

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Ю.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 05.02.2025, после переработки 26.02.2025.

Предложен новый подход к построению точных решений задачи Коши для квазигидродинамической системы. Выбираются подстановки, удовлетворяющие выведенным трем условиям. Приведены примеры использования предложенного подхода. Особое внимание уделено решениям квазигидродинамической системы, не удовлетворяющим ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. Впервые построено подобное решение задачи Коши с переменным давлением.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, система Навье–Стокса, задача Коши, точное решение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 14–32.
<https://doi.org/10.26456/vtppmk730>

Введение

Построению точных решений системы Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература [1–10]. В данной работе рассматривается задача Коши для квазигидродинамической (КГД) системы уравнений, которая отличается от системы Навье–Стокса добавочными дивергентными членами. Физические принципы, лежащие в основе построения КГД системы, описаны в монографиях [11–14]. Там же представлены семейства точных решений КГД уравнений. Проблема поиска новых классов решений квазигидродинамической системы является актуальной.

В данной работе продолжены исследования, изложенные в статьях [15, 16]. Предложен новый подход к построению точных решений задачи Коши для квазигидродинамической системы. Выбираются подстановки, удовлетворяющие выведенным трем условиям. Приведены примеры использования предложенного подхода. Особое внимание уделено решениям квазигидродинамической системы, не удовлетворяющим ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. Впервые построено подобное решение задачи Коши с переменным давлением. При

© Шеретов Ю.В., 2025

$c_s \rightarrow +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, все найденные решения переходят в решения задачи Коши для соответствующей системы Навье–Стокса.

1. Квазигидродинамическая система. Система Навье–Стокса. Постановка задачи Коши

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости в стандартных обозначениях имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{w}). \quad (1.2)$$

Влияние внешних массовых сил не учитывается. Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p). \quad (1.3)$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости. Он является заданной положительной константой. Постоянная средняя плотность жидкости ρ считается равной единице. Оператор Лапласа Δ действует в пространстве $\mathbb{R}_x^3$. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \quad (1.4)$$

где c_s – скорость звука в жидкости.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь членами, содержащими τ , то получим систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \quad (1.6)$$

Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.2) в декартовых координатах $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ для неустановившихся течений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + (u_x - w_x) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (u_y - w_y) \frac{\partial u_x}{\partial y} + (u_z - w_z) \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (u_x - w_x) \frac{\partial u_y}{\partial x} + (u_y - w_y) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (u_z - w_z) \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$= \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial t} + (u_x - w_x) \frac{\partial u_z}{\partial x} + (u_y - w_y) \frac{\partial u_z}{\partial y} + (u_z - w_z) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь

$$w_x = \tau \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (1.11)$$

$$w_y = \tau \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (1.12)$$

$$w_z = \tau \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (1.13)$$

Система (1.7) – (1.13) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x, y, z, t)$, $u_y = u_y(x, y, z, t)$, $u_z = u_z(x, y, z, t)$ и давления $p = p(x, y, z, t)$.

Нестационарная система Навье–Стокса (1.4) – (1.5) в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (1.17)$$

Чтобы поставить задачу Коши, к квазигидродинамической системе (1.7) – (1.13) добавим начальные условия

$$\begin{aligned} u_x \Big|_{t=0} &= u_{x0}(x, y, z), \quad u_y \Big|_{t=0} = u_{y0}(x, y, z), \quad u_z \Big|_{t=0} = u_{z0}(x, y, z), \\ (x, y, z) &\in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь $u_{x0} = u_{x0}(x, y, z)$, $u_{y0} = u_{y0}(x, y, z)$ и $u_{z0} = u_{z0}(x, y, z)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для исключения неоднозначности в определении давления будем считать, что

$$p(0, 0, 0, t) = p_0, \quad t \geq 0, \quad (1.19)$$

где p_0 – заданное положительное число.

Задача Коши может быть поставлена и для системы Навье–Стокса (1.14) – (1.17). Однако поле скорости в начальный момент времени должно подчиняться условию

$$\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial z} = 0. \quad (1.20)$$

2. Решения задачи Коши для квазигидродинамической системы специального вида

В области $\Omega = \{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0\}$ будем искать бесконечно дифференцируемые решения $(\vec{u}, p)$ поставленной задачи Коши для квазигидродинамической системы, которые назовем *гладкими решениями*.

Теорема 1. Пусть $(\vec{u}, p)$ – гладкое решение задачи Коши для квазигидродинамической системы, удовлетворяющее в Ω условию

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.1)$$

Тогда в Ω должны выполняться равенства

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0, \quad (2.2)$$

$$(\nabla \otimes \vec{u}) : (\nabla \otimes \vec{w})^T = 0, \quad (2.3)$$

где

$$(\nabla \otimes \vec{u}) : (\nabla \otimes \vec{w})^T = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z), (w_1, w_2, w_3) = (w_x, w_y, w_z).$$

Доказательство. Равенство (2.2) непосредственно следует из (1.1) и (2.1). Принимая во внимание (1.3), представим (1.2) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\vec{w}}{\tau} = \nu \Delta \vec{u} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u} + \nu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}). \quad (2.5)$$

В силу (2.1), последние два слагаемых в (2.5) обращаются в нуль. Поэтому

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\vec{w}}{\tau} = \nu \Delta \vec{u} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w}. \quad (2.6)$$

Подействуем оператором div на обе части равенства (2.6). Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u}) + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \vec{w} = \nu \Delta (\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{div} \left((\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} \right). \quad (2.7)$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.2), преобразуем (2.7) к виду

$$\operatorname{div} \left((\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} \left((\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right) + \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \\
 &= (\vec{w} \cdot \nabla) (\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) (\operatorname{div} \vec{w}) + 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Из (2.8) и (2.9) находим

$$(\vec{w} \cdot \nabla) (\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) (\operatorname{div} \vec{w}) + 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = 0. \tag{2.10}$$

Равенство (2.3) является следствием (2.1), (2.2) и (2.10). $\square$

Займемся построением решений задачи Коши для квазигидродинамической системы, подчиняющихся условиям (2.1) – (2.3). В этой статье нас будут интересовать решения, не удовлетворяющие ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера.

3. Решения с постоянным давлением

Пример 1. Будем искать решение поставленной задачи Коши для квазигидродинамической системы в виде

$$u_x = U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = \varphi(x, t), \quad u_z = \psi(x, t), \quad p = p_0 = \text{const} > 0. \tag{3.1}$$

Принимая во внимание (1.11) – (1.13), находим

$$w_x = 0, \quad w_y = \tau U \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, \quad w_z = \tau U \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении условий (2.1) – (2.3). Подстановка зависимостей (3.1) в квазигидродинамическую систему приводит к двум уравнениям переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\nu_* = \nu + \tau U^2 = \nu \left(1 + \frac{U^2}{c_s^2} \right). \quad (3.5)$$

Дополним (3.3) и (3.4) начальными условиями

$$\varphi \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$\psi \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

где $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ – непрерывно-дифференцируемые на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции. Для решения поставленных задач Коши перейдем в (3.3) и (3.4) к новым функциям

$$\Phi(\xi, t) = \varphi(x, t), \quad \Psi(\xi, t) = \psi(x, t), \quad (3.8)$$

где

$$\xi = x - Ut. \quad (3.9)$$

Подстановка (3.8) в (3.3), (3.6), (3.4), (3.7) дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu_* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \quad (3.10)$$

$$\Phi \Big|_{t=0} = \varphi_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu_* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}, \quad (3.12)$$

$$\Psi \Big|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Решения задач Коши (3.10) – (3.11), (3.12) – (3.13) могут быть выписаны с помощью (см. [17]) формулы Пуассона:

$$\Phi(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi_*) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_*)^2}{4\nu_*t}\right) d\xi_*, \quad (3.14)$$

$$\Psi(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(\xi_*) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_*)^2}{4\nu_*t}\right) d\xi_*, \quad t > 0. \quad (3.15)$$

Учитывая (3.8) и (3.9), находим

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_*, \quad (3.16)$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_*, \quad t > 0. \quad (3.17)$$

Подстановка (3.16) и (3.17) в (3.1) приводит к точному решению задачи Коши для квазигидродинамической системы с начальным условием

$$u_x \Big|_{t=0} = U, \quad u_y \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_z \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.18)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\varphi_0(x) = A \sin\left(\frac{x}{H} + \delta_1\right), \quad \psi_0(x) = B \sin\left(\frac{x}{H} + \delta_2\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Здесь A , B и H – положительные константы, имеющие соответственно размерности $\text{см}/\text{с}$, $\text{см}/\text{с}$ и см ; δ_1 и δ_2 – произвольные вещественные постоянные из промежутка $[0, 2\pi)$. С начальными данными (3.18), (3.19) решение задачи Коши для квазигидродинамической системы имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \\ u_y &= A \sin\left(\frac{x - Ut}{H} + \delta_1\right) \exp\left(-\frac{\nu_* t}{H^2}\right), \\ u_z &= B \sin\left(\frac{x - Ut}{H} + \delta_2\right) \exp\left(-\frac{\nu_* t}{H^2}\right), \\ p &= p_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пусть

$$\varphi_0(x) = A \sin\left(\frac{x}{H} + \delta_1\right), \quad \psi_0(x) = \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_* t_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu_* t_0}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Здесь t_0 – заданная положительная константа, измеряемая в секундах. Соответствующее точное решение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \\ u_y &= A \sin\left(\frac{x - Ut}{H} + \delta_1\right) \exp\left(-\frac{\nu_* t}{H^2}\right), \\ u_z &= \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_*(t + t_0)}} \exp\left(-\frac{(x - Ut)^2}{4\nu_*(t + t_0)}\right), \\ p &= p_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Пример 2. Будем искать решение задачи Коши для квазигидродинамической системы в виде

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = V = \text{const} \neq 0, \quad u_z = \psi(x, y, t), \\ p &= p_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подстановка (3.23) в (1.11) – (1.13) дает

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = \tau \left(U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (3.24)$$

Убеждаемся в выполнении условий (2.1) – (2.3).

Для зависимостей (3.23) равенства (1.7) – (1.9) выполняются. Уравнение (1.10) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \tau \left(U^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2UV \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Добавляем к (3.25) начальное условие

$$\psi \Big|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2. \quad (3.26)$$

Здесь $\psi_0(x, y)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая функция на плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$. Определим положительные числа

$$\begin{aligned} \nu_{11} &= \nu + \tau U^2 = \nu \left(1 + \frac{U^2}{c_s^2} \right), \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \tau UV = \nu \frac{UV}{c_s^2}, \\ \nu_{22} &= \nu + \tau V^2 = \nu \left(1 + \frac{V^2}{c_s^2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

и сформируем симметричную положительно определенную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

С учетом сделанных обозначений уравнение (3.25) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nu_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\nu_{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \nu_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (3.29)$$

Перейдем в (3.29) к новой функции

$$\Psi(\xi, \eta, t) = \psi(x, y, t), \quad (3.30)$$

где

$$\xi = x - Ut, \quad \eta = y - Vt. \quad (3.31)$$

Получим анизотропное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu_{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2\nu_{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} + \nu_{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}, \quad (3.32)$$

которое необходимо дополнить начальным условием

$$\Psi \Big|_{t=0} = \psi_0(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_{\xi,\eta}^2. \quad (3.33)$$

Итак, проблема свелась к построению решений задачи Коши (3.32) – (3.33). Решим эту задачу в одном частном случае. Рассмотрим две задачи Коши:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \nu_{11} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2}, \quad (3.34)$$

$$\Psi_1 \Big|_{t=0} = \psi_{01}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \nu_{22} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \eta^2}, \quad (3.36)$$

$$\Psi_2 \Big|_{t=0} = \psi_{02}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Здесь $\Psi_1 = \Psi_1(\xi, t)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(\eta, t)$ – неизвестные функции, $\psi_{01}(\xi)$ и $\psi_{02}(\eta)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции. Решения (3.34) – (3.35) и (3.36) – (3.37) можно найти с помощью формулы Пуассона:

$$\Psi_1(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_{11}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{01}(\xi_*) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_*)^2}{4\nu_{11}t}\right) d\xi_*, \quad t > 0, \quad (3.38)$$

$$\Psi_2(\eta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_{22}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{02}(\eta_*) \exp\left(-\frac{(\eta - \eta_*)^2}{4\nu_{22}t}\right) d\eta_*, \quad t > 0. \quad (3.39)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\Psi = \Psi(\xi, \eta, t) = \Psi_1(\xi, t) + \Psi_2(\eta, t) \quad (3.40)$$

является решением анизотропного уравнения теплопроводности (3.32) с начальным условием (3.33), в котором

$$\psi_0(\xi, \eta) = \psi_{01}(\xi) + \psi_{02}(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_{\xi, \eta}^2. \quad (3.41)$$

Возвращаясь к переменным x и y , выписываем решение задачи Коши (3.25) – (3.26):

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_{11}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{01}(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_{11}t}\right) dx_* + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_{22}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{02}(y_*) \exp\left(-\frac{(y - Vt - y_*)^2}{4\nu_{22}t}\right) dy_*. \end{aligned} \quad (3.42)$$

При этом

$$\psi_0(x, y) = \psi_{01}(x) + \psi_{02}(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{x, y}^2. \quad (3.43)$$

Подстановка (3.42) в (3.23) дает точное решение задачи Коши для квазигидродинамической системы с начальным условием

$$u_x \Big|_{t=0} = U, \quad u_y \Big|_{t=0} = V, \quad u_z \Big|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.44)$$

где $\psi_0(x, y)$ определена формулой (3.43).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\psi_0(x, y) = A \sin\left(\frac{x}{H} + \delta_1\right) + B \sin\left(\frac{y}{H} + \delta_2\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2. \quad (3.45)$$

Постоянные A , B , H , δ_1 и δ_2 такие же, как и в предыдущем примере. Решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = V = \text{const} \neq 0, \\ u_z &= A \sin\left(\frac{x - Ut}{H} + \delta_1\right) \exp\left(-\frac{\nu_{11}t}{H^2}\right) + \\ &+ B \sin\left(\frac{y - Vt}{H} + \delta_2\right) \exp\left(-\frac{\nu_{22}t}{H^2}\right), \\ p &= p_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Если же

$$\psi_0(x, y) = A \sin\left(\frac{x}{H} + \delta_1\right) + \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_{22}t_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu_{22}t_0}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2, \quad (3.47)$$

где t_0 – положительная константа, то

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = V = \text{const} \neq 0, \\ u_z &= A \sin\left(\frac{x - Ut}{H} + \delta_1\right) \exp\left(-\frac{\nu_{11}t}{H^2}\right) + \\ &+ \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_{22}(t + t_0)}} \exp\left(-\frac{(y - Vt)^2}{4\nu_{22}(t + t_0)}\right), \\ p &= p_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

4. Решения с переменным давлением

Пример 3. Для отыскания решений квазигидродинамической системы с переменным давлением применим подстановку

$$\begin{aligned} u_x &= U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = \varphi(x, t), \\ u_z &= \psi(x, t) + \frac{y}{H} \psi_1(x, t) + \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right) V_0, \\ p &= Az + p_0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь H – заданная положительная константа, имеющая размерность длины; p_0 – положительная постоянная; V_0 – заданная, отличная от нуля константа, имеющая размерность скорости; A – неизвестная отличная от нуля постоянная. Символами $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$ и $\psi_1(x, t)$ обозначены функции, подлежащие определению.

Подставив зависимости (4.1) в (1.11) – (1.13), находим

$$\begin{aligned} w_x &= 0, \quad w_y = \tau U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ w_z &= \tau U \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{y}{H} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \frac{\tau}{H} \varphi \psi_1 - 2\tau \frac{y}{H^2} \varphi V_0 + \tau A. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для функций (4.1), (4.2) выполняются условия (2.1) – (2.3). Подстановка (4.1), (4.2) в (1.7) и (1.8) приводит к истинным равенствам. Подстановка (4.1), (4.2) в (1.9), (1.10) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \tau U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{y}{H} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + U \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{y}{H} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) &+ \left(\varphi - \tau U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\psi_1}{H} - 2 \frac{y}{H^2} V_0 \right) + A = \\ &= \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{y}{H} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\nu}{H^2} V_0 + \\ &+ \tau U^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \tau \frac{y}{H} U^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\tau U}{H} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \psi_1) - 2\tau U \frac{y}{H^2} V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\tau U}{H} \varphi \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - 2 \frac{\tau}{H^2} \varphi^2 V_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Представим (4.3) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

где

$$\nu_* = \nu \left(1 + \frac{U^2}{c_s^2} \right). \quad (4.6)$$

В (4.4) положим

$$A = -2 \frac{\nu}{H^2} V_0. \quad (4.7)$$

После этого преобразуем (4.4) к виду

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\tau U}{H} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \psi_1) + \frac{\varphi \psi_1}{H} + 2 \frac{\tau}{H^2} \varphi^2 V_0 \right) + \\ &+ \frac{y}{H} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \nu_* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{2}{H} V_0 \varphi + 4\tau \frac{U}{H} V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) выполняется при произвольном $y \in \mathbb{R}$, если каждое выражение, заключенное в большие скобки, равно нулю, т.е.

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2}{H} V_0 \varphi - 4\tau \frac{U}{H} V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\tau U}{H} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \psi_1) - \frac{\varphi \psi_1}{H} - 2 \frac{\tau}{H^2} \varphi^2 V_0. \quad (4.10)$$

Дополним (4.5) начальным условием

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Здесь $\varphi_0(x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Решение задачи Коши (4.5), (4.11) имеет вид

$$\varphi = \varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_*, \quad t > 0. \quad (4.12)$$

Аналогично, уравнение (4.9) представим в виде

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + f_1(x, t), \quad (4.13)$$

где

$$f_1(x, t) = \frac{2}{H} V_0 \varphi - 4\tau \frac{U}{H} V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.14)$$

При этом функция $\varphi = \varphi(x, t)$ определена формулой (4.12). Добавим к (4.13) начальное условие

$$\psi_1|_{t=0} = \psi_{10}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Здесь $\psi_{10}(x)$ – заданная функция класса $C^1(\mathbb{R})$. Повторяя рассуждения из [16], строим решение задачи Коши (4.13), (4.15):

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_1(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_* + \\ & + \int_0^t dt_* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(x_* + Ut_*, t_*)}{2\sqrt{\pi\nu_*(t - t_*)}} \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*(t - t_*)}\right) dx_*, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Наконец, уравнение (4.10) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4.17)$$

Здесь

$$f(x, t) = 2\frac{\tau U}{H} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \psi_1) - \frac{\varphi \psi_1}{H} - 2\frac{\tau}{H^2} \varphi^2 V_0. \quad (4.18)$$

Функции $\varphi = \varphi(x, t)$ и $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ в (4.18) вычисляются с помощью выражений (4.12) и (4.16). Присоединяем к (4.17) начальное условие

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.19)$$

где $\psi_0(x)$ – заданная функция класса $C^1(\mathbb{R})$. Решение задачи Коши (4.17), (4.19) выглядит так:

$$\psi = \psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_* +$$

$$+ \int_0^t dt_* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_* + Ut_*, t_*)}{2\sqrt{\pi\nu_*(t-t_*)}} \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*(t-t_*)}\right) dx_*, \quad t > 0. \quad (4.20)$$

Подстановка (4.7), (4.12), (4.16) и (4.20) в (4.1) дает решение задачи Коши для квазигидродинамической системы с начальным условием

$$u_x \Big|_{t=0} = U, \quad u_y \Big|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

$$u_z \Big|_{t=0} = \psi_0(x) + \frac{y}{H} \psi_{10}(x) + \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right) V_0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.21)$$

Заметим, что это решение задачи Коши для квазигидродинамической системы с переменным давлением построено впервые. Соответствующее решение задачи Коши (1.14) – (1.17), (1.18), (1.19) для системы Навье–Стокса получается из (u_x, u_y, u_z, p) предельным переходом при $c_s \rightarrow +\infty$.

Заключение

Различные варианты квазигидродинамической регуляризации систем уравнений использовались для построения разностных схем [18–25]. В частности, показана возможность численного моделирования не только ламинарных, но и турбулентных течений [24, 25]. В недавно опубликованных работах [26, 27] изучены вопросы разрешимости начально-краевых задач для квазигидродинамических систем. В диссертации [28] математически исследованы регуляризованные системы уравнений для описания движений многокомпонентных сжимаемых газовых смесей.

Построенные решения могут использоваться в качестве тестов при компьютерной реализации численных методов. Отдельная проблема связана с их графической визуализацией.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.
- [4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
- [5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.
- [6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

- [7] Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
- [8] Bogoyavlenskij O.I. New axisymmetric solutions to the Navier-Stokes equations // Zeitschrift fur Naturforschung. Section A: Journal of Physical Sciences. 2020. Vol. 75, № 1. Pp. 29–42.
- [9] Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Leshchenko D. Exact solutions for isobaric inhomogeneous Couette flows of a vertically swirling fluid // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2023. Pp. 1–8. <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.41371.3744>
- [10] Galkin V.A. On the structure of axisymmetric helical solutions to the incompressible Navier–Stokes system // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, № 5. Pp. 1004–1014.
- [11] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
- [12] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
- [13] Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 196 с.
- [14] Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.
- [15] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье–Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 2. С. 5–15. <https://doi.org/10.26456/vtpmk611>
- [16] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Построение решений задачи Коши для квазигидродинамической системы с помощью подстановки Линя // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 4. С. 5–16. <https://doi.org/10.26456/vtpmk723>
- [17] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
- [18] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 30 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66>
- [19] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. <https://doi.org/10.3934/jcd.2020012>

- [20] Balashov V.A. Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow // *Computers and Mathematics with Applications*. 2021. Vol. 90. Pp. 112–124. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013>
- [21] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость–твердое тело» с учетом химических реакций. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82>
- [22] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // *Computer Physics Communications*. 2022. Vol. 271, № 1. ID 108216. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216>
- [23] Кирюшина М.А., Елизарова Т.Г. Елихин А.С. Верификация численного алгоритма на основе квазигидродинамических уравнений на примере моделирования задач термогравитационной конвекции // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2024. Т. 64, № 10. С. 1966–1976. <https://doi.org/10.31857/S0044466924100143>
- [24] Кирюшина М.А. Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. 21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-48>
- [25] Кирюшина М.А. Моделирование течений жидкости в кольцевом и полукольцевом каналах. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. 23 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-63>
- [26] Evseev F.A., Pyatkov S.G. Regular solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid // *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. Vol. 281, № 6. Pp. 909–924. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07159-0>
- [27] Evseev F.A., Pyatkov S.G. Solvability of the first initial-boundary value problem for the Quasihydrodynamics equations in the shallow water approximation // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, № 9. Pp. 4490–4499. <https://doi.org/10.1134/S1995080224605083>
- [28] Федченко А.С. Регуляризованные системы уравнений движения многокомпонентных сжимаемых газовых смесей и их разностные аппроксимации: дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва: Высшая школа экономики, 2024. 111 с.

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. Об одном способе построения точных решений квазигидродинамической системы // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2025. № 1. С. 14–32. <https://doi.org/10.26456/vtpmk730>

Сведения об авторах**1. Шеретов Юрий Владимирович**

профессор кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON ONE MANNER OF CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM

Sheretov Yu.V.

Tver State University, Tver

Received 05.02.2025, revised 26.02.2025.

A new approach to constructing exact solutions of the Cauchy problem for the quasi-hydrodynamic system is proposed. Substitutions are selected that satisfy the three derived conditions. Examples of using the proposed approach are given. Particular attention is paid to solutions of the quasi-hydrodynamic system that do not satisfy either the Navier-Stokes or Euler equations. For the first time, such a solution to the Cauchy problem with variable pressure is constructed.

Keywords: quasi-hydrodynamic system, Navier–Stokes system, Cauchy problem, exact solutions.

Citation

Sheretov Yu.V., “On one manner of constructing exact solutions of quasi-hydrodynamic system”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 1, 14–32 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk730>

References

- [1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.
- [2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.
- [3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.
- [4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.
- [5] Pukhnachev V.V., “Symmetries in the Navier-Stokes equations”, *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).
- [6] Wang C.Y., “Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations”, *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

- [7] Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D., “Exact solutions of the Navier-Stokes equations with linear dependence of the velocity components on two spatial variables”, *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii [Theoretical foundations of chemical technology]*, **43**:5 (2009), 547–566 (in Russian).
- [8] Bogoyavlenskij O.I., “New axisymmetric solutions to the Navier-Stokes equations”, *Zeitschrift fur Naturforschung. Section A: Journal of Physical Sciences*, **75**:1 (2020), 29–42.
- [9] Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Leshchenko D., “Exact solutions for isobaric inhomogeneous Couette flows of a vertically swirling fluid”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2023, 1–8, <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.41371.3744>.
- [10] Galkin V.A., “On the structure of axisymmetric helical solutions to the incompressible Navier–Stokes system”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **64**:5 (2024), 1004–1014.
- [11] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.
- [12] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.
- [13] Sheretov Yu.V., *Dvukhskorostnaya negalileeva gidrodinamika [Two-speed non-Galilean hydrodynamics]*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 196 pp.
- [14] Sheretov Yu.V., *Kinetically consistent equations of gas dynamics*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 129 pp.
- [15] Grigoreva V.V., Sheretov Yu.V., “On exact solutions of quasi-hydrodynamic system that don’t satisfy the Navier-Stokes and Euler systems”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, **2** (2021), 5–15 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk611>.
- [16] Grigor’eva V.V., Sheretov Yu.V., “Construction of solutions to the Cauchy problem for Quasi-hydrodynamic system using Lin’s substitution”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 4, 5–16 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk723>.
- [17] Vladimirov V.S., *Uraveniya Matematicheskoi Fiziki [Equations of Mathematical Physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (in Russian), 512 pp.
- [18] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., *Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 30 pp., <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66>.
- [19] Balashov V.A., Zlotnik A.A., “An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations”, *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, <https://doi.org/10.3934/jcd.2020012>.

- [20] Balashov V.A., “Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow”, *Computers and Mathematics with Applications*, **90** (2021), 112–124, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013>.
- [21] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system taking into account chemical reactions*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82>.
- [22] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G., “Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM”, *Computer Physics Communications*, **271**:1 (2022), 108216, <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216>.
- [23] Kiryushina M.A., Elizarova T.G. Epikhin A.S., “Verification of a numerical algorithm based on quasi-hydrodynamic equations using the example of modeling thermogravitational convection problems”, *Zhurnal vy‘chislitel’noj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **64**:10 (2024), 1966–1976 (in Russian), <https://doi.org/10.31857/S0044466924100143>.
- [24] Kiryushina M.A., *Numerical experiment in the problem of propagation of small perturbations in a circular tube*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2024 (in Russian), 21 pp., <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-48>.
- [25] Kiryushina M.A., *Modeling of fluid flows in annular and semicircular channels*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2024 (in Russian), 23 pp., <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-63>.
- [26] Evseev F.A., Pyatkov S.G., “Regular solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid”, *Journal of Mathematical Sciences*, **281**:6 (2024), 909–924, <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07159-0>.
- [27] Evseev F.A., Pyatkov S.G., “Solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamics equations in the shallow water approximation”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:9 (2024), 4490–4499, <https://doi.org/10.1134/S1995080224605083>.
- [28] Fedchenko A.S., *Regularized systems of equations of motion of multicomponent compressible gas mixtures and their difference approximations*, thesis of Candidate of Physics.–Mat. of Sciences, Higher School of Economics, Moscow, 2024 (in Russian), 111 pp.

Author Info

1. Sheretov Yurii Vladimirovich

Professor of the Department of Fundamental Mathematics and Digital Technologies.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru