tver State University;
Professor of Mathematics Department, HSE University.

Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TverSU.

E-mail: sergeydudakov@yandex.ru